


BERKELEY
LIBRARY
UNIVERSITY OF
CALIFORNIA





B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BAND X 2.

NIEDERE ZAHLENTHEORIE

VON

PROF. DR. PAUL BACHMANN
ZU WEIMAR.

ZWEITER TEIL

ADDITIVE ZAHLENTHEORIE.

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

Vorrede.

Viel später erst, als ich gewünscht, kann ich hiermit den zweiten Teil meiner „Niederen Zahlentheorie“ der Öffentlichkeit übergeben. Er behandelt dasjenige Gebiet der Zahlentheorie, welches man nach *Kroneckers* Vorgange als „Additive Zahlentheorie“ bezeichnet, weil es die auf additiver Verknüpfung beruhenden Eigenschaften und Beziehungen der Zahlen umfaßt. Noch gibt es kein Werk, welches eine systematische Entwicklung der additiven Zahlentheorie oder eine geschlossene Darstellung der vorhandenen auf sie bezüglichen Forschungen zum Inhalte hätte. Wenn so das vorliegende das erste ist, das den Versuch dazu macht, so bin ich mir wohl bewußt, daß ich die Nachsicht des Lesers in Anspruch nehmen muß. Bei der Mannigfaltigkeit und Zerstreutheit der in Betracht kommenden Gegenstände war die Aufgabe nicht leicht, ein einheitliches Ganzes zu bilden. Eine streng systematische Darstellung wollte zurzeit überhaupt nicht gelingen, da es noch an allgemeinen Methoden und Grundlagen zu einer rein arithmetischen Entwicklung der additiven Zahlentheorie fehlt; die Anfänge, welche dazu von *Sylvester* gemacht worden sind, sind noch wenig genügend. Meist bedarf es, ihre Sätze zu begründen, des Hilfsmittels der Analysis, insbesondere jenes fruchtbaren *Euler*schen Mittels, der Entwicklung unendlicher Produkte in Potenzreihen; auch ist es bei der leichten Handlichkeit dieses Hilfsmittels sowie bei den interessanten Einblicken in den wissenschaftlichen Zusammenhang der Probleme, die es vermittelt, kaum ratsam, ganz darauf zu verzichten. Mußte ich daher einerseits mich darauf beschränken, die Ergebnisse der Forschung über additive Zahlentheorie nur zu ordnen und nach Möglichkeit in Zusammenhang zu bringen, so vermochte ich andererseits nicht überall im eigentlichen Rahmen der niederen Zahlentheorie zu verbleiben, und verweise in dieser Hinsicht auf das, was ich über den Titel meines Werkes schon in der Vorrede zum ersten Teile hervorgehoben habe, daß derselbe nicht durchweg aus dem Inhalte des Werks, sondern aus dem Ursprunge desselben aus dem gleichnamigen Artikel der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften zu erklären ist.

Nachdem ich im ersten Kapitel die additive Bildung der wichtigsten Zahlenarten, Polygonalzahlen, figurierten Zahlen, vornehmlich der Summen gleicher Potenzen der natürlichen Zahlen und im Anschluß an diese die wesentlichsten zahlentheoretischen Eigenschaften der *Bernoulli*schen Zahlen entwickelt, behandle ich im zweiten Kapitel die rekurrenten, insbesondere die von *Lucas* als fonctions numériques simplement périodiques benannten Zahlenreihen. Das dritte Kapitel bringt die Lehre von der Zerfällung der Zahlen in Summanden der verschiedensten Art, die bezüglichen Untersuchungen von *Cayley* und *Sylvester*, den Pentagonalzahlensatz von *Euler-Legendre*, den engeren Pentagonalzahlensatz von *Vahlen* u. a. mehr, woran sich im folgenden Kapitel die gleichzeitige Zerfällung zweier Zahlen (die partition bipartite) anschließt. Das fünfte Kapitel gibt die Untersuchungen über relative Zerfällung einer Zahl in bezug auf einen gegebenen Modulus, die von *Stern* begonnen und neuerdings von *Daublebsky von Sterneck* in erfolgreicher Weise fortgeführt worden sind. Dann folgen im sechsten Kapitel mannigfache Rekursionsformeln von der Art der berühmten *Euler*schen Formel für die Summe der Teiler einer Zahl. Das siebente Kapitel enthält die Sätze über die Zerfällungen einer Zahl in zwei und vier Quadrate, zudem die neuesten Untersuchungen über die für die Zerfällung jeder Zahl notwendige Anzahl von Kuben, Biquadraten und höheren Potenzen. Im achten Kapitel findet man eine größere Auswahl der *Liouville*schen Formeln, die er unter dem Titel „sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres“ veröffentlicht hat, ihre Anwendung zur Bestimmung der Anzahl der Darstellungen einer Zahl durch gewisse quaternäre quadratische Formen, sowie endlich zur Herleitung einer der *Kronecker*schen Rekursionsformeln für die Klassenanzahl binärer quadratischer Formen. Ein Schlußkapitel behandelt die Gleichung $x^n + y^n = z^n$; nachdem zunächst die Pythagoräischen Zahlen oder die rationalen rechtwinkligen Dreiecke, dann allgemeiner die rationalen Dreiecke überhaupt bestimmt worden sind, wird nach *Kummer* die Bestimmung rationaler Vierecke gelehrt und zuletzt eine zusammenhängende Skizze der hauptsächlichsten Bemühungen und Ergebnisse der Forschung über das „letzte *Fermat*sche Theorem“ geliefert, für welches neuerdings das Interesse der Mathematiker einen besonderen Anreiz erhalten hat.

Der Verfasser hofft, daß es ihm gelungen sei, trotz der gemischten Methode ein hinreichend abgerundetes Ganzes zu schaffen, welches, wie es einem fühlbaren Bedürfnisse entgegenkommt, dieses auch einigermaßen zu befriedigen vermöge.

Weimar, den 15. September 1909.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Erstes Kapitel: Bildung von Zahlen auf additivem Wege.

Nr. 1. Arithmetische Reihen. Polygonalzahlen . . . . 1—4
Nr. 2. Differenz- und Summenreihen . . . . 4—8
Nr. 3. Figurierte Zahlen, Binomialkoeffizienten, *Pascal*sches Dreieck 8—14
Nr. 4. Die symbolischen Formeln
$a_i = (1 + \Delta a)^{(i)},\ \Delta^{(i)} a = (a-1)^{(i)}$ . . . . . . 14—16
Nr. 5. Die Summen $S_n^{(k)}$ der k^{ten} Potenzen der ersten n ganzen Zahlen. Methode von *Alkarchi* . . . . 16—20
Nr. 6. Der Ausdruck für $S_n^{(k)}$ mittels *Bernoulli*scher Zahlen . . . . 20—22
Nr. 7. Sätze von *Stern* und *Lampe* . . . . 22—25
Nr. 8. Die Summen der k^{ten} Potenzen der ungeraden Zahlen bis $2n-1$; Satz von *Ibn Albanná*; alternierende Potenzsummen gerader und ungerader Zahlen . . . . 25—27
Nr. 9. Die Summen der k^{ten} Potenzen der Glieder arithmetischer Reihen; eine Formel von *Fermat* . . . . 27—29
Nr. 10. Die *Bernoulli*schen Zahlen; Rekursionsformeln zu ihrer Berechnung; ihre analytische Definition; Sätze von *Lipschitz* . 30—33
Nr. 11—12. Ein *Kummer*scher Satz und seine Anwendung auf die *Euler*schen Zahlen (Sekantenkoeffizienten); Sätze von *Sylvester* und von *Stern* . . . . 33—38
Nr. 13. Die Tangentenkoeffizienten; Satz von *Stern* . . . . 38—40
Nr. 14. *Kummer*sche Kongruenzen für *Bernoulli*sche Zahlen . . . . 40—42
Nr. 15. Der *von Staudt-Clausen*sche Satz. Hilfsbetrachtungen . . . 43—46
Nr. 16. Beweis des Satzes nach *von Staudt* . . . . 46—49
Nr. 17. Der Beweis von *Lucas* . . . . 49—51
Nr. 18. Die ganzzahligen Teile der *von Staudt*schen Formel; Sätze von *Hermite* und von *Stern*. Sätze von *von Staudt* und von *Lipschitz* . . . . 51—55

Zweites Kapitel: Rekurrente Zahlenreihen.

Nr. 1. Allgemeinste Art der rekurrenten Zahlenreihen . . . . . . 55—56
Nr. 2. Die *Gauss*schen Klammerausdrücke . . . . 56—61
Nr. 3—4. Darstellung einer Zahl als Aggregat von Potenzen der Zwei. Die *Farey*schen Zahlenreihen . . . . 61—67
Nr. 5—6. Rekurrente Zahlenreihen mit unveränderlicher Skala; Fundamentalreihen . . . . 67—72
Nr. 7. Die Reihen zweiter Ordnung (*Lucas*) und ihre Fundamentalreihen
$$R_k = \frac{\alpha_1^k - \alpha_2^k}{\alpha_1 - \alpha_2},\quad S_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k.$$
Die Zahlenreihen von *Fermat*, von *Fibonacci*, von *Dupré* . . 72—76
Nr. 8. Grundformeln für die Eigenschaften der R_k, S_k. Linearformen für die Primteiler derselben . . . . 76—79
Nr. 9. Die Additionsformeln und daraus folgende Teilbarkeitssätze für die R_k, S_k. Eine Formel von *d'Aurifeuille* . . . . . . 79—82

Seite

Nr. 10—11. Eigentliche Teiler der R_k, S_k, Primteiler derselben. Der Satz
$$R_{p-\left(\frac{\Delta}{p}\right)} \equiv 0 \pmod{p};$$
Linearformen der eigentlichen Primteiler von R_π, S_π. Zerlegung von $2^{64}-1$ in Primfaktoren. Periodizität der R_k, S_k in bezug auf einen Primzahlmodulus p . . . . 82—89

Nr. 12. Die Häufigkeit eines Primteilers von R_k. Der allgemeine Kongruenzsatz
$$R_{\chi(m)} \equiv 0 \pmod{m}$$ . . . . 89—91

Nr. 13. Anwendung zur Zerlegung großer Zahlen in Primfaktoren. Die Zahlen $2^n \pm 1$ . . . . 91—93

Nr. 14. *Lucas*' Satz über die Zahlen von der Form $N = 2^{2^\nu}+1$ . . 93—94

Nr. 15. Kriterien von *Pepin* und von *Lucas* für die Primzahleigenschaft gewisser Zahlen . . . . 94—97

Nr. 16. Vollkommene Zahlen. Satz von *Euclid* und von *Euler*. Die *Mersenne*schen Zahlen. Ob auch ungerade vollkommene Zahlen möglich? . . . . 97—101

Drittes Kapitel: Zerfällung einer Zahl in Summanden.

Nr. 1. Zerfällungen verschiedener Art; Zergliederungen . . . . 102—103

Nr. 2. *Eulers* analytische Methode . . . . 103—105

Nr. 3. Die Anzahl der Zergliederungen einer Zahl s in n positive Summanden und in positive Summanden überhaupt . . . 105—108

Nr. 4. Ein *Euler*scher Satz über Zerfällungen . . . . 108—109

Nr. 4a. Seine Verallgemeinerung durch *Schur* . . . . 109—110

Nr. 5. Elementare Zerfällungssätze. Der *Euler*sche Reziprozitätssatz 110—114

Nr. 6. Rekursionsformeln für die Anzahl $C_{n,s}$ der Zerfällungen von s in n verschiedene, für die Anzahl $\Gamma_{n,s}$ der Zerfällungen von s in n gleiche oder verschiedene positive Summanden, und für die Anzahl $\gamma_{n,s}$ ihrer Zerfällungen in Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$ . . . . 114—116

Nr. 6a. Sätze über die Anzahl $c_{n,s}$ der Zerfällungen von s in verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$ . . . . 116—120

Nr. 7. Die $1, 2, 3, \ldots r$-freien Zerfällungen und Zergliederungen einer Zahl s in n gleiche oder verschiedene positive Summanden. *Lamé*sche Zahlenreihen r^{ter} Ordnung . . . . . 120—124

Nr. 8. Der Denumerant $\dfrac{s}{a, b, \ldots l}$. Einfachste Fälle; der Denumerant $\dfrac{s}{a_1, a_2}$ für teilerfremde Elemente a_1, a_2 . . . . . 124—130

Nr. 9. Der Denumerant $\dfrac{s}{a_1, a_2, a_3}$ . . . . 130—133

Nr 10. Der Denumerant als Entwicklungskoeffizient der Funktion
$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)\cdots(1-x^l)};$$
Cayleys Zirkulatoren und Partialbruchzerlegung . . . . . 133—136

Nr. 11. Die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{f(x)}$ . . . . 136—138

Nr. 12. *Cayleys* Ausdruck für den Denumeranten $\dfrac{s}{a, b, \ldots l}$; Beispiele 138—140

Nr. 13—14. *Sylvesters* Bestimmung des Denumeranten $\dfrac{s}{a, b, \ldots l}$. Die Wellen (Waves) desselben . . . . 140—149

Nr. 15. Vergleichung mit *Cayleys* Formel. Beispiel: $\dfrac{s}{1, 2, 3, 4}$ 149—153

Nr. 16. Eine Schlußfolgerung *Sylvesters* . . . . 154—157

Seite

Nr. 17. Der Denumerant $\gamma_{n,s} = \frac{s}{1, 2, 3, \cdots, n}$; Bildungsweise der Reihe $\gamma_{n0}, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{n3}, \cdots$ . . . . 157—161
Nr. 18. Die Schlußreihe Γ: $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ und ihre Zusammensetzung mit sich selbst; ihre Potenzen; die Potenz Γ^{-1} . . 161—162
Nr. 19. Der *Euler-Legendre*sche Pentagonalzahlensatz; Geschichtliches; Ausdruck desselben in *Vahlen*scher Schreibweise. Der Beweis von *Franklin* . . . . 162—167
Nr. 20. Der engere Pentagonalzahlensatz von *Vahlen* und sein Beweis 167—171
Nr. 21. Eine Ergänzung des Beweises. Hinweis auf bezügliche Arbeiten von *von Sterneck* . . . . 171—173
Nr. 22. Folgerungen aus *Vahlens* Satz. Ausdehnung auf den Fall der Polygonalzahlen . . . . 173—177
Nr. 23—25. Untersuchungen von *D. von Sterneck* über die Bedingungen, unter denen die Anzahl gewisser Zerfällungen ungerade ist . . . . 177—183
Nr. 26. Ein additives Kriterium für Primzahlen . . . . 183—185

Viertes Kapitel: Gleichzeitige Zerfällung mehrerer Zahlen.

Nr. 1. Mehrteilige Zahlen und ihre Zerfällung. Die Bestimmung der Anzahl Lösungen zweier Gleichungen
$$s = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots, \quad \sigma = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots$$
in nicht negativen ganzen Zahlen . . . . 185—186
Nr. 2—3. Analytische Methode von *Cayley* für den Fall, daß die korrespondierenden a_i, α_i teilerfremd und die Quotienten $\frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_2}{\alpha_2}, \ldots$ verschieden voneinander sind. *Konnumeranten* . 186—191
Nr. 4—5. Die Anzahl der Zerfällungen von s in σ gleiche oder verschiedene Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n$ . . . . 191—196
Nr. 6. Berechnung zweier Beispiele . . . . 196—198
Nr. 7. Methode von *Faà di Bruno* . . . . 199—204
Nr. 8. Die Anzahl der Zerfällungen aller Zahlen in nicht mehr als r gleiche oder verschiedene Summanden $\overline{\gtrless}\, n$ . . . . . 204—205
Nr. 9. Arithmetische Methoden. *Saduns* Bestimmung der Anzahl der Zerfällungen von s in σ gleiche oder verschiedene Zahlen $1, 2, 3, \ldots, s$ . . . . 205—210
Nr. 10. *Sylvesters* allgemeines Resultat . . . . 210—211
Nr. 11. Die arithmetische Methode *Sylvesters* bei gleichzeitiger Zerfällung zweier Zahlen . . . . 211—213
Nr. 12. Beispiele . . . . 213—216
Nr. 13—14. Rekurrente Behandlung der Zerfällung. Ein Beispiel *Eulers* . . . . 216—219
Nr. 15. Bestimmung des kleinsten Restes einer positiven Zahl n (mod. m) mittels Denumeranten . . . . 219—222

Fünftes Kapitel: Relative Zerfällungen (mod. m).

Nr. 1. Zerfällung einer Zahl n in verschiedene Elemente $e_1, e_2, e_3, \ldots$ (mod. p). Das Elementensystem $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Methode von *Stern* . . . . 222—225
Nr. 2. Anzahl $(n)_i$ der Zerfällungen von n in i verschiedene der gegebenen Elemente; Anzahl $[n]_i$ der Zerfällungen in i gleiche oder verschiedene der Elemente. Zwei allgemeine Rekursionsformeln von *D von Sterneck* . . . . 225—227
Nr. 3. Das Elementensystem $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$ (mod. m) . . 227—229
Nr. 4. Herleitung der Resultate der Nr. 1 . . . . 229—230
Nr 5. Hilfssätze über eine zahlentheoretische Funktion $f(n, d)$. 230—234
Nr. 6. Anzahl der Zerfällungen in i verschiedene der Elemente $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$ (mod. m) . . . . 234—237

Seite

Nr. 7. Anzahl der Zerfällungen in i verschiedene der Elemente $1, 2, 3, \ldots, m-1$ (mod. m), sowie in verschiedene dieser Elemente überhaupt . . . . . 237—241

Nr. 8. Das Elementensystem der $\frac{p-1}{2}$ quadratischen Reste (mod p). Die Anzahlen $(0)_i$, $(\varrho)_i$, $(\nu)_i$. Hilfsbetrachtung . . . . . 241—245

Nr. 9. Die allgemeine Bestimmung der Anzahl $(n)_i$ mittels einer rekursorischen Formel. Anwendung auf die Kreisteilung. Allgemeinere Aufgaben . . . . . 245—248

Nr. 10. Gesamtanzahl der Zerfällungen (der geraden wie der ungeraden) einer Zahl n in verschiedene quadratische Reste (mod. p) überhaupt; ihre Bestimmung mit Hilfe der Kreisteilung nach *Stern* . . . . . 248—252

Nr. 11. Die beiden Fälle $p=4k+3$ und $p=4k+1$ besonders betrachtet 252—255

Nr. 12. Das Elementensystem $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$ (mod. p) Methode von *Stern* . . . . . 255—259

Nr. 13—14. Die Aggregate oder Formen $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm \frac{p-1}{2}$. 259—264

Sechstes Kapitel: Rekursionsformeln.

Nr. 1. Verschiedene zahlentheoretische Funktionen: C_s, $C_s^{(u)}$, Γ_s, $\zeta_m(s)$, $\zeta_1^u(s)$, $\zeta_1^g(s)$, $\delta_1(s) = \zeta_1^u(s) - \zeta_1^g(s)$, $\varrho(s)$ 264—265

Nr. 2. Analytische Methode. Sätze von *Euler, Stern* und *Zeller* betr. C_s, Γ_s . . . . . 265—267

Nr. 3. *Eulers* Formel für die Teilersumme $\zeta_1(s)$ einer Zahl und bezügliche Sätze von *Stern* . . . . . 268—270

Nr. 4. Fortsetzung. Ein Satz von *Glaisher* betr. die Funktion $\delta_1(s)$ 270—273

Nr. 5—6. Arithmetische Methode. Grundformeln von *Vahlen*. Ein bemerkenswerter Zerfällungssatz . . . . . 273—278

Nr. 7. Neue Herleitung früherer Sätze . . . . . 278—280

Nr. 8. Ein Umkehrsatz für zwei zahlentheoretische Funktionen . . 280—281

Nr. 9. Neue Herleitung früherer Sätze . . . . . 281—283

Nr. 10. Die Theorie der elliptischen Funktionen als Quelle solcher Sätze. Zwei Sätze von *Halphèn* für $\zeta_1(s)$ und von *Glaisher* für die Zerfällung einer Zahl in vier und in zwei Quadrate 284—287

Nr. 11. Eine Formel von *Glaisher* betr. die Funktion $\zeta_1(s)$ . . . . 287—288

Nr. 12. Ein mit Nr. 4 analoger Satz betr. die Funktion $\varrho(s)$ und ihre summatorische Funktion $\sigma(s)$ . . . . . 288—292

Nr. 13. Zwei Hilfssätze für die Summe $S_n^{(k)}$ der k^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n$ . . . . . 292—294

Nr. 14. Herleitung eines merkwürdigen Zahlensatzes . . . . . 294—297

Nr. 15. Eine Formel von *Glaisher* für die Funktion $\zeta_n(s)$, durch welche die Summen ungerader Potenzen der Teiler gewisser Zahlen mit den Summen gerader Potenzen der natürlichen Zahlen verbunden werden . . . . . 297—299

Nr. 16—17. Ein zweiter ähnlicher Zahlensatz und zwei neue Formeln für die Funktion $\zeta_n(s)$ von analogem Charakter . . . . . 299—304

Siebentes Kapitel: Zerfällungen in gleichnamige Potenzen.

Nr. 1—2. Zerfällung einer Zahl in zwei Quadrate. Ein der Theorie der quadratischen Formen entnommener Satz über die Anzahl solcher Zerfällungen . . . . . 304—310

Nr. 3—4. *Vahlens* Herleitung dieses Satzes aus Formeln der additiven Zahlentheorie . . . . . 311—319

Nr. 5—6. Über die Anzahl der Darstellungen einer Zahl s in der Form $s = (6\lambda+1)^2 + (6\mu+1)^2 + (6\nu+1)^2$. Darstellbarkeit jeder positiven ganzen Zahl in jeder der Formen $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$, $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ . . . . 319—324

(part)

Seite

Nr. 7. Darstellbarkeit einer Zahl als Summe dreier Quadratzahlen nebst Folgerungen . . . . 324—327
Nr. 8. Darstellbarkeit jeder Zahl durch andere Formen der allgemeinen Gestalt $x^2+Ay^2+Bz^2+ABt^2$ . . . . 327—328
Nr. 9—10. Zerfällbarkeit der Zahlen in Biquadrate; über die kleinste erforderliche Anzahl der letzteren . . . . 328—335
Nr. 11. Zerfällbarkeit der Zahlen in Kuben und die kleinste erforderliche Anzahl der letzteren. Hilfssatz . . . . 335—337
Nr. 12. Methode von *Maillet* und *Fleck* . . . . 337—339
Nr. 13—15. Methode von *Wieferich* . . . . 339—345
Nr. 16. Zerfällbarkeit der Zahlen in 5te, 6te, 8te, 10te Potenzen. Bestätigung einer Vermutung von *Waring* durch *Hilbert* . 345—348
Nr. 17. *Jacobis* Satz über die Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe von vier Quadratzahlen. Beweis von *Dirichlet* . 348—351
Nr. 18. Verallgemeinerung . . . . 352—354
Nr. 19. Beweismethode von *Stern* . . . . 354—358
Nr. 20. Ein Satz von *Liouville* mit dem Beweise von *Stern* . . . 358—363
Nr. 21. Über Zerfällungen einer Zahl in die Summe von drei, fünf und mehr Quadraten . . . . 363—365

Achtes Kapitel: Untersuchungen von *Liouville*.

Nr. 1. Allgemeiner Charakter dieser Untersuchungen . . . . . 365—366
Nr. 2. Eine erste *Liouville*sche Grundformel . . . . 366—369
Nr. 3. Besonderer Ausdruck dieser Formel für ein gerades s. Folgerungen über die Anzahl der Darstellungen von s durch die Formen $x^2+y^2+z^2+t^2,\ x^2+y^2+4z^2+4t^2$ . . . . 369—373
Nr. 4. Weitere Sätze über die Anzahl der Zergliederungen von s in acht Quadrate u. a. . . . . 373—375
Nr. 5. Über die Darstellung des Doppelten einer Primzahl $\tilde{\omega}=8i+3$ in der Form $2\tilde{\omega}=x^2+p^{4\alpha+1}\cdot y^2$ . . . . 375—377
Nr. 6. Der allgemeine Fall der Grundformel . . . . 377—378
Nr. 7. Ein Folgesatz bezüglich der Funktion $\zeta_1(s)$. Satz über die Darstellung einer Primzahl $\tilde{\omega}=16k+7$ in der Form $\tilde{\omega}=2x^2+p^{4\alpha+1}\cdot y^2$ . . . . 379—380
Nr. 8—9. Spezialisierungen der Grundformel. Ein Folgesatz über Zerfällungen in quadratische Formen . . . . 381—385
Nr. 10. Herleitung einer zweiten *Liouville*schen Grundformel . . 385—389
Nr. 11. Besondere Fälle derselben und Folgerungen . . . . . . 389—391
Nr. 12. Eine dritte *Liouville*sche Grundformel . . . . 391—395
Nr. 13. Spezialisierungen derselben . . . . 395—396
Nr. 14. Rekursionsformeln für die Funktion $\zeta_1(s)$, desgleichen eine solche für die Funktion $\varrho(s)$. Satz über die Anzahl der Zerfällungen in drei Quadratzahlen . . . . 397—400
Nr. 15. Eine Beziehung zwischen den Funktionen $\varrho(s)$ und $\zeta_1(s)$ und ihre Deutung . . . . 400—403
Nr. 16—17. Eine vierte *Liouville*sche Grundformel . . . . . . 403—407
Nr. 18. Spezialisierungen derselben und Folgesätze . . . . . . 407—409
Nr. 19. Die Funktionen $\varrho(u)$, $\varrho'(u)$, $\varrho''(u)$, welche die Anzahl der Darstellungen einer ungeraden Zahl u durch die Formen $x^2+y^2,\ x^2+2y^2,\ x^2+3y^2$ ausdrücken . . . . 409—411
Nr. 20. Anwendung der *Liouville*schen Formeln zur Bestimmung der Anzahl der Darstellungen einer Zahl durch quaternäre quadratische Formen. Anzahl der Darstellungen durch die Form $x^2+y^2+2z^2+2t^2$ . . . . 411—415
Nr. 21. Anzahl der Darstellungen durch die Form $x^2+y^2+4z^2+4t^2$ . . . . 415—417

Seite

Nr. 22. Anzahl der Darstellungen durch die Form $x^2+y^2+4z^2+8t^2$ . . . . 417—419

Nr. 23. Anzahl der Darstellungen durch die Form $x^2+y^2+3z^2+3t^2$. Über die Form $x^2+2y^2+3z^2+6t^2$ . . . . 419—423

Nr. 24. Zusammenhang zwischen der Klassenanzahl binärer quadratischer Formen mit der Determinante $-n$ und der Anzahl gewisser Lösungen der unbestimmten Gleichung $4z^2-u(u+4d)=-n$ . . . . 423—428

Nr. 25—26. Herleitung einer der *Kronecker*schen Rekursionsformeln für die Klassenanzahl . . . . 428—433

Neuntes Kapitel: Die Gleichung $x^n+y^n=z^n$.

Nr. 1—2. Ganzzahlige Auflösung der Gleichung $x^2+y^2=z^2$ . . . . 433—437

Nr. 3. Die Gesamtheit der rechtwinkligen rationalen Dreiecke . . 437—438

Nr. 4—5. Die Gesamtheit der rationalen Dreiecke überhaupt . . 438—442

Nr. 6. Ein Hilfssatz über rationale Vierecke . . . . 442—443

Nr. 7—8. *Kummers* Bestimmung aller rationalen Vierecke . . . 443—447

Nr. 9. Behandlung der dabei auftretenden Aufgabe, den Ausdruck $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ zu einem Quadrate zu machen, nach *Fermat* und *Euler* . . 447—449

Nr. 10. Der „große *Fermat*sche Satz“ oder das „letzte Theorem *Fermats*“: Behauptung der Unlösbarkeit der Gleichung $x^p+y^p=z^p$ in ganzen Zahlen, falls $p>2$ . . . . 449—451

Nr. 11. *Fermats* Methode; der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit ganzzahligen Seiten ist keine Quadratzahl . . . . . 451—452

Nr. 12. Unmöglichkeit der Gleichungen $x^4-y^4=z^2$; $x^4+y^4=z^2$. 452—454

Nr. 13. Unmöglichkeit der Gleichung $x^3+y^3=z^3$ nach *Euler* und *Legendre* . . . . 454—458

Nr. 14. Unmöglichkeit der Gleichungen $x^5+y^5=z^5$, $x^7+y^7=z^7$ nach *Dirichlet* und *Lamé*, *Lebesgue* . . . . 458—459

Nr. 15. Eingreifen der Körpertheorie in die Betrachtungen; das allgemeine Ergebnis *Kummers* . . . . 460—461

Nr. 16. Untersuchung der allgemeinen Gleichung $x^p+y^p=z^p$ für den Fall eines Primzahlgrades p. Vorbetrachtungen . . . 461—464

Nr. 17. Herleitung der sogenannten *Abel*schen Formeln. Zwei verschiedene Fälle. Zwei Bemerkungen von *Sophie Germain* . 465—468

Nr. 18. Erörterung des ersten Falles. Ein Satz von *E. Wendt* bezüglich der Unmöglichkeit der Gleichung $x^p+y^p+z^p=0$ in ganzen durch p nicht teilbaren Zahlen . . . . 468—471

Nr. 19. Dieser Satz ist gleichbedeutend mit einem schon von *Legendre* nach *Sophie Germain* ausgesprochenen Satze . . . . . . 471—472

Nr. 20. Erörterung des zweiten Falles. Gesamtergebnis . . . . . 472—474

Nr. 21. Schlußfolgerungen aus demselben . . . . 474—476

Zusätze . . . . 477—480

Berichtigungen.

Seite 15 Zeile 16 v. u. lies $(-1)^i \cdot a''$ statt $(-1^i a)''$.

„ 23 „ 14 lies $-n^k$ statt $-n$.

„ 113 Formel (28) lies $n \cdot a_n'$ statt $n \cdot a_n$.

„ 149 „ (118) lies a statt α.

„ 221 Zeile 7 v. u. lies Den. $S_v'(\bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, w)$ statt Den $S_v'(z, \bar{u}, \bar{v}, w)$.

Erstes Kapitel.

Bildung von Zahlen auf additivem Wege.

1. Die additive Zahlentheorie, deren Darstellung dieser Band gewidmet ist, betrachtet diejenigen Eigenschaften und Beziehungen der ganzen Zahlen, welche aus ihrer additiven Verknüpfung zu neuen Zahlen hervorgehen.

Die all unseren Untersuchungen zugrunde liegende natürliche Zahlenreihe selbst entsteht durch eine stets wiederholte additive Verknüpfung der Einheit mit sich selbst; so findet man die aufeinander folgenden Zahlen

$$(1) \qquad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

Verbindet man dagegen mit der Einheit in steter Wiederholung die zwei, dann die drei, usw., so entsteht die Reihe der ungeraden Zahlen:

$$(2) \qquad 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots,$$

dann die Reihe

$$(3) \qquad 1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots$$

usw. fort. Um das allgemeine Gesetz dieser zunächst sich darbietenden additiven Zahlenverbindungen zum Ausdruck zu bringen, betrachte man allgemein die Reihe der Zahlen

$$(4) \qquad a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,$$

welche aus einer anfänglichen Zahl a durch stets wiederholte Addition einer gegebenen Zahl d hervorgehen, so daß allgemein

$$(5) \qquad a_i = a_{i-1} + d$$

$$(\text{für } i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Eine solche Formel, durch welche jedes Glied a_i einer Zahlenreihe mittels vorhergehender Glieder derselben ausgedrückt wird, heißt eine Rekursionsformel; die Formel (5) ist die einfachste und ursprünglichste Art derselben, die sich aufstellen läßt. Die Zahlenreihe (4) aber, welche nach dieser Formel (5) gebildet wird, heißt eine arithmetische Reihe, a ihr Anfangs-

glied, d ihre Differenz. Offenbar folgt aus (5) das allgemeine Glied a_i durch diese Gegebenen ausgedrückt mittels der Formel:

$$a_i = a + id. \tag{6}$$

Es liegt sehr nahe, nun eine Anzahl aufeinander folgender, etwa die ersten n-Zahlen der Reihe (4) additiv zu verknüpfen, d. h. die Summe zu bilden

$$S_n = a + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}. \tag{7}$$

Schreibt man, um ihren Wert zu ermitteln, mit umgekehrter Folge der Summanden

$$S_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a$$

und bemerkt, daß zwei untereinander stehende Glieder

$$a_i = a + id, \quad a_{n-i-1} = a + (n - i - 1)d$$

die Summe $2a + (n-1)d$ ergeben, so findet sich sogleich

$$2S_n = 2na + n(n-1)d,$$

also die gesuchte Summe

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d. \tag{8}$$

Aus dieser allgemeinen Formel erhält man, wenn $a = 1$ gewählt wird, für $d = 1, 2, 3, \ldots$ die Gleichungen:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{8a}$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2, \tag{8b}$$

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}, \tag{8c}$$

. . . .

Die Zahlen von den so gefundenen Formen, d. h. die Zahlen, welche man aus den hier zur Rechten stehenden allgemeinen Ausdrücken erhält, wenn man darin sukzessive n gleich $1, 2, 3, \ldots$ annimmt, haben einen besonderen Namen erhalten; sie werden insgesamt Polygonalzahlen genannt, insbesondere heißen die Zahlen der ersten Form:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots$$

die Trigonal- oder Dreieckszahlen, die der zweiten Form:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

die Quadratzahlen, die der dritten Form:

$$1, 5, 12, 22, 35, 51, \ldots$$

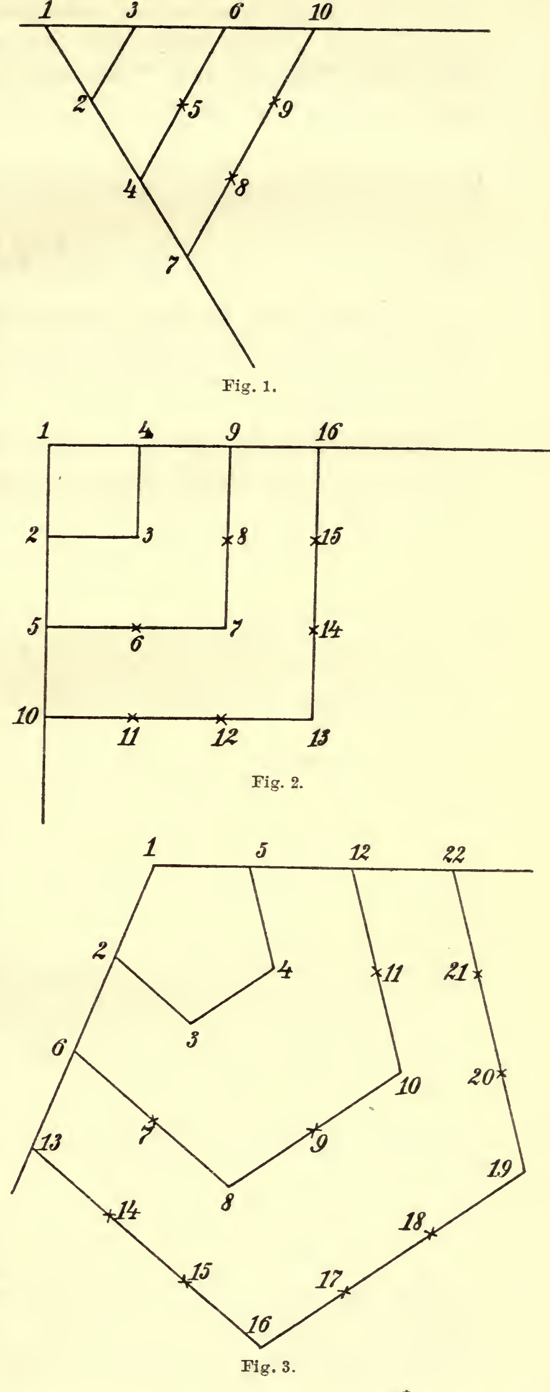
die Pentagonal- oder Fünfeckszahlen, usw. Setzt man in (8) für a, d bez. 1 und $r-2$, so gibt die Formel

(8d) $$S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (r-2)$$

die sogenannten r-Eckszahlen.

Der Grund dieser, schon im Altertum gebräuchlichen Bezeichnungen, kann in dem Umstande gefunden werden, daß die bezeichneten Zahlen zum Vorschein kommen, wenn die Reihe der natürlichen Zahlen auf polygone Weise angeordnet wird, wie folgt:

Man denke an eine Horizontallinie gleichseitige Dreiecke angetragen, deren gemeinsame Spitze in ihr liegt, während deren Seiten sukzessive gleich 1, 2, 3, ... Einheiten sind, und bezeichne die Endpunkte der der Einheit gleichen Strecken auf den Seiten dieser Dreiecke durch die aufeinander folgenden Zahlen, so kommen allmählich zur ersten Zahl 1 die zwei folgenden, dazu die drei folgenden, usw. hinzu; daher stellen dann die auf die Horizontale fallenden Zahlen die aufeinander folgenden Dreieckszahlen dar. Eine ähnliche Anordnung nach Quadraten, Fünfecken usw., führt auf der Horizontallinie, wie die beigefügten Zeichnungen anschauen lassen, die Quadratzahlen, die Fünfeckszahlen usw. herbei.



Die Polygonalzahlen waren, wenigstens in ihren einfachsten Arten als Trigonal- und Quadratzahlen bereits den Pythagoräern bekannt, und schon *Plutarch* und *Nikomachus* (1. Jahrh. nach Chr.) führen auch die Sätze an, welche in den beiden einfachen Formeln

$$8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = (2n+1)^2, \tag{9a}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2 \tag{9b}$$

ihren algebraischen Ausdruck haben, wonach also das Achtfache jeder Trigonalzahl um eins vermehrt eine ungerade Quadratzahl und die Summe je zweier aufeinander folgender Trigonalzahlen stets eine Quadratzahl ist.

Setzt man in (8b) für n zwei aufeinander folgende Trigonalzahlen $\frac{i(i-1)}{2}$, $\frac{i(i+1)}{2}$, so finden sich die Gleichungen:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + \left(2 \cdot \frac{i(i-1)}{1} - 1\right) = \left(\frac{i(i-1)}{2}\right)^2,$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + \left(2 \cdot \frac{i(i+1)}{2} - 1\right) = \left(\frac{i(i+1)}{2}\right)^2,$$

deren Differenz die folgende ergibt:

$$\left(2 \cdot \frac{i(i-1)}{2} + 1\right) + \left(2 \cdot \frac{i(i-1)}{2} + 3\right) + \cdots + \left(2 \cdot \frac{i(i-1)}{2} + 2i - 1\right)$$

d. i.:

$$(i^2 - i + 1) + (i^2 - i + 3) + \cdots + (i^2 - i + 2i - 1) = i^3,$$

also für $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$ der Reihe nach

$$\begin{aligned} 1 &= 1^3, \\ 3 + 5 &= 2^3, \\ 7 + 9 + 11 &= 3^3, \\ 13 + 15 + 17 + 19 &= 4^3, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Summe der ersten i Kubikzahlen die Formel:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + i^3 = \left(\frac{i(i+1)}{2}\right)^2. \tag{10}$$

2. Die Zahlen der arithmetischen Reihe (4) haben der Formel (5) gemäß die Eigenschaft, daß die Differenz je zweier aufeinander folgender Zahlen ein- und dieselbe ist. Betrachtet man dagegen irgendwelche Reihe von ganzen Zahlen

(11) $$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \dots$$

und setzt allgemein die Differenz zweier aufeinander folgenden Glieder derselben:

(12) $$a_{i+1} - a_i = \Delta^{(1)} a_i,$$

so wird die Reihe dieser Differenzen, die sogenannte erste Differenzreihe

$$\Delta^{(1)} a,\quad \Delta^{(1)} a_1,\quad \Delta^{(1)} a_2,\quad \Delta^{(1)} a_3, \dots$$

eine neue Zahlenreihe sein, deren Glieder im allgemeinen verschieden voneinander sind. Setzt man daher dann wieder die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern derselben

(13) $$\Delta^{(1)} a_{i+1} - \Delta^{(1)} a_i = \Delta^{(2)} a_i,$$

so gewinnt man eine dritte Zahlenreihe, die zweite Differenzreihe

$$\Delta^{(2)} a,\quad \Delta^{(2)} a_1,\quad \Delta^{(2)} a_2,\quad \Delta^{(2)} a_3, \dots$$

usw., allgemein also, wenn

(14) $$\Delta^{(n-1)} a_{i+1} - \Delta^{(n-1)} a_i = \Delta^{(n)} a_i$$

gesetzt wird, die n^{te} Differenzreihe

$$\Delta^{(n)} a,\quad \Delta^{(n)} a_1,\quad \Delta^{(n)} a_2,\quad \Delta^{(n)} a_3, \dots$$

Geschieht es hierbei, daß eine Differenzreihe aus lauter gleichen Zahlen gebildet ist, so wird die folgende und jede weitere aus Nullen bestehen, und umgekehrt muß der ersten aus Nullen bestehenden Differenzreihe eine aus gleichen Zahlen zusammengesetzte, und dieser folglich eine arithmetische Reihe voraufgehen. Wäre dabei zuerst die $n+1^{\text{te}}$ Differenzreihe der Reihe aus Nullen zusammengesetzt, so würde die Reihe (11) eine arithmetische Reihe n^{ter} Ordnung genannt werden. So ist die Reihe der Polygonalzahlen jeder Art eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, denn die Differenz zwischen der $n+1^{\text{ten}}$ und der n^{ten} r-Eckszahl beträgt nach Formel (8d)

$$\Delta^{(1)} S_n = 1 + n(r-2),$$

daher findet sich

$$\Delta^{(2)} S_n = r - 2,$$

also

$$\Delta^{(3)} S_n = 0.$$

Zufolge (14) bestehen die Gleichungen

$$(14a)\quad \begin{cases} \Delta^{(n-1)} a_1 = \Delta^{(n-1)} a + \Delta^{(n)} a \\ \Delta^{(n-1)} a_2 = \Delta^{(n-1)} a_1 + \Delta^{(n)} a_1 \\ \Delta^{(n-1)} a_3 = \Delta^{(n-1)} a_2 + \Delta^{(n)} a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

welche lehren, daß man die $n-1^{\text{te}}$ Differenzreihe aus der n^{ten} findet, sobald noch das Anfangsglied der ersteren gegeben wird. Entsprechend dieser Beziehung bilden wir jetzt aus der ursprünglichen Reihe (11) eine andere, die wir mit

$$(15)\quad \overset{(1)}{\sum} a,\quad \overset{(1)}{\sum} a_1,\quad \overset{(1)}{\sum} a_2,\quad \overset{(1)}{\sum} a_3,\quad \ldots$$

bezeichnen wollen, die erste Summenreihe, indem wir deren Anfangsglied willkürlich gegeben denken, mittels der mit (14a) analogen Gleichungen:

$$(15a)\quad \begin{cases} \overset{(1)}{\sum} a_1 = \overset{(1)}{\sum} a + a \\ \overset{(1)}{\sum} a_2 = \overset{(1)}{\sum} a_1 + a_1 \\ \overset{(1)}{\sum} a_3 = \overset{(1)}{\sum} a_2 + a_2 \\ \ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

desgleichen aus (15) wieder eine neue Reihe, die zweite Summenreihe

$$(16)\quad \overset{(2)}{\sum} a,\quad \overset{(2)}{\sum} a_1,\quad \overset{(2)}{\sum} a_2,\quad \overset{(2)}{\sum} a_3,\quad \ldots,$$

indem wir deren Anfangsglied $\overset{(2)}{\sum} a$ willkürlich annehmen, mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} \overset{(2)}{\sum} a_1 &= \overset{(2)}{\sum} a + \overset{(1)}{\sum} a \\ \overset{(2)}{\sum} a_2 &= \overset{(2)}{\sum} a_1 + \overset{(1)}{\sum} a_1 \\ \overset{(2)}{\sum} a_3 &= \overset{(2)}{\sum} a_2 + \overset{(1)}{\sum} a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

usw. Werden dann, wie es Tafel I erkennen läßt:

Tafel I.

...	$\Delta^{(2)}a$	$\Delta^{(1)}a$	a	$\overset{(1)}{\sum} a$	$\overset{(2)}{\sum} a$	...
...	$\Delta^{(2)}a_1$	$\Delta^{(1)}a_1$	a_1	$\overset{(1)}{\sum} a_1$	$\overset{(2)}{\sum} a_1$	...
...	$\Delta^{(2)}a_2$	$\Delta^{(1)}a_2$	a_2	$\overset{(1)}{\sum} a_2$	$\overset{(2)}{\sum} a_2$	...
...	$\Delta^{(2)}a_3$	$\Delta^{(1)}a_3$	a_3	$\overset{(1)}{\sum} a_3$	$\overset{(2)}{\sum} a_3$	...
...	.	.	.	.	.	...

in einer mittleren Spalte die Glieder der anfänglichen Reihe untereinander gesetzt, in Spalten zur Linken die Glieder der aufeinander folgenden Differenzreihen, in solchen zur Rechten die Glieder der aufeinander folgenden Summenreihen, so haben die in dieser Tafel zusammengestellten Zahlen zueinander die ausgezeichnete Beziehung, daß jede Zahl die Summe ist aus der über ihr und der neben der letztern linksstehenden Zahl. In der Tat bestehen die folgenden Gleichungen:

$$\overset{(n)}{\sum} a_{i+1} = \overset{(n)}{\sum} a_i + \overset{(n-1)}{\sum} a_i$$

$$\overset{(1)}{\sum} a_{i+1} = \overset{(1)}{\sum} a_i + a_i$$

$$a_{i+1} = \qquad a_i + \Delta^{(1)} a_i$$

$$\Delta^{(n-1)} a_{i+1} = \Delta^{(n-1)} a_i + \Delta^{(n)} a_i,$$

welche diesen Satz zum Ausdruck bringen. Kommt man überein,

$$\Delta^{(n)} a_i = \overset{(-n)}{\sum} a_i$$

und

$$a_i = \overset{(0)}{\sum} a_i = \Delta^{(0)} a_i$$

zu setzen, so lassen sich die vorstehenden Formeln in die einzige, dann für jeden ganzzahligen Wert von n geltende erste derselben:

$$\overset{(n)}{\sum} a_{i+1} = \overset{(n)}{\sum} a_i + \overset{(n-1)}{\sum} a_i \tag{17}$$

zusammenfassen. Aus ihr aber ergibt sich allgemein

$$\overset{(n)}{\sum} a_i = \overset{(n)}{\sum} a + \left(\overset{(n-1)}{\sum} a + \overset{(n-1)}{\sum} a_1 + \ldots + \overset{(n-1)}{\sum} a_{i-1}\right), \tag{18}$$

insbesondere also

$$\overset{(1)}{\sum} a_i = \overset{(1)}{\sum} a + (a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1}) \tag{18a}$$

$$(\text{für } i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$$

In der gedachten Tafel ist also jedes Glied um das willkürliche Anfangsglied der Spalte, in welcher es sich befindet, größer als die Summe der ihm vorangehenden Glieder der links benachbarten Spalte. Beachtet man, daß die Glieder jeder Spalte die erste Differenzreihe für die Glieder der rechts benachbarten Spalte sind, so läßt sich der ausgesprochene Satz auch folgendermaßen fassen:

Aus der ersten Differenzreihe bestimmt sich das allgemeine Glied der zugehörigen Zahlenreihe als die Summe der ihm in jener voraufgehenden Glieder plus einer Konstanten, welche das willkürlich bleibende Anfangsglied der Zahlenreihe repräsentiert.

3. Wählt man z. B., unter h eine positive ganze Zahl verstehend,

$$\overset{(1)}{\sum} a_i = \frac{i(i+1)(i+2)\ldots(i+h)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (h+1)},$$

so ergibt sich $\overset{(1)}{\sum} a_{i+1} - \overset{(1)}{\sum} a_i$, d. h. a_i gleich

$$\frac{(i+1)(i+2)\cdots(i+h)}{1\cdot 2\cdots h},$$

also, da $\overset{(1)}{\sum} a = 0$ ist, aus (18a) für $i = n$ nachstehende Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots h}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h} + \frac{2\cdot 3\cdots(1+h)}{1\cdot 2\cdots h} + \frac{3\cdot 4\cdots(2+h)}{1\cdot 2\cdots h} + \cdots + \frac{n(n+1)\cdots(n+h-1)}{1\cdot 2\cdots h} \\ &\qquad = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+h)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(h+1)}. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Wird allgemein

$$F_n^{(h)} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+h-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h} \tag{20}$$

gesetzt, so nimmt sie diese Gestalt an:

$$F_1^{(h)} + F_2^{(h)} + \cdots + F_n^{(h)} = F_n^{(h+1)}. \tag{19a}$$

Die durch die Formel (20) definierten Zahlen werden die figurierten Zahlen h^{ter} Ordnung genannt; diejenigen erster Ordnung sind die

Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, die der zweiten Ordnung die Trigonalzahlen. Die Gleichung (19a) aber spricht den schon *Fermat* (Observationes zum *Diophant* Nr. 46) bekannten Satz aus:

Die n^{te} figurierte Zahl der $h+1^{\text{ten}}$ Ordnung ist die Summe der ersten n figurierten Zahlen der h^{ten} Ordnung.

So entstehen, wenn man sukzessive $h = 1, 2, 3, \ldots$ wählt, folgende besonderen, von *Fermat* angegebenen Gleichungen:

$$(21)\qquad \begin{cases} 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}, \\ 1+3+6+\cdots+\dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \\ 1+4+10+\cdots+\dfrac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \end{cases}$$

usw. Da sich aus der Formel (9b) der Nr. 1 die Gleichungen finden:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 0+1, \\ 2^2 &= 1+3, \\ 3^2 &= 3+6, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ n^2 &= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

so gibt die zweite der Formeln (21) noch die folgende neue:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

oder vereinfacht:

$$(22)\qquad 1^2+2^2+3^2\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dieser Ausdruck bestimmt z. B. die Anzahl der Kugeln in einem Kugelhaufen mit quadratischer Basis, wenn die Seite des Quadrates, ebenso der zweite der Ausdrücke (21) die Anzahl der Kugeln in einem Haufen mit gleichseitig dreieckiger Basis, wenn die Dreiecksseite n Kugeln enthält.

Aus (22) findet sich für $n = 2m+1$:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2m)^2+(2m+1)^2 = \frac{(2m+1)(2m+2)(4m+3)}{6},$$

ferner:

$$2^2+4^2+\cdots(2m)^2 = 4(1^2+2^2+\cdots+m^2) = \frac{(2m+2)(2m+1)2m}{6};$$

durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorigen kommt:

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2m+1)^2 = \frac{(2m+3)(2m+2)(2m+1)}{6}$$

Da nun allgemein

$$(n+1)n(n-1) = n^3 - n$$

ist, liefern die vorstehenden Gleichungen folgende zwei Formeln

$$\text{(22a)} \qquad \begin{cases} (2m+1)^3 = 2m+1+6[2^2+4^2+\cdots+(2m)^2], \\ (2m+2)^3 = 2m+2+6[1^2+3^2+\cdots+(2m+1)^2]. \end{cases}$$

Der allgemeinen Formel (20) zufolge ist

$$F_{n+1}^{(h)} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+h)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h},$$

wofür symmetrischer sich schreiben läßt:

$$\text{(23)} \qquad F_{n+1}^{(h)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+h)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n}.$$

Dieser Ausdruck ist stets einer ganzen Zahl gleich, wie aus elementaren Sätzen der Teilbarkeit gefolgert werden kann (s. Bd. I, S. 56). Auch kombinatorische Betrachtungen ergeben dasselbe, denn jener Ausdruck bezeichnet die Anzahl der Arten, wie $m = n + h$ Elemente ohne Rücksicht auf ihre Anordnung in zwei Gruppen von n und von h Elementen verteilt werden können. Aus dieser kombinatorischen Bedeutung des Ausdrucks und aus der Bedeutung der Potenz $(\alpha+\beta)^m$ als eines Produkts von m-Faktoren $\alpha+\beta$ geht sofort die binomische Entwickelung, nämlich die Gleichheit

$$(\alpha+\beta)^m = \sum \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{1\cdot 2\cdots n\cdot 1\cdot 2\cdots h}\cdot \alpha^n\beta^h$$

hervor, in welcher die Summation über alle positiven ganzen Zahlen n, h einschließlich der Null zu erstrecken ist, deren Summe gleich m ist; insbesondere wird mithin

$$\text{(24)} \qquad (1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}\cdot x + \binom{m}{2}\cdot x^2 + \cdots + \binom{m}{m}\cdot x^m,$$

wo zur Abkürzung der Binomialkoeffizient

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{1\cdot 2\cdots n\cdot 1\cdot 2\cdots h}$$

mit $\binom{m}{h}$ bezeichnet worden ist. Da in demselben $m = n + h$ zu denken ist, schließt man aus der Symmetrie desselben in bezug auf n und h die Gleichungen:

$$\text{(25)} \qquad \binom{m}{h} = \binom{m}{n} = \binom{m}{m-h};$$

zudem ist immer

$$\text{(25a)} \qquad \binom{m}{0} = 1, \quad \binom{m}{m} = 1.$$

Das allgemeine Induktionsverfahren gestattet die binomische Entwickelung (24) auch ohne das Hilfsmittel der Kombinationslehre zu bestätigen. Nehmen wir in der Tat an, diese Entwickelung sei bereits als richtig anerkannt bis zum m^{ten} Grade, so ergibt sich daraus durch Multiplikation mit $1+x$ und Entwickelung der rechten Seite nach Potenzen von x nachfolgende Gleichung:

$$(1+x)^{m+1} = 1 + \left\{\binom{m}{1} + 1\right\} \cdot x + \cdots + \left\{\binom{m}{h} + \binom{m}{h-1}\right\} x^h + \cdots$$
$$+ \left\{\binom{m}{m} + \binom{m}{m-1}\right\} \cdot x^m + \binom{m}{m} \cdot x^{m+1}$$

Nun ist aber, wenn $m = n + h$ gedacht wird,

$$\binom{m}{h} + \binom{m}{h-1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{1 \cdot 2 \cdots h \cdot 1 \cdot 2 \cdots n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{1 \cdot 2 \cdots (h-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n+1)}$$
$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{1 \cdot 2 \cdots (h-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdots n}\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \cdot (m+1)}{1 \cdot 2 \cdots h \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n+1)},$$

d. h. es besteht die allgemeine Beziehung:

$$\binom{m}{h} + \binom{m}{h-1} = \binom{m+1}{h}, \tag{25b}$$

und da ferner $\binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1} = 1$ ist, nimmt die obige Gleichung die Gestalt an

$$(1+x)^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1} \cdot x + \binom{m+1}{2} \cdot x^2 + \cdots + \binom{m+1}{m+1} \cdot x^{m+1}$$

und bestätigt so das allgemeine Stattfinden der Binomialformel (24) für jeden positiven ganzen Exponenten m, da sie offenbar für $m = 1$ besteht.

Schreibt man die Binomialkoeffizienten der aufeinander folgenden Potenzen

$$(1+x)^0, \quad (1+x)^1, \quad (1+x)^2, \quad (1+x)^3, \ldots$$

wie folgt, untereinander:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \;.\; 1 \\ 1 \;.\; 2 \;.\; 1 \\ 1 \;.\; 3 \;.\; 3 \;.\; 1 \\ 1 \;.\; 4 \;.\; 6 \;.\; 4 \;.\; 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}$$

so entsteht ein dreieckiges System von Zahlen, welches als das Tartagliasche Dreieck bezeichnet zu werden pflegt Zu einer anderen Anordnung aber führt die obige Beziehung (25b). Da der Binomial-

koeffizient $\binom{m}{h}$ nur für die Werte des Index h, welche $\leqq m$ sind, definiert ist, so gilt diese Beziehung auch nur für $h \leqq m$. Kommt man jedoch überein, $\binom{m}{h} = 0$ zu setzen, sooft $h > m$ d. i. $m < h$ ist, so wird ihre Gültigkeit auf alle positiven Werte des Index h ausgedehnt. Dann lehrt aber eine Vergleichung dieser Formel mit der Formel (17), daß die Wertreihe

$$\binom{0}{n} = 0,\ \binom{1}{n} = 0, \ldots, \binom{n-1}{n} = 0,\ \binom{n}{n} = 1,\ \binom{n+1}{n},\ \binom{n+2}{n}, \ldots$$

die erste Summenreihe von der folgenden Reihe ist:

$$\binom{0}{n-1} = 0,\ \binom{1}{n-1} = 0, \ldots, \binom{n-1}{n-1} = 1,\ \binom{n}{n-1},\ \binom{n+1}{n-1},\ \binom{n+2}{n-1}, \ldots$$

Stellt man also die Tafel auf:

Tafel II.

$$\begin{array}{llllllllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & . & . & . & \binom{m}{m} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

in welcher die Glieder der aufeinander folgenden Spalten die Binomialkoeffizienten

$$\binom{0}{i},\ \binom{1}{i},\ \binom{2}{i},\ \binom{3}{i}, \ldots$$
$$\text{für } i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

darstellen, so kommt den Zahlen dieser Tafel offenbar die gleiche charakteristische Eigenschaft zu, wie den Zahlen der Tafel I: jede von ihnen ist die Summe aus der über ihr und der neben dieser links stehenden Zahl. Das so sich bildende Zahlendreieck, in welchem die einzelnen Horizontalreihen die Binomialkoeffizienten der aufeinander folgenden Potenzen enthalten, wird das Pascalsche Dreieck genannt. Entsprechend der Formel (18) wird jede Zahl dieses Dreiecks, da das Anfangsglied in jeder Spalte gleich Null ist, gleich der Summe der in der links be-

nachbarten Spalte ihr voraufgehenden Zahlen, nämlich allgemein [vgl. (19a)]

$$(26)\qquad \binom{m}{h} = \binom{1}{h-1} + \binom{2}{h-1} + \binom{3}{h-1} + \cdots + \binom{m-1}{h-1}$$

sein. Summiert man andererseits die Gleichungen, welche aus (25b) für $h = 1, 2, \ldots, m+1$ hervorgehen, so findet man ohne Mühe die Beziehung

$$2\left[1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m}\right] = 1 + \binom{m+1}{1} + \binom{m+1}{2} + \cdots + \binom{m+1}{m+1},$$

d. h. die Summe aller Glieder in einer Horizontalreihe des Pascalschen Dreiecks ist doppelt so groß, wie die Summe aller Glieder in der nächst vorhergehenden. Da nun diese Summe für die zweite Horizontalreihe gleich 2^1 ist, so findet sich allgemein die Gleichung

$$(26\text{a})\qquad 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m} = 2^m,$$

welche auch unmittelbar aus der binomischen Entwickelung (24) hervorgeht, wenn darin für x die Einheit gesetzt wird. Da dieselbe Entwickelung, wenn $x = -1$ gesetzt wird, die Gleichung

$$(26\text{b})\qquad 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} = 0$$

ergibt, so finden sich durch Verbindung mit der vorigen die beiden anderen:

$$(26\text{c})\qquad 1 + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \cdots = 2^{m-1}$$

$$(26\text{d})\qquad \binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \cdots = 2^{m-1}.$$

Bildet man dagegen aus (25b) die folgende Reihe entsprechender Gleichungen:

$$\binom{m-1}{h-1} + \binom{m-1}{h-2} = \binom{m}{h-1}$$

$$\binom{m-2}{h-2} + \binom{m-2}{h-3} = \binom{m-1}{h-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{m-h+1}{1} + 1 = \binom{m-h+2}{1},$$

um sie zur Gleichung (25b) zu addieren, so ergibt sich die Formel

$$(27)\quad 1 + \binom{m-h+1}{1} + \binom{m-h+2}{2} + \cdots + \binom{m-1}{h-1} + \binom{m}{h} = \binom{m+1}{h},$$

d. h. der Satz: Jede Zahl im Pascalschen Dreiecke ist gleich der Summe der Zahlen, welche die von der voraufgehenden Zahl der gleichen Spalte aus nach links aufsteigende Parallele zur Hypotenuse repräsentieren. Z. B. ist

$$10 = 6 + 3 + 1, \quad 10 = 4 + 3 + 2 + 1.$$

4. Kehren wir noch einmal zu den Differenzreihen zurück. Aus

$$a_1 = a + \Delta^{(1)} a, \quad a_2 = a_1 + \Delta^{(1)} a_1$$

findet sich wegen $\Delta^{(1)} a_1 = \Delta^{(1)} a + \Delta^{(2)} a$ die Gleichung

$$a_2 = a + 2\Delta^{(1)} a + \Delta^{(2)} a;$$

aus der entsprechenden Gleichung

$$a_3 = a_1 + 2\Delta^{(1)} a_1 + \Delta^{(2)} a_1$$

kommt weiter, wenn man bemerkt, daß $\Delta^{(2)} a_1 = \Delta^{(2)} a + \Delta^{(3)} a$ ist,

$$a_3 = a + 3\Delta^{(1)} a + 3\Delta^{(2)} a + \Delta^{(3)} a.$$

Diese Formeln für a_1, a_2, a_3 lassen ein gemeinsames Gesetz erkennen, welches für a_i den Ausdruck ergeben würde:

$$(28) \qquad a_i = a + \binom{i}{1} \cdot \Delta^{(1)} a + \binom{i}{2} \cdot \Delta^{(2)} a + \cdots + \binom{i}{i} \cdot \Delta^{(i)} a;$$

durch allgemeine Induktion läßt es sich beweisen. Denn, setzt man entsprechend

$$a_{i+1} = a_1 + \binom{i}{1} \cdot \Delta^{(1)} a_1 + \binom{i}{2} \cdot \Delta^{(2)} a_1 + \cdots + \binom{i}{i} \cdot \Delta^{(i)} a_1$$

und bemerkt, daß allgemein $\Delta^{(n)} a_1 = \Delta^{(n)} a + \Delta^{(n+1)} a$ ist, so kommt

$$a_{i+1} = a + \left(\binom{i}{1} + 1\right) \cdot \Delta^{(1)} a + \left(\binom{i}{2} + \binom{i}{1}\right) \cdot \Delta^{(2)} a + \cdots + \binom{i}{i} \cdot \Delta^{i+1} a,$$

d. h. der Beziehung (25b) zufolge

$$a_{i+1} = a + \binom{i+1}{1} \cdot \Delta^{(1)} a + \binom{i+1}{2} \cdot \Delta^{(2)} a + \cdots + \binom{i+1}{i+1} \cdot \Delta^{i+1} a,$$

das allgemeine Gesetz ist mithin bestätigt, da es für die ersten Werte 1, 2, 3 des Index i bereits festgestellt worden war. Man kann dies Gesetz in symbolischer Form einfacher schreiben, wie folgt:

$$(28\text{a}) \qquad a_i = (1 + \Delta a)^{(i)},$$

wo zur Rechten die i^{te} Potenz des Binoms $1 + \Delta a$ entwickelt, dann aber für $(\Delta a)^n$ die Differenz $\Delta^{(n)} a$, für $1 = (\Delta a)^0$ aber a zu denken ist. Nach diesem Gesetze läßt sich also jedes Glied der betrachteten Zahlenreihe (11) aus dem Anfangsgliede der Reihe und den Anfangsgliedern ihrer verschiedenen Differenzreihen bilden.

Umgekehrt folgt aus

$$a_1 = a + \Delta^{(1)} a, \quad a_2 = a_1 + \Delta^{(1)} a_1$$

die Gleichung

$$a_2 - 2a_1 + a = \Delta^{(2)} a$$

und, wenn diese mit der gleichgebildeten

$$a_3 - 2a_2 + a_1 = \Delta^{2)} a_1$$

verbunden wird, die folgende Gleichung:

$$a_3 - 3a_2 + 3a_1 - a = \Delta^{(3)} a.$$

Auch diese Formeln geben ein allgemeines Gesetz zu erkennen, welches für $\Delta^{(i)} a$ den Ausdruck liefern würde:

$$\Delta^{(i)} a = a_i - \binom{i}{1} \cdot a_{i-1} + \binom{i}{2} \cdot a_{i-2} - \cdots + (-1)^i \cdot a, \tag{29}$$

ein Gesetz, das wieder durch allgemeine Induktion als gültig zu erweisen ist. In der Tat ergibt sich daraus durch Verbindung mit dem entsprechend gebildeten Ausdrucke

$$\Delta^{(i)} a_1 = a_{i+1} - \binom{i}{1} \cdot a_i + \binom{i}{2} \cdot a_{i-1} - \cdots + (-1)^i \cdot a_1$$

die Gleichung

$$\Delta^{(i+1)} a = a_{i+1} - \left(\binom{i}{1} + 1\right) \cdot a_i + \left(\binom{i}{2} + \binom{i}{1}\right) \cdot a_{i-1} - \cdots - (-1^i \cdot a),$$

d. h. wegen (25b) einfacher

$$\Delta^{(i+1)} a = a_{i+1} - \binom{i+1}{1} \cdot a_i + \binom{i+1}{2} \cdot a_{i-1} - \cdots + (-1)^{i+1} \cdot a,$$

mithin gilt die Formel (29), wenn sie bis zum Index i gilt, auch noch für den Index $i+1$, und da sie für seine ersten Werte schon festgestellt worden ist, allgemein. Auch hier kann der Formel (29) ein einfacherer Ausdruck in symbolischer Bezeichnung gegeben werden, wie folgt:

$$\Delta^{(i)} a = (a - 1)^{(i)}, \tag{29a}$$

wo zur Rechten die Entwickelung von $(a-1)^i$, in derselben aber statt jeder Potenz a^n das Glied a_n, für $1 = a^0$ aber das Glied a zu denken ist.

Bedenkt man ferner, daß die Zahlenreihe (11) die erste Differenzreihe für die erste Summenreihe ist, so liefert die Formel (28) sogleich diese neue:

$$\sum^{(1)} a_i = \sum^{(1)} a + \binom{i}{1} \cdot a + \binom{i}{2} \cdot \Delta^{(1)} a + \cdots + \binom{i}{i} \cdot \Delta^{(i-1)} a.$$

Wenn also wieder

$$S_n = a + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

gesetzt und die Formel (18a) berücksichtigt wird, so ergibt sich aus der voraufgehenden Gleichung für $i = n$ die Beziehung:

$$(30)\quad S_n = \binom{n}{1}\cdot a + \binom{n}{2}\cdot \Delta^{(1)}a + \binom{n}{3}\cdot \Delta^{(2)}a + \cdots + \binom{n}{n}\cdot \Delta^{(n-1)}a,$$

eine Formel, zu der man von (28) aus auch gelangen kann, wenn man letztere Formel für $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ aufstellt, und die so entstehenden Gleichungen mit Rücksicht auf die Formeln (21) addiert.

5. Ist nun die Reihe (11) z. B. die Reihe der Potenzen

$$(31)\quad 1^k,\ 2^k,\ 3^k,\ 4^k, \ldots,$$

wo k eine positive ganze Zahl, so daß $a_i = (i+1)^k$ ist, so ergibt sich der binomischen Entwickelung zufolge

$$(32)\quad \Delta^{(1)}a_i = \binom{k}{1}\cdot(i+1)^{k-1} + \binom{k}{2}\cdot(i+1)^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1}\cdot(i+1) + 1.$$

Da also beim Übergange von a_i zur ersten Differenz $\Delta^{(1)}a_i$ die höchste der auftretenden Potenzen von $i+1$ einen um eine Einheit geringeren Exponenten hat wie a_i, so wird dieser Exponent beim Fortgange zu den folgenden Differenzen sich jedesmal wieder um eine Einheit verringern, in $\Delta^{(k)}a_i$ wird also $i+1$ überhaupt nicht mehr vorhanden und daher diese Differenz vom Index des Gliedes unabhängig sein; in der Tat findet man leicht

$$(33)\quad \Delta^{(k)}a_i = k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

Sonach besteht die k^{te} Differenzreihe aus gleichen, von Null verschiedenen Zahlen, und die $k+1^{\text{te}}$ ist die erste Differenzreihe, welche aus Nullen besteht; die Reihe der Potenzen (31) ist mithin eine arithmetische Reihe k^{ter} Ordnung. Aus dieser Ursache nimmt daher die der Reihe (31) entsprechende Summenformel (30), wenn

$$(34)\quad S_n^{(k)} = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

gesetzt wird, folgende Gestalt an:

$$(35)\quad S_n^{(k)} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}\cdot\Delta^{(1)} + \binom{n}{3}\cdot\Delta^{(2)} + \cdots + \binom{n}{k+1}\cdot\Delta^{(k)};$$

unter $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \ldots, \Delta^{(k)}$ werden die Anfangsglieder der aufeinander folgenden Differenzreihen der Reihe (31) verstanden. Die in der Formel auftretenden Binomialkoeffizienten sind aber in bezug auf n ganze Funktionen resp. vom $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots, k+1^{\text{ten}}$ Grade mit rational gebrochenen Koeffizienten und sämtlich algebraisch teilbar durch n.

Demnach läßt sich die vorige Formel für die Summe der k^{ten} Potenzen der ersten n Zahlen auch folgendermaßen schreiben:

$$S_n^{(k)} = c_0 \cdot n^{k+1} + c_1 \cdot n^k + c_2 \cdot n^{k-1} + \cdots + c_k \cdot n \tag{36}$$

und es erübrigt nur die nähere Bestimmung der Koeffizienten.

Für die ersten Werte des Exponenten k ist diese Aufgabe nicht schwer zu lösen. In (21) und (22) fanden wir bereits:

$$S_n^{(1)} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2},$$

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Da nun

$$n^2 = \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

ist, so findet sich

$$n^3 = \frac{(n-1)n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2},$$

d. i.:

$$n^3 = 6 \cdot \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + n, \tag{37}$$

mithin mittels der Formeln (21) sogleich

$$S_n^{(3)} = 6 \cdot \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}.$$

Aus (37) bildet man in ähnlicher Weise:

$$n^4 = 24 \cdot \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 12 \cdot \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + n^2,$$

woraus mittels der Formeln (21) und (22) die Gleichung:

$$S_n^{(4)} = 24 \cdot \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - 12 \cdot \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

hervorgeht; usw. Entwickelt man aber die gefundenen Ausdrücke nach den Potenzen von n, so gewinnt man die gesuchten Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} S_n^{(1)} &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ S_n^{(2)} &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\ S_n^{(3)} &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\ S_n^{(4)} &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

aus denen man für die allgemeine Formel (36) einstweilen nur die Werte der beiden ersten Koeffizienten $c_0 = \frac{1}{k+1}$, $c_1 = \frac{1}{2}$ mutmaßen kann. Bevor wir zu dieser allgemeinen Formel zurückkehren, leiten wir ein paar interessante Beziehungen zwischen den Potenzsummen verschiedener Grade her, die sich hier darbieten.

Aus der Formel

$$n(n+1) = 2 \cdot S_n^{(1)}$$

ergibt sich, wenn das Produkt zur Linken in der Form

$$\big((n-1)+1\big) \cdot \big((n+2)-1\big)$$

geschrieben wird,

$$(n-1)(n+2) = 2 \cdot (S_n^{(1)} - 1).$$

Da zudem

$$(2n+1) \cdot S_n^{(1)} = 3 \cdot S_n^{(2)} \tag{39}$$

gefunden wird, so nehmen die Formeln für $S_n^{(3)}$ und $S_n^{(4)}$ ohne Mühe die Gestalt an:

$$S_n^{(3)} = (S_n^{(1)})^2, \text{ vgl. Formel (10);} \tag{40}$$

$$S_n^{(4)} = \frac{1}{5}[(4n+2)(S_n^{(1)})^2 - S_n^{(2)}], \tag{41}$$

welch letztere Formel sich einfacher schreiben läßt, wie folgt:

$$S_n^{(4)} = \frac{1}{5} S_n^{(2)} (6 S_n^{(1)} - 1) \tag{41a}$$

oder auch so:

$$S_n^{(4)} = \left(\frac{S_n^{(1)} - 1}{5} + S_n^{(1)}\right) \cdot S_n^{(2)}. \tag{41b}$$

Diese Beziehungen zwischen den Potenzsummen verschiedener Grade sind schon lange bekannt; die Formel (41) sprach *Fermat* in einem Briefe an *Roberval* (4. November 1636) aus, doch wurde die gleichbedeutende Formel (41b) schon vor ihm von *Djamchid ben Mas'oud* (nach einem Manuskripte des British Museum i. J. 1589) gegeben. Noch älter ist die den Indern zugeschriebene Formel (40). *Alkarchi* (um 1010) bewies sie nach einer sehr eleganten geometrischen Methode, deren Prinzip von *E. Lucas* zu weiteren Resultaten ausgebeutet ist. Denkt man nämlich untereinander geschrieben die Reihe der natürlichen Zahlen, das doppelte derselben, das dreifache, vierfache usw., und bildet die Quadrate zu 1, 4, 9, 16, 25 ... dieser Zahlen, wie beistehende Tafel es zeigt:

Tafel III.

1	2	3	4	5	6	. . .
2	4	6	8	10	12	. . .
3	6	9	12	15	18	. . .
4	8	12	16	20	24	. . .
5	10	15	20	25	30	. . .
6	12	18	24	30	36	. . .
.	.	.	.	.	.	. . .

so beträgt allgemein die Summe der Zahlen, um welche das der Zahl n entsprechende Quadrat das der Zahl $n-1$ entsprechende übertrifft,

$$2(1+2+3+\cdots+n)n - n^2 = n^3 \tag{42}$$

und somit wird die Summe aller Zahlen, welche in dem der Zahl n entsprechenden Quadrate enthalten sind, gleich $S_n^{(3)}$ sein. Addiert man diese Zahlen aber nach Horizontalreihen, so erhält man als Summe

$$(1+2+3+\cdots+n)\cdot(1+2+3+\cdots+n) = (S_n^{(1)})^2$$

und mithin die Gleichung (40). Denkt man sich, um die Betrachtungsweise von *Alkarchi* an die Stelle der rein arithmetischen zu setzen, ein Quadrat mit der Seite

$$1+2+3+\cdots+n$$

in die Quadrate mit den Seiten

$$1,\quad 1+2,\quad 1+2+3,\ \cdots\ 1+2+\cdots+(n-1),\quad 1+2+\cdots+n$$

zerlegt, so bezeichnet der Ausdruck (42) den Inhalt des Flächenstücks zwischen den zwei letztgenannten, und hiernach wird ersichtlich der Inhalt des gesamten Quadrates, nämlich

$$(1+2+3+\cdots+n)^2,$$

gleich der Summe

$$n^3+(n-1)^3+\cdots+3^3+2^3+1^2,$$

wofür auch

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

gesetzt werden darf.

Wenn man aber mit *Lucas* in der Tafel die Quadratzahlen statt der Zahlen selbst gesetzt denkt, so gibt die gleiche Betrachtung statt des Ausdrucks (42) den folgenden:

$$2(1^2+2^2+\cdots+n^2)\cdot n^2 - n^4 = \frac{2n^5+n^3}{3},$$

also als Summe aller in dem der Zahl n entsprechenden Quadrate enthaltenen Zahlen den Ausdruck

$$\frac{2}{3} S_n^{(5)} + \frac{1}{3} S_n^{(3)}.$$

Da dieselbe Summe andererseits aber $(S_n^{(2)})^2$ ist, so geht die neue Beziehung

$$(43) \qquad 2 S_n^{(5)} + S_n^{(3)} = 3 \cdot (S_n^{(2)})^2$$

hervor.

Werden ferner statt der Quadratzahlen die Kubikzahlen gesetzt, so erhält man an Stelle des Ausdrucks (42) den folgenden:

$$2\,(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) \cdot n^3 - n^6 = \frac{1}{2} n^7 + \frac{1}{2} n^5,$$

als Summe aller Zahlen in dem gedachten Quadrate, welche offenbar $(S_n^{(3)})^2$ ist, also den Ausdruck

$$\frac{1}{2} S_n^{(7)} + \frac{1}{2} S_n^{(5)}$$

und somit durch Vergleichung die Beziehung

$$(44) \qquad S_n^{(7)} + S_n^{(5)} = 2 \cdot (S_n^{(3)})^2 = 2 \cdot (S_n^{(1)})^4,$$

eine Formel, die zuerst von *Jacobi* (Briefwechsel zwischen *Gauss* und *Schumacher*, herausg. von *Peters*, Altona 1863, 5, S. 299) gegeben worden ist.

Diese Betrachtung kann beliebig fortgesetzt werden und ergibt z. B. mit Rücksicht auf die letzte der Formeln (38) beim Übergang zu den Biquadraten der natürlichen Zahlen in obiger Tafel die weitere Gleichung

$$(45) \qquad 6 S_n^{(9)} + 10 S_n^{(7)} - S_n^{(5)} = 15 \cdot (S_n^{(4)})^2$$

usw. fort.

6. Zur Formel (36) zurückkehrend führen wir nun statt der Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k$ andere, mit $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k$ bezeichnete ein, indem wir setzen

$$(46) \qquad (k+1) \cdot S_n^{(k)}$$
$$= b_0 n^{k+1} + \binom{k+1}{1} \cdot b_1 n^k + \binom{k+1}{2} \cdot b_2 n^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k} \cdot b_k n.$$

So läßt sich der Formel die bequeme symbolische Form geben:

$$(46\text{a}) \qquad (k+1) \cdot S_n^{(k)} = (n+b)^{(k+1)} - b_{k+1},$$

wo man nach Entwickelung der binomischen Potenz $(n+b)^{k+1}$ statt b^i den Koeffizienten b_i, insbesondere statt $b^0 = 1$ den Koeffizienten b_0 zu setzen hat. Schreibt man hier $n+1$ statt n und subtrahiert die Formel (46a) von der so entstehenden, so kommt als Differenz zur

Linken $(k+1)\cdot(n+1)^k$, während die Differenz zur Rechten sich schreiben läßt, wie folgt:

$$\big((n+1)+b\big)^{(k+1)} - (n+b)^{(k+1)},$$

oder auch, da die Entwickelung des subtraktiven Gliedes offenbar mit derjenigen von

$$\big((n+1)+(b-1)\big)^{(k+1)}$$

übereinstimmt, so:

$$\big((n+1)+b\big)^{(k+1)} - \big((n+1)+(b-1)\big)^{(k+1)},$$

so daß die Gleichung hervorgeht:

$$(47) \qquad (k+1)\cdot(n+1)^k = \big((n+1)+b\big)^{(k+1)} - \big((n+1)+(b-1)\big)^{(k+1)}.$$

Wird diese aber nach Potenzen von $n+1$ entwickelt und die Koeffizienten derselben Potenzen rechts und links einander verglichen, so findet sich

$$k+1 = \binom{k+1}{1}\cdot\big(b_1 - (b-1)^{(1)}\big),$$

d. h.

$$(48) \qquad 1 = b_0,$$

für jeden Index $i > 1$ aber die Gleichung

$$0 = b_i - (b-1)^{(i)},$$

d. h.

$$(49) \qquad \binom{i}{1}\cdot b_{i-1} - \binom{i}{2}\cdot b_{i-2} + \binom{i}{3}\cdot b_{i-3} - \cdots + (-1)^i\cdot\binom{i}{i-1}\cdot b_1 + (-1)^{i+1}\cdot b_0 = 0.$$

Insbesondere wird

$$(50) \qquad b_1 = \frac{1}{2}.$$

Die erhaltene Rekursionsformel für die Koeffizienten b_i läßt die wichtige Tatsache erkennen, daß deren Wert von dem Grade k der Potenzsummen $S_n^{(k)}$ ganz unabhängig und nur durch den ihnen selbst eigenen Index i bestimmt ist, daß mithin, wenn k in $k+1$ verwandelt wird, die Gleichung (46) durch die folgende zu ersetzen ist:

$$(k+2)\cdot S_n^{(k+1)}$$
$$= b_0 n^{k+2} + \binom{k+2}{1}\cdot b_1 n^{k+1} + \cdots + \binom{k+2}{k}\cdot b_k n^2 + \binom{k+2}{k+1}\cdot b_{k+1} n,$$

wo die Koeffizienten b_0, b_1, ..., b_k dieselben sind wie in (46) und nur ein neuer Koeffizient b_{k+1} hinzutritt.

Leicht übersieht man auch, daß die Koeffizienten b_i, deren Index ungerade und größer als Eins ist, verschwinden. Aus (46) folgt nämlich für $n = 1$, daß

$$(51)\quad k+1=b_0+\binom{k+1}{1}b_1+\binom{k+1}{2}b_2+\cdots+\binom{k+1}{k-1}b_{k-1}+\binom{k+1}{k}b_k$$

ist, während die Rekursionsformel für $i=k+1$ die Gleichung ergibt:

$$0=b_0-\binom{k+1}{1}b_1+\binom{k+1}{2}b_2-\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k+1}{k-1}b_{k-1}+(-1)^k\binom{k+1}{k}b_k,$$

aus deren Subtraktion von der vorigen die folgende, für jeden positiven ganzen Wert von k gültige:

$$\binom{k+1}{3}\cdot b_3+\binom{k+1}{5}\cdot b_5+\binom{k+1}{7}\cdot b_7+\cdots=0$$

hervorgeht. Da nun der Binomialkoeffizient $\binom{k+1}{h}$ verschwindet, wenn $h>k+1$, so findet sich aus dieser Gleichung für $k=2$ der Wert $b_3=0$, also für $k=4$ der Wert $b_5=0$, also für $k=6$ der Wert $b_7=0$, usw., also allgemein:

$$(52)\qquad b_{2i-1}=0\quad(2i-1>1).$$

Indem nun noch

$$(53)\qquad b_{2i}=(-1)^{i+1}\cdot B_i$$

gesetzt wird, sind die Zahlen B_i die sogenannten *Bernoulli*schen Zahlen, und die allgemeine Formel (46) nimmt schließlich folgende Gestalt an:

$$(54)\qquad S_n^{(k)}=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{n^k}{2}+\binom{k}{1}\cdot\frac{B_1}{2}n^{k-1}-\binom{k}{3}\cdot\frac{B_2}{4}n^{k-3}+\binom{k}{5}\cdot\frac{B_3}{6}n^{k-5}-\cdots$$

Da jene Formel nur bis zum Gliede $\binom{k+1}{k}$ hin fortschreitet, so wird, wenn k gerade, $k=2j$ ist, das letzte Glied dieser Gleichung:

$$(-1)^{j+1}\cdot\binom{2j}{2j-1}\cdot\frac{B_j}{2j}n=(-1)^{j+1}\cdot B_j\cdot n,$$

dagegen, wenn k ungerade, $k=2j+1$ ist, das folgende:

$$(-1)^{j+1}\cdot\binom{2j+1}{2j-1}\cdot\frac{B_j}{2j}n^2=(-1)^{j+1}\cdot\frac{2j+1}{2}B_j\cdot n^2$$

sein, die ganze Summe in diesem Falle also mit der zweiten Potenz von n schließen.

7. Die so gefundene Formel gestattet zunächst, die allgemeine Gleichung hinzuschreiben, zu welcher die weitere Fortsetzung der Methode von *Alkarchi* führt und in welcher mithin die durch sie gefundenen Beziehungen der Nr. 5 enthalten sind. Da nämlich zufolge (54):

$$2 \cdot S_n^{(k)} \cdot n^k - n^{2k}$$
$$= \frac{2n^{2k+1}}{k+1} + \binom{k}{1} B_1 n^{2k-1} - \binom{k}{3} \frac{B_2}{2} n^{2k-3} + \binom{k}{5} \frac{B_3}{3} n^{2k-5} - \cdots$$

gesetzt werden kann, so ergibt sich allgemein nach den obigen Betrachtungen:

$$(55)\quad (S_n^{(k)})^2 = \frac{2}{k+1} \cdot S_n^{(2k+1)} + \binom{k}{1} \cdot B_1 \cdot S_n^{(2k-1)} - \binom{k}{3} \cdot \frac{B_2}{2} \cdot S_n^{(2k-3)} + \cdots,$$

eine Formel, welche man nach der kurz zuvor gemachten Bemerkung nur bis $\binom{k}{k-1}$ bzw. $\binom{k}{k-2}$, je nachdem k gerade oder ungerade ist, fortzusetzen hat.

Die Formeln (40) und (44) lassen eine Verallgemeinerung in anderer Richtung zu, welche wohl zuerst von *Stern* angegeben, dann aber von *Lampe* aus einer noch allgemeineren Quelle gewonnen worden ist (s. Journ. f. r. u. a. Math. 84, S. 216 und 270). Nach (54) ist die Differenz:

$$(S_n^{(k)})^m - (S_{n-1}^{(k)})^m,$$

da $S_{n-1}^{(k)} = S_n^{(k)} - n$ ist, gleich dem nachstehenden Ausdrucke:

$$(56)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2} n^k + \binom{k}{1} \frac{B_1}{2} n^{k-1} - \binom{k}{3} \frac{B_2}{4} n^{k-3} + \cdots\right)^m \\ -&\left(\frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{2} n^k + \binom{k}{1} \frac{B_1}{2} n^{k-1} - \binom{k}{3} \frac{B_2}{4} n^{k-3} + \cdots\right)^m, \end{aligned}$$

welchem man, wenn

$$f(n) = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \binom{k}{1} \frac{B_1}{2} n^{k-1} - \binom{k}{3} \frac{B_2}{4} n^{k-3} + \cdots$$

gesetzt wird, die folgenden Formen geben kann:

$$(57)\quad \begin{aligned} &\left(f(n) + \frac{1}{2} n^k\right)^m - \left(f(n) - \frac{1}{2} n^k\right)^m \\ &= 2 \cdot \left[\binom{m}{1} \cdot f(n)^{m-1} \cdot \frac{1}{2} n^k + \binom{m}{3} \cdot f(n)^{m-3} \cdot \frac{1}{8} n^{3k} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck besteht aus Gliedern von der Form

$$M \cdot f(n)^{m-2h-1} \cdot n^{(2h+1)k},$$

während $f(n)^{m-2h-1}$ seinerseits nach dem polynomischen Lehrsatze nur Potenzen von n enthält wie die folgende:

$$n^{\alpha(k+1) + \beta(k-1) + \gamma(k-3) + \cdots},$$

wo $\alpha + \beta + \gamma + \cdots = m - 2h - 1$ ist. Da diese Potenz also auch in der Form

$$n^{m(k+1) - (2h+1)k - 2\mu - 1}$$

geschrieben werden kann, so enthält (57) und folglich auch der Ausdruck (56), in welchem die Klammern nur bis zur Potenz $n^{m(k+1)}$

aufsteigen, die in ihrer Differenz sich hebt, selbst nur Potenzen von der Form

$$n^{m(k+1)-2\mu-1}$$

und ist daher von nachstehender Gestalt:

$$(58)\qquad (S_n^{(k)})^m - (S_{n-1}^{(k)})^m = A_1 n^{m(k+1)-1} + A_2 n^{m(k+1)-3} + \cdots$$

Aus der so erhaltenen Gleichung findet man, indem man $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt und die entstehenden Gleichungen bis zur Formel (58) hin addiert, diese andere:

$$(59)\ (S_n^k)^m = A_1 \cdot S_n^{(m(k+1)-1)} + A_2 \cdot S_n^{(m(k+1)-3)} + A_3 \cdot S_n^{(m(k+1)-5)} + \cdots$$

Wie die Herleitung der Formel (58) erweist, kann man der letzteren Gleichung offenbar einen symbolischen Ausdruck geben, wie folgt:

$$(S_n^{(k)})^m$$

$$(59\text{a}) = \left(\frac{1}{k+1} S_n^{k+1} + \frac{1}{2} S_n^k + \binom{k}{1} \frac{B_1}{2} S_n^{k-1} - \binom{k}{3} \frac{B_2}{4} S_n^{k-3} + \cdots\right)^{(m)}$$
$$- \left(\frac{1}{k+1} S_n^{k+1} - \frac{1}{2} S_n^k + \binom{k}{1} \frac{B_1}{2} S_n^{k-1} - \binom{k}{3} \frac{B_2}{4} S_n^{k-3} + \cdots\right)^{(m)},$$

wenn man übereinkommt, in der Entwickelung der Klammern nach Potenzen von S_n die Exponenten der Potenzen als obere Indizes zu schreiben. Dies ist die allgemeine von *Lampe* gegebene Formel; für $k = 1$, für welchen Wert schon die Glieder mit $\binom{k}{1}$ wegzulassen sind, liefert sie die folgende:

$$(S_n^{(1)})^m = \left(\frac{1}{2} S_n^2 + \frac{1}{2} S_n^1\right)^{(m)} - \left(\frac{1}{2} S_n^2 - \frac{1}{2} S_n^1\right)^{(m)},$$

deren Entwickelung in der angegebenen Weise sofort die *Stern*sche Verallgemeinerung der Formeln (40) und (44), nämlich die Gleichung

$$(60)\quad 2^{m-1} \cdot (S_n^{(1)})^m = \binom{m}{1} \cdot S_n^{(2m-1)} + \binom{m}{3} \cdot S_n^{(2m-3)} + \binom{m}{5} \cdot S_n^{(2m-5)} + \cdots$$

ergibt. Es ist leicht, sie mit *Stern* mittels allgemeiner Induktion zu bestätigen. Offenbar besteht sie nämlich, wenn $n = 1$ gedacht wird, da sie alsdann mit der Gleichung (26d)

$$2^{m-1} = \binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \cdots$$

übereinstimmt. Nehmen wir also an, sie bestehe bereits bis zu einem Werte $n \geqq 1$, und beweisen dann ihre Gültigkeit auch für $n + 1$, so gilt sie allgemein. Nun ist aber:

$$2^{m-1} \cdot \left[(S_{n+1}^{(1)})^m - (S_n^{(1)})^m\right] = \frac{(n+1)^m}{2} \cdot \left((n+2)^m - n^m\right).$$

Schreibt man diese Formel in der Gestalt:

$$2^{m-1}\cdot(S_{n+1}^{(1)})^m$$
$$= 2^{m-1}\cdot(S_n^{(1)})^m + \frac{(n+1)^m}{2}\Big(\big((n+1)+1\big)^m - \big((n+1)-1\big)^m\Big),$$

so findet sich mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Gleichung (60) die rechte Seite gleich

$$\binom{m}{1}\cdot S_n^{(2m-1)} + \binom{m}{3}\cdot S_n^{(2m-3)} + \binom{m}{5}\cdot S_n^{(2m-5)} + \cdots$$
$$+ \binom{m}{1}\cdot(n+1)^{2m-1} + \binom{m}{3}\cdot(n+1)^{2m-3} + \binom{m}{5}\cdot(n+1)^{2m-5} + \cdots,$$

mithin

$$2^{m-1}\cdot(S_{n+1}^{(1)})^m$$
$$= \binom{m}{1}\cdot S_{n+1}^{(2m-1)} + \binom{m}{3}\cdot S_{n+1}^{(2m-3)} + \binom{m}{5}\cdot S_{n+1}^{(2m-5)} + \cdots,$$

wie zu beweisen war.

8. Aus der Formel (54) entnimmt man nun auch leicht die Summe der k^{ten} Potenzen aller **ungeraden** Zahlen bis zu einer gegebenen Grenze.[1]) Denn offenbar ist, wenn man zur Abkürzung

(61) $$T_{2n-1}^{(k)} = 1^k + 3^k + 5^k + \cdots + (2n-1)^k$$

schreibt,

$$S_{2n}^{(k)} = T_{2n-1}^{(k)} + 2^k\cdot S_n^{(k)},$$

woraus in der symbolischen Schreibweise der Formel (46a) die Beziehung hervorgeht:

$$(k+1)\cdot T_{2n-1}^{(k)} = (2n+b)^{(k+1)} - b_{k+1}$$
$$- \frac{1}{2}\cdot(2n+2b)^{(k+1)} + 2^k\cdot b_{k+1},$$

oder noch einfacher

(62) $$(k+1)\cdot T_{2n-1}^{(k)} = (2n+\beta)^{(k+1)} - \beta_{k+1},$$

wenn man setzt:

(63) $$\beta_i = (1-2^{i-1})\cdot b_i \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Dieser Formel zufolge ist mit Hinsicht auf die Definition der *Bernoulli*schen Zahlen in (53):

(63a) $$\beta_{2i} = (-1)^i\cdot(2^{2i-1} - 1)B_i,$$

während

(63b) $$\beta_{2i-1} = 0$$

1) Siehe dazu auch Kap. 6 Nr. 13.

ist, offenbar auch für $2i-1=1$. Entwickelt läßt sich daher die Formel (62) schreiben wie folgt:

(64)
$$T_{2n-1}^{(k)}$$
$$=\frac{2^k}{k+1}n^{k+1}-\binom{k}{1}\cdot 2^{k-1}\frac{B_1}{2}n^{k-1}+\binom{k}{3}\cdot 2^{k-3}(2^3-1)\frac{B_2}{4}n^{k-3}$$
$$-\binom{k}{5}\cdot 2^{k-5}(2^5-1)\frac{B_3}{6}n^{k-5}+\cdots,$$

wo die Fortsetzung der Formel in der gleichen Weise beschränkt ist wie diejenige der Formel (54). Z. B. findet sich hiernach für $k=1$ in Übereinstimmung mit (8b):

(65)
$$T_{2n-1}^{(1)}=n^2.$$

Für $k=2$ gibt die Formel den Wert

$$T_{2n-1}^{(2)}=\frac{4}{3}n^3-2B_1\cdot n,$$

d h., da $B_1=b_2$ aus (49) gleich $\frac{1}{6}$ gefunden wird (vgl. 22a):

(66)
$$T_{2n-1}^{(2)}=\frac{(2n+1)\cdot 2n\cdot(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}=\binom{2n+1}{3}.$$

Desgleichen findet sich für $k=3$ die Formel

$$T_{2n-1}^{(3)}=2n^4-n^2.$$

Nennt man N diesen Wert von $T_{2n-1}^{(3)}$, so besteht die Gleichung

$$2n^4-n^2=N,$$

aus welcher

$$n=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{8N+1}+1},$$

also

$$2n-1=\sqrt{\sqrt{8N+1}+1}-1$$

erhalten wird. Diese Beziehung zwischen dem Werte der Kubensumme der ungeraden Zahlen und der Zahl, bis zu welcher sie ausgedehnt wird, gab bereits *Ibn Albanná*, ein Zeitgenosse des *Leonardo von Pisa*. Ihr zufolge bestimmen die positiven ganzen Zahlen N, für welche der Ausdruck $\sqrt{\sqrt{8N+1}+1}$ eine ungerade Zahl wird, die Summe der aufeinander folgenden ungeraden Kubikzahlen bis zum Kubus der besagten ungeraden Zahl einschließlich.

Bezeichnet man ferner mit $\sum\limits_{2n}^{(k)}$ die Summe der abwechselnd positiv und negativ genommenen k^{ten} Potenzen der ungeraden und geraden Zahlen von 1 bis $2n$, setzt also:

$$(67)\qquad \sum_{2n}^{(k)} = 1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \cdots + (2n-1)^k - (2n)^k,$$

so findet sich sogleich

$$\sum_{2n}^{(k)} = S_{2n}^{(k)} - 2^{k+1} \cdot S_n^{(k)},$$

mithin

$$(k+1) \cdot \sum_{2n}^{(k)}$$

$$= (2n + b)^{(k+1)} - b_{k+1} - (2n + 2b)^{(k+1)} + 2^{k+1} \cdot b_{k+1}$$

oder vereinfacht:

$$(68)\qquad (k+1) \cdot \sum_{2n}^{(k)} = (2n + \gamma)^{(k+1)} - \gamma_{k+1},$$

wenn gesetzt wird:

$$(69)\qquad \begin{aligned} \gamma_i &= b_i(1 - 2^i) \\ i &= 0, 1, 2, 3, \ldots, \end{aligned}$$

mithin $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = -b_1 = -\frac{1}{2}$, $\gamma_{2i-1} = 0$, wenn $i > 1$, und:

$$(70)\qquad \gamma_{2i} = (-1)^i \cdot (2^{2i} - 1) B_i.$$

Die Entwickelung der Formel (68) liefert daher die Gleichung:

$$(71)\qquad \sum_{2n}^{(k)}$$

$$= -2^{k-1} n^k - \binom{k}{1} \cdot (2^2 - 1) \frac{B_1}{2} 2^{k-1} n^{k-1} + \binom{k}{3} \cdot (2^4 - 1) \frac{B_2}{4} 2^{k-3} n^{k-3}$$

$$- \binom{k}{5} \cdot (2^6 - 1) \frac{B_3}{6} 2^{k-5} n^{k-5} + \cdots,$$

nach welcher z. B.

$$\sum_{2n}^{(2)} = -n(2n+1)$$

oder

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 = n(2n-1)$$

ist, ein Resultat, das sich mittels der Formeln für $S_n^{(2)}$ und $T_{2n-1}^{(2)}$ sogleich bestätigen läßt.

9. Man kann auch für eine beliebige arithmetische Reihe

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \ldots, \quad a + (n-1)d$$

die Summe ihrer Glieder, die Summe von deren Quadraten, Kuben, Biquadraten usw. bestimmen. Setzt man allgemein

$$\sigma_k = a^k + (a+d)^k + (a+2d)^k + \cdots + \big(a + (n-1)d\big)^k,$$

so findet man mittels des binomischen Satzes

$$\sigma_k = a^k + \sum_{i=1}^{n-1}\left(a^k + \binom{k}{1}\cdot a^{k-1} d i + \binom{k}{2}\cdot a^{k-2} d^2 i^2 + \cdots + d^k i^k\right),$$

d. i.

$$\text{(72a)} \qquad \sigma_k = n a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} d S_{n-1}^{(1)} + \binom{k}{2} a^{k-2} d^2 S_{n-1}^{(2)} + \cdots + d^k \cdot S_{n-1}^{(k)}.$$

Man gewinnt aber eine andere Formel auf folgendem Wege. Die Summe

$$\sigma^{(k)} = a^k + (a+1)^k + (a+2)^k + \cdots + (a + nd - 1)^k$$

läßt sich anordnen wie folgt:

$$\begin{aligned}\sigma^{(k)} = {} & a^k + (a+d)^k + (a+2d)^k \cdots + \big(a + (n-1)d\big)^k \\ & + (a+1)^k + (a+d+1)^k + (a+2d+1)^k + \cdots + \big(a + (n-1)\,d + 1\big)^k \\ & + \cdot\ \cdot \\ & + (a+d-1)^k + (a+d+d-1)^k + \cdots + \big(a + (n-1)\,d + d - 1\big)^k,\end{aligned}$$

d. i.

$$\sigma^{(k)} = \sigma_k + \sum_{i=1}^{d-1}\Big[(a+i)^k + (a+d+i)^k + \cdots + \big(a + (n-1)\,d + i\big)^k\Big]$$

oder mit Hilfe des binomischen Satzes

$$\sigma^{(k)} = \sigma_k + \sum_{i=1}^{d-1}\left[\sigma_k + \binom{k}{1}\sigma_{k-1}\cdot i + \binom{k}{2}\sigma_{k-2}\cdot i^2 + \cdots + n i^k\right]$$

oder

$$\text{(72b)} \qquad \sigma^{(k)} = \sigma_k + \sigma_k \cdot S_{d-1}^{(0)} + \binom{k}{1}\sigma_{k-1}\cdot S_{d-1}^{(1)}$$

$$+ \binom{k}{2}\sigma_{k-2}\cdot S_{d-1}^{(2)} + \cdots + \sigma_0 \cdot S_{d-1}^{(k)}.$$

Während die Formel (72a) die gesuchte Summe σ_k unmittelbar finden läßt, ist die letzte Formel nur eine Rekursionsformel, durch welche der Reihe nach jede der Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_k$ eine aus der anderen berechnet werden kann.

Handelt es sich insbesondere um die Summe

$$\sigma_k = 1^k + (d+1)^k + (2d+1)^k + \cdots + \big((n-1)d + 1\big)^k,$$

so nehmen die Formeln (72a) und (72b) die Gestalt an:

(72c) $$\sigma_k = n + \binom{k}{1} d S_{n-1}^{(1)} + \binom{k}{2} d^2 S_{n-1}^{(2)} + \cdots + d^k \cdot S_{n-1}^{(k)},$$

(72d) $$S_{nd}^{(k)} = d\sigma_k + \binom{k}{1} \sigma_{k-1} S_{d-1}^{(1)} + \binom{k}{2} \sigma_{k-2} S_{d-1}^{(2)} + \cdots + \sigma_0 \cdot S_{d-1}^{(k)}.$$

Da

$$S_{nd}^{(1)} = \frac{nd(nd+1)}{1 \cdot 2}$$

$$S_{nd}^{(2)} = \frac{nd(nd+1)(2nd+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$S_{nd}^{(3)} = (S_{nd}^{(1)})^2 = \left(\frac{nd(nd+1)}{1 \cdot 2}\right)^2$$

ist, ergibt sich aus (72d) der Reihe nach:

(72e) $$\sigma_1 = \frac{n(n-1)}{2} d + n,$$

was mit Formel (8) bis auf die Bezeichnung übereinstimmt; ferner:

(72f) $$d\sigma_2 = \frac{nd(nd+1)(2nd+1)}{6} - 2\sigma_1 S_{d-1}^{(1)} - n S_{d-1}^{(2)},$$

woraus

$$\sigma_2 = n\left[\frac{2n^2 - 3n + 1}{6} d^2 + (n-1)d + 1\right],$$

dann:

(72g) $$d\sigma_3 = \left(\frac{nd(nd+1)}{2}\right)^2 - 3\sigma_2 S_{d-1}^{(1)} - 3\sigma_1 S_{d-1}^{(2)} - n S_{d-1}^{(3)},$$

eine Beziehung, welche bereits *Fermat* bekannt gewesen ist (Brief an *Mersenne*, oeuvres II, S. 63). Z. B. findet sich für $d = 5$, $n = 4$

$$S_{d-1}^{(1)} = 10, \quad S_{d-1}^{(2)} = 30, \quad S_{d-1}^{(3)} = 100,$$

nach (72e)

$$\sigma_1 = 34,$$

nach (72f)

$$5\sigma_2 = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} - 2 \cdot 34 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} - 4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6},$$

$$\sigma_2 = 414,$$

endlich also nach (72g)

$$5\sigma_3 = \left(\frac{20 \cdot 21}{2}\right)^2 - 3 \cdot 414 \cdot 10 - 3 \cdot 34 \cdot 30 - 4 \cdot 100,$$

$$\sigma_3 = 5644.$$

Da

$$S_{n-1}^{(1)} = 6, \quad S_{n-1}^{(2)} = 14, \quad S_{n-1}^{(3)} = 36$$

ist, liefert die Formel (72c) unmittelbar

$$\sigma_3 = 4 + 3 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot 25 \cdot 14 + 125 \cdot 36,$$

d. i. denselben Wert

$$\sigma_3 = 5644.$$

· 10. Die Zahlen B_i, welche als *Bernoulli*sche Zahlen bezeichnet wurden, tragen ihren Namen von *Jacob Bernoulli*, der in seiner *ars conjectandi* 1713 zuerst auf sie geführt worden ist. Seitdem sind sie bei den mannigfachsten mathematischen Fragen aufgetreten und haben so sehr zahlreiche Untersuchungen ihrer Eigenschaften veranlaßt.[1]) Größtenteils sind diese von analytischer Bedeutung, entfallen also dem Rahmen dieses Buches; wir werden uns darauf zu beschränken haben, von ihrer zahlentheoretischen Beschaffenheit zu handeln.

Vor allem erinnern wir an die Formel (49), welche dazu dient, diese Zahlen der Reihe nach zu berechnen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (52), (53) gibt diese Formel, je nachdem man darin $i = 2n + 1$ oder $i = 2n + 2$ wählt, die erste oder die zweite der nachstehenden Rekursionsformeln, deren erste bereits von *Moivre* (Miscellanea analytica, 1730), die andere von *Jacobi* (Journ. f. r. u. a. Math. 12, 1834, S. 263) mitgeteilt worden ist:

$$(73\text{a})\qquad \binom{2n+1}{1}B_n - \binom{2n+1}{3}B_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\binom{2n+1}{2n-1}B_1 + (-1)^n\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$(73\text{b})\qquad \binom{2n+2}{2}B_n - \binom{2n+2}{4}B_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n+2}{2n}B_1 + (-1)^n\cdot n = 0.$$

Durch Subtraktion der ersten von der zweiten erhält man, wenn man sich der allgemeinen Beziehung (25b) zwischen Binomialkoeffizienten erinnert, die folgende dritte, von *Stern* (Journ. f. Math. 84, 1878, S. 267) angegebene Formel:

$$(74)\qquad \binom{2n+1}{2}B_n - \binom{2n+1}{4}B_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\binom{2n+1}{2n}B_1 + (-1)^n\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

Setzt man in diesen Formeln für n nacheinander die Werte 1, 2, 3, ... ein, so gestatten sie, die aufeinander folgenden *Bernoulli*schen Zahlen zu berechnen. Auf solche Weise hat bereits *Euler* (calc. diff. II, Kap. 5, § 122) die ersten 15, nach ihm *Ohm* (Journ. f. Math. 20, S. 11) die folgenden bis zur 31ten, dann *Adams* (ebendas. 85, S. 269) die weiteren bis zur 62ten berechnet. Wir geben nur die Werte der ersten acht hier an:

$$(75)\qquad \begin{aligned} &B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \\ &B_5 = \frac{5}{66}, \quad B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \quad B_8 = \frac{3617}{510}. \end{aligned}$$

1) Eine zusammenfassende Darstellung derselben findet man u. a. in *L. Saalschütz'* trefflicher Monographie: Vorl. üb. die *Bernoulli*schen Zahlen, Berlin 1893.

! These numbers are called by Lucas $B_2, -B_3, B_4, -B_5, \ldots$

Außer den obigen drei einfachsten Rekursionsformeln hat man eine sehr große Anzahl anderer der verschiedensten Art gefunden, zudem die *Bernoulli*schen Zahlen auch direkt durch verschiedene allgemeine Ausdrücke gebildet, doch bedürfen wir dieser Resultate für die Zwecke nicht, die wir allein hier verfolgen. Dagegen sind zur Herleitung mehrerer Sätze, die hierher gehören, aber bisher auf rein arithmetische Weise nicht gewonnen werden konnten, einige einfache analytische Betrachtungen erforderlich, mit deren Darstellung der Anfang gemacht werden soll.

Die Funktion

$$F(x) = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

bleibt bei der Verwandlung von x in $-x$ unverändert und nimmt für $x = 0$ den Wert 1 an. Ihre Entwickelung nach Potenzen von x kann mithin in die Form gesetzt werden:

$$(76) \qquad \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = 1 + \frac{C_1}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{C_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^4 + \cdots$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, wenn ihre linke Seite durch den ihr gleichen Ausdruck $\frac{x}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ ersetzt und nun für e^x die bekannte Reihenentwickelung gesetzt wird, die folgende:

$$(77) \qquad \begin{aligned} &\frac{x}{2}\left(2 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\right) \\ &= \left(1 + \frac{C_1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{C_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots\right)\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Vergleicht man hier aber beiderseits die Koeffizienten von x^{2n+1}, so ergibt sich sogleich die Beziehung

$$\binom{2n+1}{1} \cdot C_n + \binom{2n+1}{3} \cdot C_{n-1} + \cdots + \binom{2n+1}{2n-1} \cdot C_1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

welche, mit $(-1)^{n-1}$ multipliziert und mit der *Moivre*schen Formel (73a) verglichen, zur folgenden Gleichheit führt:

$$(78) \qquad C_i = (-1)^{i-1} \cdot B_i.$$

Dadurch nimmt dann die Gleichung (76) diese Gestalt an:

$$(79) \qquad \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = 1 + \frac{B_1}{1 \cdot 2}x^2 - \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \frac{B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}x^6 - \cdots$$

und definiert also die *Bernoulli*schen Zahlen analytisch als Entwickelungskoeffizienten der mit $F(x)$ bezeichneten Funktion. Nun ist für jeden Wert von a, den wir indessen gleich als positive ganze Zahl annehmen,

$$\frac{F(ax)}{x} = \frac{a}{2} \cdot \frac{e^{\frac{ax}{2}} + e^{-\frac{ax}{2}}}{e^{\frac{ax}{2}} - e^{-\frac{ax}{2}}} = \frac{d}{dx} \log \left(e^{\frac{ax}{2}} - e^{\frac{-ax}{2}}\right).$$

Daraus findet man ohne Mühe:

$$(80) \quad \begin{cases} \dfrac{F(ax)}{x} - \dfrac{F(x)}{x} \\ = \dfrac{d}{dx} \log \dfrac{e^{\frac{ax}{2}} - e^{-\frac{ax}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = \dfrac{d}{dx} \log \dfrac{e^{ax} - 1}{e^x - 1} - \dfrac{a-1}{2} \end{cases}$$

und folglich, wenn man die Entwickelung (79) benutzt, diese Gleichung:

$$(81) \quad \frac{d}{dx} \log \frac{e^{ax} - 1}{e^x - 1} - \frac{a-1}{2} = (a^2 - 1) \frac{B_1}{1 \cdot 2} x - (a^4 - 1) \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 + \cdots$$

Hier ist $\frac{e^{ax} - 1}{e^x - 1}$ eine ganze Funktion von e^x vom $a - 1^{\text{ten}}$ Grade, also der Differentialquotient zur Linken der vorigen Gleichung ein Bruch, dessen Nenner gleich dieser Funktion, dessen Zähler ebenfalls eine gewisse ganze und ganzzahlige Funktion von e^x ist. Wird noch $2n - 1$ mal differenziert, so gilt für den Zähler das gleiche, während der Nenner jetzt die $2n^{\text{te}}$ Potenz der erstgenannten Funktion wird. Setzt man daher alsdann $x = 0$, so wird der Zähler eine von a abhängige ganze Zahl sein, welche $G(a)$ heiße, während der Nenner, da $\frac{e^{ax} - 1}{e^x - 1}$ für $x = 0$ den Wert a erhält, gleich a^{2n} wird. Dieser Bruch $\frac{G(a)}{a^{2n}}$, geteilt durch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n - 1)$, ist aber der *Maclaurin*schen Reihenentwickelung zufolge nichts anderes als der Koeffizient von x^{2n-1} in der Entwickelung der zur Linken von (81) stehenden Funktion und somit gleich $\frac{(-1)^{n-1} B_n (a^{2n} - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}$.

Demnach besteht die Gleichheit:

$$(82) \quad \frac{(-1)^{n-1} B_n (a^{2n} - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n} = \frac{G(a)}{1 \cdot 2 \cdots (2n-1) \cdot a^{2n}}$$

oder der Satz: Der Bruch

$$(83) \quad \frac{a^{2n} \cdot (a^{2n} - 1) B_n}{2n}$$

ist einer ganzen Zahl gleich, welche positive ganze Zahl a auch bedeute.

Durch eine geringe Verallgemeinerung der vorigen Betrachtung gewinnt *Lipschitz* (Journ. f. Math. 96, S. 3), dem wir diesen Satz verdanken, noch den zweiten Satz:

Für je zwei positive ganze, relativ prime Zahlen a, b ist der Ausdruck

$$(84) \qquad \frac{(a^{2n}-1)(b^{2n}-1)B_n}{2n}$$

gleich einer ganzen Zahl.

11. Zu Ergebnissen anderen Charakters führt ein sehr allgemeiner Satz, welchen *Kummer* (Journ. f. Math. 41, S. 368) bewiesen hat, und welcher in etwas verallgemeinerter Form (nach *Stern*, ebendas. 88, S. 90) folgendermaßen ausgesprochen werden kann:

Läßt sich eine Funktion $f(x)$ in eine Reihe

$$(85) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{qx}(e^{rx} - e^{sx})^k$$

entwickeln, in welcher sowohl die Koeffizienten a_k als die Exponenten q, r, s rationale Werte sind, deren Nenner eine ungerade Primzahl p nicht als Faktor enthalten, und ist andererseits:

$$(86) \qquad f(x) = A_0 + A_1 \cdot \frac{x}{1} + A_2 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

ihre Entwickelung nach Potenzen von x, so besteht die Kongruenz:

$$(87) \qquad A_m - \binom{n}{1} \cdot A_{m+p-1} + \binom{n}{2} \cdot A_{m+2(p-1)} - \cdots + (-1)^n \cdot A_{m+n(p-1)}$$
$$\equiv 0 \, (\text{mod. } p^n),$$

sobald $m \overline{\gtrless} n$.

Entwickelt man nämlich im allgemeinen Gliede der Reihe (85) die Potenz $(e^{rx} - e^{sx})^k$, so kann man schreiben:

$$f(x) = \sum_k \sum_{h \overline{\gtrless} k} (-1)^h \cdot \binom{k}{h} \cdot a_k e^{((k-h)r + hs + q)x},$$

woraus

$$A_m = f^{(m)}(0) = \sum_k \sum_{h \overline{\gtrless} k} (-1)^h \cdot \binom{k}{h} \cdot a_k [(k-h)r + hs + q]^m$$

und folglich für den Ausdruck zur Linken in (87), der kurz A genannt werde, die Formel:

$$A = \sum_k \sum_{h \overline{\gtrless} k} (-1)^h \cdot \binom{k}{h} \cdot a_k \left[(k-h)r + hs + q\right]^m \cdot \left[1 - \left((k-h)r + hs + q\right)^{p-1}\right]^n$$

hervorgeht. Setzt man nun in reduzierter Bruchform

$$(k-h)r + hs + q = \frac{M}{N},$$

so ist nach der Voraussetzung N nicht teilbar durch p und das allgemeine Glied der Doppelsumme nimmt die Form an:

$$(-1)^h \cdot \binom{k}{h} \cdot a_k \cdot \frac{M^m (N^{p-1} - M^{p-1})^n}{N^{m+n(p-1)}},$$

wo nun entweder M oder nach dem *Fermat*schen Satze $N^{p-1} - M^{p-1}$ durch p aufgeht. Sobald mithin $m \overline{\gtrless} n$, geht der Zähler des vorigen rationalen Ausdrucks sicher durch p^n auf, während sein Nenner durch p nicht teilbar ist. Somit ist A selbst eine Reihe von Brüchen, deren Zähler sämtlich durch p^n, deren Nenner durch p nicht teilbar sind, ein Resultat, welchem die Formel (87) Ausdruck geben will.

Wie man sich leicht überzeugt, läßt sich dem *Kummer*schen Satze noch größere Allgemeinheit geben, indem die Kongruenz (87) durch die folgende ersetzt werden darf:

$$(87a) \quad A_m - \binom{n}{1} \cdot A_{m+(p-1)p^i} + \binom{n}{2} \cdot A_{m+2(p-1)p^i} - \cdots + (-1)^n \cdot A_{m+n(p-1)p^i} \equiv 0 \pmod{p^{n(i+1)}},$$

sobald $m \overline{\gtrless} n(i+1)$.

12. Wir wenden diesen allgemeinen Satz als auf ein erstes Beispiel zunächst auf die Funktion:

$$f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

an, welche nach Potenzen von x entwickelt in die Form:

$$(88) \qquad f(x) = 1 - \frac{E_1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{E_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \frac{E_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \cdots$$

gesetzt werden kann, eine Gleichung, aus der sich durch Vertauschung von x mit $x\sqrt{-1}$ die andere:

$$(89) \qquad \sec x = 1 + \frac{E_1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{E_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \frac{E_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \cdots$$

ergibt. Die Zahlen E_i, welche hier als Entwickelungskoeffizienten der Funktion $\sec x$ erscheinen, werden demgemäß Sekantenkoeffizienten oder aber nach dem Vorgange von *Raabe* und *Scherk* auch *Euler*sche Zahlen genannt. Wird die vorige Gleichung mit $\cos x$

multipliziert und für die letztere Funktion ihre Reihe gesetzt und darauf auf beiden Seiten die Koeffizienten von x^{2n} miteinander verglichen, so findet sich zur allmählichen Berechnung dieser Zahlen nachstehende Rekursionsformel:

$$(90)\quad E_n - \binom{2n}{2}\cdot E_{n-1} + \binom{2n}{4}\cdot E_{n-2}\cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{2n-2}\cdot E_1 + (-1)^n = 0,$$

aus der man sogleich erschließt, daß die *Euler*schen Zahlen ganze Zahlen sind. Und zwar sind sie ungerade. Dies gilt in der Tat für E_1, für welche Zahl die Formel den Wert 1 ergibt; nimmt man es nun schon als feststehend an bis zur Zahl E_{n-1}, so schließt man aus der Rekursionsformel, indem man sie als eine Kongruenz (mod. 2) auffaßt:

$$E_n \equiv \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + \cdots + \binom{2n}{2n-2} + 1,$$

d. i. nach (26c) kongruent $2^{2n-1} - 1 \equiv 1 \pmod{2}$, und somit ist dann auch E_n ungerade, usw. — Frühzeitig hat man bemerkt, daß die *Euler*schen Zahlen abwechselnd mit der Ziffer 1 und 5 schließen; weitergehende auf ihre Endziffern bezügliche Bemerkungen machte u. a. schon *Scherk*, ganz besonders aber hat sie *Stern* in einer ausführlichen Arbeit (Journ. f. Math 79, S. 67) untersucht, indem er die *Euler*schen Zahlen zugleich mit anderen betrachtete, die, eng damit verbunden, deshalb *Euler*sche Zahlen höherer Ordnung von ihm genannt worden sind und für welche ähnliche Sätze statthaben, wie für die eigentlichen *Euler*schen Zahlen. Hier beschränken wir uns allein auf die letzteren und wollen, von einer Reihe besonderer Resultate absehend, welche *Stern* ganz elementar aus ihrem Zusammenhange mit den ersteren gewinnt, nur einen allgemeinen Satz herleiten, der sich aus dem *Kummer*schen Satze unmittelbar folgern läßt.

Setzt man nämlich

$$e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = z,$$

woraus $e^x + e^{-x} = z^2 + 2$ hervorgeht, so wird

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^2} = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{8}z^6 + \cdots,$$

die Funktion $f(x)$ gestattet also eine Entwickelung von der Form (85), in welcher die Exponenten $q = 0$, $r = \frac{1}{2}$, $s = -\frac{1}{2}$ sind, sowie die Koeffizienten a_k nur den Primteiler 2 im Nenner haben. Mithin ergibt sich, da hier $A_{2i-1} = 0$, $A_{2i} = (-1)^i \cdot E_i$ zu setzen ist, in bezug auf jede ungerade Primzahl p aus (87) für $m = 2\mu$ die Kongruenz:

$$(91)\begin{cases} E_\mu - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \binom{n}{1} \cdot E_{\mu+\frac{p-1}{2}} + (-1)^{2\cdot\frac{p-1}{2}} \cdot \binom{n}{2} \cdot E_{\mu+2\cdot\frac{p-1}{2}} + \cdots \\ \qquad + (-1)^n \cdot (-1)^{n\cdot\frac{p-1}{2}} \cdot E_{\mu+n\cdot\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p^n}, \end{cases}$$

sobald $\mu \overline{\overline{>}} \frac{n}{2}$.

Für $n = 1$ folgt hieraus die Beziehung

$$(92) \qquad (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot E_{\mu+\frac{p-1}{2}} \equiv E_\mu \pmod{p}$$

und daher allgemeiner

$$(93) \qquad (-1)^{k\cdot\frac{p-1}{2}} \cdot E_{\mu+k\cdot\frac{p-1}{2}} \equiv E_\mu \pmod{p},$$

eine Formel, welche sich auch schreiben läßt, wie folgt:

$$(94) \qquad (-1)^{\mu'} \cdot E_{\mu'} \equiv (-1)^\mu \cdot E_\mu \pmod{p},$$

sobald $\mu' \equiv \mu \left(\mathrm{mod.}\ \frac{p-1}{2}\right)$.

Da $E_1 = 1$, findet sich aus (92) $E_{\frac{p+1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ und dann für $\mu = \frac{p+1}{2}$ die Kongruenz $E_p \equiv 1 \pmod{p}$.

Benutzt man aber die in Formel (87a) ausgesprochene Verallgemeinerung des *Kummer*schen Satzes, so erhält man für $n = 1$ statt der Formel (92) diese andere für jeden Wert von $\mu \overline{\overline{>}} \frac{i+1}{2}$ gültige:

$$(92\text{a}) \qquad (-1)^{\frac{p-1}{2}p^i} \cdot E_{\mu+\frac{p-1}{2}p^i} \equiv E_\mu \pmod{p^{i+1}},$$

aus welcher allgemeiner:

$$(93\text{a}) \qquad (-1)^{k\cdot\frac{p-1}{2}p^i} \cdot E_{\mu+k\cdot\frac{p-1}{2}p^i} \equiv E_\mu \pmod{p^{i+1}}$$

oder folgende Formel hervorgeht:

$$(94\text{a}) \qquad (-1)^{\mu'} \cdot E_{\mu'} \equiv (-1)^\mu \cdot E_\mu \pmod{p^{i+1}},$$

sobald $\mu' \equiv \mu \left(\mathrm{mod.}\ \frac{p-1}{2}p^i\right)$.

Die letztere Beziehung wurde von *Sylvester* mitgeteilt (Paris, Comptes Rendus 52, S. 212), der jedoch dabei die für sie durchaus notwendige Beschränkung $\mu \overline{\overline{>}} \frac{i+1}{2}$ übersehen hat.

Nun gilt die bisher nur für die ungerade Primzahlpotenz p^n als Modulus bewiesene Formel (91) auch für den Modulus 2^n. Um dies zu zeigen, hat *Stern* die bisher angewandte *Kummer*sche Betrachtung

durch eine andere analoge ersetzt, welche zudem das Stattfinden jener Formel (mod. p^n) bestätigt. Wird nämlich

$$e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} = z,$$

also

$$f(x) = \frac{2}{z^2 - 2} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot z^{-2k},$$

oder, da

$$z^{-2k} = \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^{-2k} = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \cdot \frac{2k(2k+1)\cdots(2k+h-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h} \cdot e^{-(h+k)x}$$

ist,

$$f(x) = \sum_h \sum_k (-1)^h \cdot \frac{2k(2k+1)\cdots(2k+h-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h} \cdot 2^k e^{-(h+k)x}$$

gesetzt, so wird

$$f^{(m)}(0) = (-1)^m \cdot \sum_h \sum_k (-1)^h \cdot \frac{2k(2k+1)\cdots(2k+h-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h} \cdot 2^k (h+k)^m.$$

Wählt man nun wieder $m = 2\mu$ und beachtet die Beziehungen:

$$f^{(2i-1)}(0) = A_{2i-1} = 0, \quad f^{(2i)}(0) = A_{2i} = (-1)^i \cdot E_i,$$

so erhält man für den zur Linken in der Kongruenz (91) stehenden Ausdruck folgende Summe:

$$\sum_h \sum_k (-1)^h \cdot \frac{2k(2k+1)\cdots(2k+h-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h} \cdot 2^k (h+k)^{2\mu} \cdot \left(1 - (h+k)^{p-1}\right)^n.$$

In dieser ist aber entweder $h + k$ oder $1 - (h+k)^{p-1}$ teilbar durch p und ebenso eine dieser beiden Größen teilbar durch 2, und somit ist jedes Glied teilbar sowohl durch p^n als durch 2^n, sobald $2\mu \gtreqless n$ angenommen wird. Alsdann zeigt sich also die Kongruenz (91) sowohl (mod. p^n) als auch (mod. 2^n) und daher auch (mod. $2^n p^n$) erfüllt. (Das Bedenkliche, was bei diesen Beweisführungen in der Benutzung der unendlichen Ausdrücke, namentlich des letzten für $f^{(m)}(0)$ liegen mag, soll nicht verschwiegen werden.)

Wird insbesondere $p = 5$ gewählt, so findet sich hiernach folgendes Resultat:

Sobald $\mu \gtreqless \frac{n}{2}$ ist, hat man

$$(95)\quad E_\mu - \binom{n}{1} \cdot E_{\mu+2} + \binom{n}{2} \cdot E_{\mu+4} - \cdots + (-1)^n \cdot E_{\mu+2n} \equiv 0 \,(\text{mod.}\, 10^n).$$

Denkt man sich nun die aus den *Euler*schen Zahlen, deren Indizes gleiche Parität haben, also entweder sämtlich ungerade oder sämtlich gerade sind, zusammengesetzten Zahlenreihen:

$$(96)\qquad \begin{cases} E_1, & E_3, & E_5, & E_7, \ldots \\ E_2, & E_4, & E_6, & E_8, \ldots \end{cases}$$

und entnimmt der einen oder der anderen die Reihe:

$$E_\mu, \quad E_{\mu+2}, \quad E_{\mu+4}, \quad E_{\mu+6}, \ldots,$$

so stellt der Ausdruck, welcher die linke Seite der Kongruenz (95) bildet, der Formel (29) zufolge die n^{te} Differenz $(-1)^n \cdot \Delta^{(n)} E_\mu$ dar; demnach spricht die Kongruenz (95) folgenden von *Stern* (a. a. O.) gegebenen Satz aus: die beiden Reihen (96) haben die Eigenschaft, daß spätestens in ihrer n^{ten} Differenzreihe alle Glieder, deren Index $\overline{\overline{>}}\, \frac{n}{2}$ ist, mit wenigstens n Nullen endigen.

Da sich insbesondere für $n = 1$ hieraus ergibt, daß in der ersten Differenzreihe jeder der beiden Reihen (96) sämtliche Glieder mit Null schließen, so haben alle Glieder der ersten Reihe (96) die gleiche Endziffer wie E_1, d. h. die Endziffer 1, und alle Glieder der zweiten Reihe (96) die gleiche Endziffer wie E_2, d. h., da man aus (90) E_2 selbst gleich 5 findet, die Endziffer 5: eine schon vorher erwähnte Tatsache.

13. Ein anderes Beispiel für den *Kummer*schen Satz entnehmen wir einer Abhandlung von *Stern* im Journ. f. Math. 88, S. 85.

Aus der Identität:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2 \cdot \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}}$$

findet sich, wenn wieder $F(x)$ die gleichbezeichnete Funktion der Nr. 10 bedeutet,

$$x \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = F(4x) - F(2x).$$

Setzt man daher die ungerade Funktion:

$$(97)\qquad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = T_1 \cdot \frac{x}{1} - T_2 \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + T_3 \cdot \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots,$$

so folgt mit Rücksicht auf (80):

$$T_1 \cdot \frac{x^2}{1} - T_2 \cdot \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + T_3 \cdot \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots$$

$$= \frac{B_1 \cdot (4^2 - 2^2)}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{B_2 \cdot (4^4 - 2^4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \frac{B_3 \cdot (4^6 - 2^6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 - \cdots,$$

mithin zwischen den Entwickelungskoeffizienten T_i und den *Bernoulli*schen Zahlen folgende Beziehung:

$$T_i = \frac{2^{2i}(2^{2i}-1)B_i}{2i}. \tag{98}$$

Dem Satze von *Lipschitz* zufolge, den wir in Nr. 10 fanden, sind diese Entwickelungskoeffizienten T_i ganze Zahlen, für welche nun ein ähnliches Resultat abgeleitet werden soll, wie wir für die *Euler*schen Zahlen gewannen. Man setze

$$\varphi(x) = \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Da dieser Ausdruck mit $1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ identisch ist, findet sich sogleich:

$$\varphi(x) = 1 - T_1 \cdot \frac{x}{1} + T_2 \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - T_3 \cdot \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots \tag{99}$$

Da aber andererseits auch

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{1 + \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2},$$

also:

$$\varphi(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{4}e^{-x}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^4 - \cdots$$

gesetzt werden kann, so erfüllt diese Funktion die Bedingungen des *Kummer*schen Satzes mit Bezug auf jede ungerade Primzahl p, und folglich besteht, da hier $A_0 = 1$, $A_{2i} = 0$, $A_{2i-1} = (-1)^i \cdot T_i$ ist, die aus (87) für $m = 2\mu - 1$ hervorgehende Kongruenz:

$$\left|\begin{array}{l} T_\mu - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{n}{1} T_{\mu + \frac{p-1}{2}} + (-1)^{2 \cdot \frac{p-1}{2}} \binom{n}{2} T_{\mu + 2 \cdot \frac{p-1}{2}} - \cdots \\ \quad + (-1)^{n + n \cdot \frac{p-1}{2}} \cdot T_{\mu + n \cdot \frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p^n}, \end{array}\right. \tag{100}$$

sobald $\mu \gtreqless \frac{n+1}{2}$. Die linke Seite dieser Kongruenz nimmt aber durch Einsetzen der Werte (98) für die T_i folgende Gestalt an:

$$\left\{\begin{array}{l} 2^{2\mu-2} \cdot \Big[2 \cdot (2^{2\mu}-1)\frac{B_\mu}{\mu} - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \binom{n}{1} 2^{p-1} \cdot 2\,(2^{2\mu+p-1}-1)\frac{B_{\mu+\frac{p-1}{2}}}{\mu + \frac{p-1}{2}} \\ \qquad + (-1)^{2 \cdot \frac{p-1}{2}} \cdot \binom{n}{2} 2^{2(p-1)} \cdot 2\,(2^{2\mu+2(p-1)}-1)\frac{B_{\mu+2 \cdot \frac{p-1}{2}}}{\mu + 2 \cdot \frac{p-1}{2}} \\ \qquad + \cdots \Big]. \end{array}\right. \tag{101}$$

Nun werden wir bald den Nachweis führen (s. Nr. 18), daß der Ausdruck:

$$(102) \qquad 2\cdot(2^{2i}-1)B_i$$

einer ganzen Zahl gleich ist. Da wegen (98) von dem Quotienten

$$\frac{2^{2i-2}\cdot 2(2^{2i}-1)B_i}{i}$$

dasselbe gilt, so muß, sooft i ungerade ist, auch

$$\frac{2\cdot(2^{2i}-1)B_i}{i}$$

ganzzahlig sein. Beschränken wir uns daher jetzt auf die Voraussetzung, daß μ ungerade, aber $\frac{p-1}{2}$ gerade, d. i. p von der Form $4h+1$ sei, so steht in der Klammer des Ausdrucks (101) eine ganze Zahl und der Ausdruck selbst, d. h. die linke Seite der Kongruenz (100) ist teilbar durch $2^{2\mu-2}$ und folglich durch 2^n, sobald μ als eine ungerade Zahl $> \frac{n+1}{2}$ gedacht wird. Alsdann besteht daher diese Kongruenz auch (mod. $2^n p^n$). Wählt man insbesondere $p=5$, so wird:

$$(103) \quad T_\mu - \binom{n}{1} T_{\mu+2} + \binom{n}{2} T_{\mu+4} - \cdots + (-1)^n T_{\mu+2n} \equiv 0 \pmod{10^n}$$

für jede ungerade Zahl $\mu > \frac{n+1}{2}\cdot$ Hier ist aber der Ausdruck zur Linken das Glied $(-1)^n\cdot\Delta^{(n)}T_\mu$ in der n^{ten} Differenzreihe der Zahlenreihe

$$(104) \qquad T_1,\ T_3,\ T_5,\ T_7\ldots,$$

nnd somit besteht der Satz: Die Zahlenreihe (104) hat die Eigenschaft, daß spätestens in ihrer n^{ten} Differenzreihe alle Glieder, deren Index $> \frac{n+1}{2}$ ist, mit wenigstens n Nullen schließen.

Ein entsprechender Satz gilt für die Zahlenreihe

$$T_2,\ T_4,\ T_6,\ T_8,\ \ldots,$$

doch soll mit Bezug auf seine Herleitung der Kürze wegen auf die genannte *Stern*sche Arbeit, in der er sich findet, verwiesen werden.

14. Um endlich auf die *Bernoulli*schen Zahlen zurückzukommen, betrachten wir, unter a eine positive ganze Zahl verstehend, wieder die Funktion

$$\frac{F(ax)}{x} - \frac{F(x)}{x} = a\cdot\frac{F(ax)}{ax} - \frac{F(x)}{x},$$

deren Entwickelung als Potenzreihe in (81) vorliegt. Man kann ihr aber auch folgenden Ausdruck geben:

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{e^{ax}+1}{e^{ax}-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{a-1}{2}+\frac{a}{e^{ax}-1}-\frac{1}{e^x-1}$$

oder, wenn $e^x - 1 = z$ gesetzt wird, diesen anderen:

$$\frac{a-1}{2}+\frac{1+az-(1+z)^a}{z\left((1+z)^a-1\right)},$$

in dessen zweitem Teile der Faktor z^2 aus Zähler und Nenner sich hebt und dann der gesamte Ausdruck eine Entwickelung nach Potenzen von z, d. i. von $e^x - 1$ zuläßt, welche mit Bezug auf jede ungerade Primzahl p, durch welche a nicht teilbar ist, die Bedingungen des *Kummer*schen Satzes erfüllt. Da wegen (81) hier $A_{2i} = 0$, $A_{2i-1} = (-1)^{i-1}\cdot\frac{(a^{2i}-1)B_i}{2i}$ zu setzen ist, so nimmt die Kongruenz (87), wenn $m = 2\mu - 1$ gewählt wird, die Gestalt an:

$$(105)\quad \frac{(a^{2\mu}-1)B_\mu}{2\mu}-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot\binom{n}{1}\cdot\frac{(a^{2\mu+p-1}-1)B_{\mu+\frac{p-1}{2}}}{2\mu+p-1}$$
$$+(-1)^{2\cdot\frac{p-1}{2}}\cdot\binom{n}{2}\cdot\frac{(a^{2\mu+2(p-1)}-1)B_{\mu+2\cdot\frac{p-1}{2}}}{2\mu+2(p-1)}-\cdots\equiv 0\ (\text{mod.}\ p^n),$$

sooft $\mu \gtreqless \frac{n+1}{2}\cdot$ Für $n = 1$ liefert diese Formel insbesondere

$$(a^{2\mu}-1)\cdot\frac{B_\mu}{\mu}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot(a^{2\mu+p-1}-1)\cdot\frac{B_{\mu+\frac{p-1}{2}}}{\mu+\frac{p-1}{2}}\ (\text{mod.}\ p).$$

Setzt man nun voraus, daß a eine primitive Wurzel (mod. p) und 2μ durch $p-1$ nicht teilbar ist, so sind die Differenzen

$$a^{2\mu}-1,\quad a^{2\mu+p-1}-1$$

einander (mod. p) kongruent, aber nicht teilbar durch p, und man erhält aus der letzten Kongruenz für jeden Wert des Index μ, der kein Vielfaches von $\frac{p-1}{2}$ ist, die einfachere:

$$(106)\quad \frac{B_\mu}{\mu}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot\frac{B_{\mu+\frac{p-1}{2}}}{\mu+\frac{p-1}{2}}\ (\text{mod.}\ p)$$

und daraus allgemeiner

$$(107)\quad \frac{B_\mu}{\mu}\equiv(-1)^{k\cdot\frac{p-1}{2}}\cdot\frac{B_{\mu+k\cdot\frac{p-1}{2}}}{\mu+k\cdot\frac{p-1}{2}}\ (\text{mod.}\ p).$$

Nun folgt weiter aus (105) für $n = 2$

$$(a^{2\mu}-1)\frac{B_\mu}{\mu} - 2\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot(a^{2\mu+p-1}-1)\frac{B_{\mu+\frac{p-1}{2}}}{\mu+\frac{p-1}{2}}$$

$$+(-1)^{p-1}\cdot(a^{2\mu+2p-2}-1)\frac{B_{\mu+p-1}}{\mu+p-1} \equiv 0 \;(\text{mod.}\, p^2), \text{ sooft } \mu > 1.$$

Dieser Kongruenz läßt sich aber mit Rücksicht auf die Kongruenzen (106), (107) die Form geben:

$$(a^{2\mu}-1)\cdot\frac{B_\mu}{\mu} - 2\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot(a^{2\mu}-1)\cdot\frac{B_{\mu+\frac{p-1}{2}}}{\mu+\frac{p-1}{2}}$$

$$+(-1)^{p-1}\cdot(a^{2\mu}-1)\cdot\frac{B_{\mu+p-1}}{\mu+p-1} - 2a^{2\mu}(a^{p-1}-1)\cdot\frac{B_\mu}{\mu}$$

$$+a^{2\mu}(a^{2p-2}-1)\cdot\frac{B_\mu}{\mu} \equiv 0 \;(\text{mod.}\, p^2),$$

und die beiden letzten Glieder zusammen sind

$$\frac{a^{2\mu}B_\mu}{\mu}\cdot(a^{p-1}-1)^2 \equiv 0 \;(\text{mod.}\, p^2),$$

denn, da $\frac{a^{2\mu}(a^{2\mu}-1)B_\mu}{2\mu}$ einer ganzen Zahl gleich ist, aber $a^{2\mu}-1$, sooft μ kein Vielfaches von $\frac{p-1}{2}$ ist, durch p ebensowenig aufgeht als die primitive Wurzel a, so muß jede in μ etwa enthaltene Potenz von p sich gegen B_μ heben. Somit schließt man, indem man mit $a^{2\mu}-1$ dividiert, nachstehende einfachere Kongruenz:

$$\frac{B_\mu}{\mu} - 2\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot\frac{B_{\mu+\frac{p-1}{2}}}{\mu+\frac{p-1}{2}} + \frac{B_{\mu+p-1}}{\mu+p-1} \equiv 0 \;(\text{mod.}\, p^2) \tag{108}$$

für jeden Wert $\mu > 1$, der kein Vielfaches von $\frac{p-1}{2}$ ist.

In gleicher Weise kann man fortfahren und findet den von *Kummer* (a. a. O.) gegebenen Satz: Für jeden Wert $\mu \overline{\gtrless} \frac{n+1}{2}$, der kein Vielfaches von $\frac{p-1}{2}$ ist, besteht die Kongruenz:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{B_\mu}{\mu} - (-1)^{\frac{p-1}{2}}\binom{n}{1}\frac{B_{\mu+\frac{p-1}{2}}}{\mu+\frac{p-1}{2}} + (-1)^{p-1}\binom{n}{2}\frac{B_{\mu+p-1}}{\mu+p-1} \\ &\qquad - (-1)^{3\cdot\frac{p-1}{2}}\binom{n}{3}\frac{B_{\mu+3\cdot\frac{p-1}{2}}}{\mu+3\cdot\frac{p-1}{2}} + \cdots \equiv 0 \;(\text{mod.}\, p^n). \end{aligned}\right. \tag{109}$$

15. Wir leiten nunmehr denjenigen Satz ab, der für die Erkenntnis der arithmetischen Beschaffenheit der *Bernoulli*schen Zahlen am wichtigsten ist. Man nennt ihn den *v. Staudt-Clausen*schen Satz, da er fast gleichzeitig von diesen beiden Forschern aufgefunden worden ist (*v. Staudt* im Journ. f. Math. 21, S. 372, *Clausen* in den astronomischen Nachrichten 17, S. 352). Um ihn einfach aussprechen zu können, wollen wir diejenigen ungeraden Primzahlen $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, für welche $\alpha - 1, \beta - 1, \ldots \lambda - 1$ Teiler einer Zahl $2n$ sind, die *v. Staudt*schen Primzahlen für $2n$ oder diejenigen Teiler $a, b, \ldots l$ von n, für welche $2a + 1, 2b + 1, \ldots 2l + 1$ Primzahlen sind, die *v. Staudt*schen Teiler von n nennen. Offenbar sind jene Primzahlen nicht größer als $2n + 1$. Der zu beweisende Satz sagt dann aus:

Sind $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ die *v. Staudt*schen Primzahlen für $2n$, so gilt für die n^{te} *Bernoulli*sche Zahl die Gleichung

$$(110)\qquad (-1)^n \cdot B_n = G_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \cdots + \frac{1}{\lambda},$$

wo G_n eine gewisse ganze Zahl ist. Man kann dafür auch sagen:

$$(110\text{a})\qquad (-1)^n \cdot B_n = G_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \cdots + \frac{1}{2l+1},$$

wenn $a, b, \cdots l$ die *v. Staudt*schen Teiler von n sind.

Wir geben für diesen wichtigen Satz zwei gänzlich verschiedene Beweise, deren erster der ursprüngliche Beweis von *v. Staudt*, deren zweiter von *E. Lucas* gegeben worden ist (s. seine théorie des nombres, I, S. 433), schicken ihnen aber, um den Gang der Betrachtung zu ebnen, einige arithmetische Erörterungen voraus, deren wir auch nachher noch bedürfen.

1) Ist eine ganze Zahl n, in Primzahlpotenzen zerlegt,

$$(111)\qquad n = p'^{\gamma'} \cdot p''^{\gamma''} \cdot p'''^{\gamma'''} \ldots$$

und $\psi(n)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $\varphi(p'^{\gamma'})$, $\varphi(p''^{\gamma''})$, $\varphi(p'''^{\gamma'''}) \ldots$, so besteht bekanntlich nach dem *Fermat*schen Satze für jede zu n prime Zahl m die Kongruenz

$$m^{\psi(n)} - 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

(s. Bd. 1, S. 157), die jedoch für eine Zahl m, welche einen gemeinsamen Teiler mit n hat, nicht bestehen kann. Um eine Kongruenz zu erhalten, die für jede Zahl m ohne Ausnahme gilt, bezeichne γ den größten der Exponenten $\gamma', \gamma'', \gamma''' \ldots$; dann ist stets

$$(112)\qquad m^{\gamma} \cdot (m^{\psi(n)} - 1) \equiv 0 \pmod{n};$$

denn, ist p' ein Primfaktor von n, der in m nicht aufgeht, so wird

der zweite Faktor, wenn aber p' in m aufgeht, sicher der erste Faktor des Produktes zur Linken durch $p'^{\gamma'}$ teilbar und somit das Produkt im ganzen immer durch n teilbar sein.

2) Aus $$p^h = \left(1 + (p-1)\right)^h = 1 + h \cdot (p-1) + \cdots$$

folgt, sooft p eine ungerade Primzahl ist, für jeden positiven Exponenten h, wenn aber $p = 2$ ist, für $h > 1$ die Ungleichheit

$$p^h - 2 \overline{\overline{>}} h.$$

Aus dieser einfachen Bemerkung erschließen wir zunächst die Tatsache, daß, wenn P ein Produkt verschiedener Primfaktoren ist, unter denen sich alle Primzahlen bis $n \overline{>} 2$ hin befinden, die Potenz P^{n-2} stets durch n teilbar ist. Denn eine Primzahl p, die in n genau h mal aufgeht, findet sich in jener Potenz $n-2$ mal, und man hat, wenn p ungerade ist,

$$n - 2 \overline{\overline{>}} p^h - 2 \overline{\overline{>}} h;$$

ist aber $p = 2$, so ist entweder $h > 1$, also besteht dieselbe Ungleichheit; oder es ist $h = 1$, dann muß $n = 2\nu$, $\nu > 1$ sein, mithin ist wieder $n - 2 > h$.

Des weiteren ziehen wir aus derselben Bemerkung den Schluß, daß stets

$$n \overline{\overline{>}} \psi(n) + \gamma \tag{113}$$

ist. In der Tat: ist zunächst n eine Primzahlpotenz $p'^{\gamma'}$, so ist

$$n - \psi(n) - \gamma = p'^{\gamma'-1} - \gamma', \tag{114}$$

d. h. gleich

$$[p'^{\gamma'-1} - 2 - (\gamma' - 1)] + 1.$$

Wenn p' ungerade, so ist der Ausdruck Null für $\gamma' = 1$, der obigen Bemerkung gemäß aber positiv für $\gamma' > 1$; ist $p' = 2$, so wird derselbe Ausdruck Null für $\gamma' = 1$ oder 2, dagegen nach jener Bemerkung positiv für $\gamma' > 2$. Mithin ist der Ausdruck (114) Null, wenn $n = 2$ oder 4 oder eine ungerade Primzahl ist, sonst positiv, w. z. b. w. — Ist dagegen n aus mindestens zwei verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt, so folgen aus den Gleichungen

$$p'^{\gamma'} = \varphi(p'^{\gamma'}) + p'^{\gamma'-1}$$

$$p''^{\gamma''} = \varphi(p''^{\gamma''}) + p''^{\gamma''-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dem eben Bewiesenen zufolge die Ungleichheiten:

$$p'^{\gamma'} \overline{\gtrless} \varphi(p'^{\gamma'}) + \gamma'$$
$$p''^{\gamma''} \overline{\gtrless} \varphi(p''^{\gamma''}) + \gamma''$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

also, da wenigstens zwei solcher Ungleichheiten vorhanden sind, durch ihre Multiplikation a fortiori die folgende:

$$n > \varphi(n) + \gamma,$$

also auch die Ungleichheit (113).

3) Bedeutet jetzt p eine ungerade Primzahl und g eine primitive Wurzel (mod. p), so ist die Summe

$$\sum_{i=0}^{p-2} g^{ik} = 1 + g^k + g^{2k} + \cdots + g^{(p-2)k} = \frac{g^{(p-1)k} - 1}{g^k - 1}$$

durch p teilbar, wenn k kein Vielfaches von $p-1$ ist, dagegen mit $p-1$ oder -1 kongruent (mod. p), wenn k ein Vielfaches von $p-1$ ist. Andererseits bilden die Potenzen $1, g, g^2 \ldots, g^{p-2}$ ein volles reduziertes Restsystem (mod. p), sind mithin den Zahlen $1, 2, 3, \ldots p-1$ in gewisser Reihenfolge genommen kongruent; daher ist die obige Summe mit $S_{p-1}^{(k)}$ kongruent, und man findet folglich den Satz:

$S_{p-1}^{(k)}$ ist kongruent -1 oder 0 (mod. p), je nachdem k ein Vielfaches von $p-1$ ist oder nicht.

4) Da $1, g, g^2, \ldots g^{p-2}$ den Zahlen $1, 2, 3, \ldots p-1$ insgesamt kongruent sind, so sind die Werte von $1 + g^i$ für $i = 0, 1, 2, \ldots p-2$ den Zahlen $2, 3, \ldots p-1, p$ (mod. p) kongruent und somit

$$\sum_{i=0}^{p-2} (1 + g^i)^k \equiv S_{p-1}^{(k)} - 1 \text{ (mod. } p), \tag{115}$$

d. h. kongruent -2 oder -1, je nachdem k durch $p-1$ aufgeht oder nicht.

Nun ist aber nach dem binomischen Satze

$$\sum_{i=0}^{p-2} (1 + g^i)^k = p - 1 + \binom{k}{1} \cdot \sum_i g^i + \binom{k}{2} \cdot \sum_i g^{2i} + \cdots + \sum_i g^{ki},$$

folglich nach der unter 3) gemachten Bemerkung

$$\sum_{i=0}^{p-2} (1 + g^i)^k \equiv -1 - \binom{k}{p-1} - \binom{k}{2(p-1)} - \binom{k}{3(p-1)} - \cdots \text{ (mod. } p).$$

Diese Formel ist auszudehnen bis zum größten Vielfachen von $p-1$, das nicht größer als k ist. Heißt $h(p-1)$ dasjenige größte Vielfache von $p-1$, welches noch kleiner als k ist, so wäre in

dem Falle eines durch $p-1$ teilbaren k das letzte Glied der Formel

$$-\binom{k}{(h+1)(p-1)} = -\binom{k}{k} = -1.$$

Mit Rücksicht hierauf sowie auf den Satz (115) ergibt sich aus der letzten Kongruenz in beiden Fällen, gleichviel ob k teilbar oder nicht teilbar ist durch $p-1$, die andere Kongruenz:

$$(116)\qquad \binom{k}{p-1} + \binom{k}{2(p-1)} + \cdots + \binom{k}{h(p-1)} \equiv 0 \pmod{p},$$

wo $h(p-1)$ das größte Vielfache von $p-1$ ist, welches noch kleiner als k ist.

Hiernach bestehen für eine beliebige ganze Zahl n die beiden folgenden, bis zum größten Vielfachen $h(p-1) < 2n+2$ fortzusetzenden Kongruenzen:

$$(117)\qquad \left\{\begin{array}{l} \binom{2n+1}{p-1} + \binom{2n+1}{2p-2} + \binom{2n+1}{3p-3} + \cdots \equiv 0 \\ \binom{2n+2}{p-1} + \binom{2n+2}{2p-2} + \binom{2n+2}{3p-3} + \cdots \equiv 0, \end{array}\right. \pmod{p},$$

aus deren subtraktiver Verbindung mit Beachtung der Formel (25b) noch die dritte:

$$(118)\qquad \binom{2n+1}{p-2} + \binom{2n+1}{2p-3} + \binom{2n+1}{3p-4} + \cdots \equiv 0 \pmod{p}$$

hervorgeht.

16. Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns nun zum Beweise des *v. Staudt*schen Satzes, wie ihn *v. Staudt* selber gegeben hat.

Sind m, n zwei beliebige Moduln, so können sämtliche Zahlen $1, 2, 3, \ldots mn$ durch die Formel $x + my$ dargestellt werden, wenn darin x die Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$ und y die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ durchläuft. Infolge davon ist $S_{mn}^{(k)} = \Sigma(x+my)^k$, wenn diese Summe über die gedachten Werte von x, y ausgedehnt wird. Nun ist aber

$$(x+my)^k \equiv x^k + \binom{k}{1} \cdot x^{k-1} \cdot my \pmod{m^2},$$

also geht für jene Summe die Kongruenz hervor:

$$(119)\qquad S_{mn}^{(k)} \equiv n \cdot S_m^{(k)} + \binom{k}{1} \cdot m \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot S_m^{(k-1)} \pmod{m^2},$$

mithin auch diese andere:

$$(120)\qquad S_{mn}^{(k)} \equiv n \cdot S_m^{(k)} \pmod{m}.$$

Sei $n = m'm''\ldots$ ein Produkt aus Faktoren, die sowohl unter sich als auch zu m relativ prim sind. Dann lehrt die vorige Kongruenz, daß der Ausdruck:

$$S^{(k)}_{mm'm''\ldots} - m'm''\cdots S^{(k)}_{m},$$

nicht minder also auch der folgende:

$$S^{(k)}_{mm'm''\ldots} - m'm''\cdots S^{(k)}_{m} - mm''\cdots S^{(k)}_{m'} - mm'\cdots S^{(k)}_{m''} - \cdots$$

durch m, und, da er in bezug auf $m, m', m'', \cdots$ symmetrisch gestaltet ist, ebenso durch m', durch m'', $\cdots$, folglich auch durch das Produkt $mm'm''\cdots$ teilbar ist. Es findet sich, anders ausgedrückt, die Tatsache, daß der Ausdruck

$$(121) \qquad \frac{S^{(k)}_{mm'm''\ldots}}{mm'm''\ldots} - \frac{S^{(k)}_{m}}{m} - \frac{S^{(k)}_{m'}}{m'} - \frac{S^{(k)}_{m''}}{m''} - \cdots$$

einer ganzen Zahl gleich ist, sooft $m, m', m'', \cdots$ relative Primzahlen sind.

Setzen wir andererseits in der Formel (119) n als eine Primzahl q und m als eine Potenz derselben, $m = q^{c-1}$, wo $c > 1$ ist, voraus und beschränken uns fernerhin auf einen geraden Wert $2h$ von k, so nimmt diese Formel die Gestalt an:

$$S^{(2h)}_{q^c} \equiv q \cdot S^{(2h)}_{q^{c-1}} + 2h \cdot q^c \cdot \frac{q-1}{2} \cdot S^{(2h-1)}_{q^{c-1}} \pmod{q^{2c-2}}$$

also auch (mod. q^c), jedenfalls ist also

$$\frac{1}{q^c} \cdot S^{(2h)}_{q^c} - \frac{1}{q^{c-1}} \cdot S^{(2h)}_{q^{c-1}}$$

gleich einer ganzen Zahl. Da dasselbe für die Ausdrücke

$$\frac{1}{q^{c-1}} \cdot S^{(2h)}_{q^{c-1}} - \frac{1}{q^{c-2}} \cdot S^{(2h)}_{q^{c-2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{q^2} \cdot S^{(2h)}_{q^2} - \frac{1}{q} \cdot S^{(2h)}_{q}$$

gilt, so muß auch ihre Summe, d. h. der Ausdruck

$$(122) \qquad \frac{1}{q^c} \cdot S^{(2h)}_{q^c} - \frac{1}{q} \cdot S^{(2h)}_{q}$$

einer ganzen Zahl gleich sein.

Sei nunmehr P eine ganze Zahl, welche, in Primzahlpotenzen zerlegt,

$$P = 2^{\varepsilon} q^c q'^{c'} \ldots \alpha^r \beta^s \ldots$$

ist, wobei wir mit $\alpha, \beta, \ldots$ die *v. Staudt*schen Primzahlen für eine gegebene Zahl $2n$ bezeichnen; nimmt man alsdann in (121) für

$m, m', m'', \ldots$ die Primzahlpotenzen dieser Zerlegung und berücksichtigt den an letzter Stelle ausgesprochenen Satz, so wird offenbar folgender Ausdruck

$$(123)\qquad \frac{S_P^{(2n)}}{P} - \frac{1}{2} \cdot S_2^{(2n)} - \frac{1}{q} \cdot S_q^{(2n)} - \cdots - \frac{1}{\alpha} \cdot S_\alpha^{(2n)} - \frac{1}{\beta} \cdot S_\beta^{(2n)} - \cdots$$

einer ganzen Zahl gleich sein. Da nun aber

$$\frac{S_2^{(2n)}+1}{2} = \frac{2+2^{2n}}{2} = 1 + 2^{2n-1}$$

ist, da ferner, weil $2n$ durch $q-1$, $q'-1, \ldots$ nicht teilbar, durch $\alpha - 1$, $\beta - 1, \ldots$ aber teilbar gedacht ist, nach dem unter 3) der vorigen Nummer ausgesprochenen Satze die Ausdrücke

$$\frac{1}{q} \cdot S_q^{(2n)},\quad \frac{1}{q'} \cdot S_{q'}^{(2n)},\ \ldots,\quad \frac{S_\alpha^{(2n)}+1}{\alpha},\quad \frac{S_\beta^{(2n)}+1}{\beta},\ \ldots$$

ganzzahlige Werte haben, so ergibt sich zuletzt, daß auch nachstehender Ausdruck:

$$(124)\qquad \frac{S_P^{(2n)}}{P} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \cdots$$

einer ganzen Zahl gleich sein muß.

Aus diesem Resultate läßt sich der zu Beweis stehende Satz leicht auf dem Wege der allgemeinen Induktion erschließen, wenn man die Formel (54) zu Hilfe nimmt, aus der für den vorliegenden Fall die nachstehende Formel zu entnehmen ist:

$$(125)\qquad (-1)^n \cdot B_n + \frac{S_P^{(2n)}}{P} = \frac{P^{2n}}{2n+1} + \frac{P^{2n-1}}{2} + \binom{2n}{2} \cdot B_1 \cdot \frac{P^{2n-2}}{2n-1}$$
$$- \binom{2n}{4} \cdot B_2 \cdot \frac{P^{2n-4}}{2n-3} + \cdots + (-1)^n \cdot \binom{2n}{2n-2} B_{n-1} \cdot \frac{P^2}{3}\,.$$

Nehmen wir nämlich an, der *v. Staudt-Clausen*sche Satz stehe bereits fest für alle *Bernoulli*schen Zahlen B_i, deren Index $i < n$ ist, so daß, wenn α', $\beta', \ldots$ die *v. Staudt*schen Primzahlen für $2i$ bezeichnen, welche sämtlich gleich oder kleiner als $2i+1$, mithin kleiner als $2n+1$ sind, die Gleichheit besteht:

$$(-1)^i \cdot B_i = G_i + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} + \cdots,$$

verstehen wir ferner unter P das Produkt aller Primzahlen $\overline{\gtrless}\, 2n+1$, unter denen sich also auch alle *v. Staudt*schen Primzahlen für $2n$ befinden, so daß P die bei (124) vorausgesetzte Zusammensetzung hat, so leuchtet einerseits ein, daß jedes der Produkte $B_i \,.\, P$ einen ganzzahligen Wert hat, andererseits wird

$$\frac{P^{2n-2i-1}}{2n-2i+1},$$

da der Exponent von P um 2 geringer ist als der Nenner, nach 2) voriger Nummer ganzzahlig und somit das allgemeine Glied zur Rechten von (125) einer ganzen Zahl gleich sein; endlich sind auch die beiden ersten, abweichend gebildeten Glieder der Formel ganze Zahlen, mithin findet sich

$$(-1)^n \cdot B_n + \frac{1}{P} \cdot S_P^{(2n)}$$

als ganze Zahl, d. h. aber mit Rücksicht auf die Gleichung (124), es ist

$$(126)\qquad (-1)^n \cdot B_n = G_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \cdots,$$

wo G_n ganzzahlig ist. Der zu beweisende Satz gilt also auch noch für die n^{te} *Bernoulli*sche Zahl, wenn er für die vorhergehenden gilt. Da aber für die erste *Bernoulli*sche Zahl $B_1 = \frac{1}{6}$ die Gleichheit stattfindet

$$-1 \cdot B_1 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

und 3 die einzige hier vorhandene *v. Staudt*sche Primzahl ist, so ist hiermit der Satz als allgemein gültig bewiesen.

17. So interessant und einfach diese Reihe von Schlüssen auch ist, so erscheint der Beweis, den *Lucas* gegeben hat, doch als der angemessenere, insofern er tiefer auf die Grundlage der Sache zurückgreift. Wir wurden auf die *Bernoulli*schen Zahlen geführt, indem wir die ersten n Glieder der Zahlenreihe

$$(127)\qquad 1^k,\ 2^k,\ 3^k, \ldots$$

summierten; für die Summe $S_n^{(k)}$ derselben fanden wir zwei verschiedene Formeln, die Gleichungen (35) und (54). Setzen wir $k = 2h$ voraus. Denkt man alsdann in der ersteren Formel die Binomialkoeffizienten nach Potenzen von n entwickelt und vergleicht darin das Glied mit n^1 mit demjenigen der Formel (54), so ergibt sich für die *Bernoulli*sche Zahl B_h folgender eigentümliche Ausdruck:

$$(128)\qquad (-1)^{h+1} \cdot B_h = 1 - \frac{\Delta^{(1)}}{2} + \frac{\Delta^{(2)}}{3} - \cdots + \frac{\Delta^{(2h)}}{2h+1}.$$

Untersuchen wir deshalb für $k = 2h$ das Glied $\Delta^{(n-1)}m^k$ der $n-1^{\text{ten}}$ Differenzreihe in bezug auf den Modul n. Offenbar wird der Rest dieses Gliedes sich nicht verändern, wenn statt der einzelnen Glieder der Zahlenreihe (127) andere, ihnen (mod. n) kongruente gesetzt werden. Bedeutet aber $F(m)$ irgendeine ganze ganzzahlige Funktion

von m, so läßt sich durch Division derselben mit $m^\gamma(m^{\psi(n)}-1)$ eine Gleichung erhalten von der Form

$$F(m) = m^\gamma(m^{\psi(n)}-1)\cdot Q(m) + f(m),$$

wo $f(m)$ ebenfalls eine ganze ganzzahlige Funktion von m bedeutet, deren Grad aber kleiner ist als $\psi(n)+\gamma$; demgemäß ist, wenn unter γ dieselbe Zahl verstanden wird, wie in Nummer 15,

$$F(m) \equiv f(m) \pmod{n}.$$

Somit darf man, um den Rest von $\Delta^{(n-1)}m^k$ zu suchen, auch m^k durch eine ganze ganzzahlige Funktion von m ersetzt denken, deren Grad höchstens $\psi(n)+\gamma-1$ ist. Letztere Zahl ist gleich $n-1$, wenn n gleich 2 oder 4 oder eine ungerade Primzahl ist; in diesen Fällen wird daher die $n-1^{\text{te}}$ Differenzreihe nach Anfang von Nummer 5 aus lauter (mod. n) gleichen Zahlen bestehen, in den anderen Fällen aber, wo $\psi(n)+\gamma-1<n-1$ ist, aus lauter Nullen (mod. n), d. h. dann werden alle Zahlen der $n-1^{\text{ten}}$ Differenzreihe und somit auch ihr Anfangsglied $\Delta^{(n-1)}$ durch n teilbar sein. Jedes, einem Falle der letzteren Art entsprechende Glied $\frac{\Delta^{(n-1)}}{n}$ in der Formel (128) wird mithin ganzzahlig sein.

Für die übrigen Fälle greifen wir zurück auf die Formel (29), die hier folgende Gestalt erhält:

$$\Delta^{(n-1)} = n^k - \binom{n-1}{1}\cdot(n-1)^k + \binom{n-1}{2}\cdot(n-2)^k + \cdots + (-1)^{n-1}\cdot 1^k.$$

Für $n=2$ ergibt sich daraus

$$\Delta^{(1)} = 2^k - 1^k \equiv 1 \pmod{2},$$

also $\frac{\Delta^{(1)}}{2}$ gleich einer ganzen Zahl weniger $\frac{1}{2}$; für $n=4$ kommt, wenn k gerade ist, wie vorausgesetzt worden,

$$\Delta^{(3)} = 4^k - 3\cdot 3^k + 3\cdot 2^k - 1^k \equiv 0 \pmod{4},$$

also $\frac{\Delta^{(3)}}{4}$ gleich einer ganzen Zahl. Endlich erhält man, wenn n eine ungerade Primzahl p ist,

$$\Delta^{(p-1)} \equiv (-1)^{k+1}\left[\binom{p-1}{1}\cdot 1^k - \binom{p-1}{2}\cdot 2^k + \cdots - (p-1)^k\right] \pmod{p}.$$

Der Ausdruck in der Klammer aber besteht, wenn der allgemeine Binomialkoeffizient

$$\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-h)}{1\cdot 2\cdots h}$$

aufgelöst wird, aus der Summe

$$-1^k - 2^k - \cdots - (p-1)^k$$

plus einer Reihe von Brüchen, deren Zähler durch p teilbar, deren Nenner durch p nicht teilbar sind. Daraus folgt offenbar

$$\Delta^{(p-1} \equiv (-1)^k (1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k)$$

oder auch

$$\Delta^{(p-1} \equiv (-1)^k \cdot S_{p-1}^{(k)} \pmod{p},$$

d. i., weil k gerade gedacht wurde,

$$\Delta^{(p-1)} \equiv S_{p-1}^{(k)} \pmod{p}$$

und folglich nach dem Satze unter 3) in Nummer 15 kongruent -1 (mod. p) oder teilbar durch p, je nachdem $k = 2h$ ein Vielfaches von $p-1$, d. h. p eine der *v. Staudt*schen Primzahlen für $2h$ ist oder nicht ist. Je nach diesen beiden Fällen ist demnach

$$\frac{\Delta^{(p-1)}}{p}$$

gleich einer ganzen Zahl minus $\frac{1}{p}$ oder selbst eine ganze Zahl.

Da nun unter den Nennern in (128) alle Primzahlen bis $2h+1$ inklusive, also auch sämtliche *v. Staudt*schen Primzahlen für $2h$ sich vorfinden, so erhält man aus alle diesem schließlich das Ergebnis:

$$(-1)^{h+1} \cdot B_h$$

ist gleich einer ganzen Zahl vermindert um

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \cdots + \frac{1}{\lambda},$$

wenn $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ die *v. Staudt*schen Primzahlen für $2h$ bedeuten. Dies ist aber der genaue Inhalt des *v. Staudt-Clausen*schen Satzes.[1])

18. In einer kleinen Abhandlung (de numeris Bernoullianis, Erlangen, 1845) hat *v. Staudt* diesen Satz noch dahin erweitert, daß, wenn $n > 1$ gedacht wird und B_n den Bruchteil der Formel (126) bezeichnet, nämlich

$$\mathrm{B}_n = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \cdots + \frac{1}{\lambda} \tag{129}$$

gesetzt wird, der Ausdruck

$$B_n + (-1)^{n+1} \cdot \left(\mathrm{B}_n + \frac{(-1)^{1+\sigma_n}}{2}\right),$$

1) Einen anderen Beweis des Satzes s. bei *Saalschütz* a. a. O. S. 138 und im Anschluß an *Lipschitz'* Arbeit im Journ. f. Math. 96 ebendas. S. 146. Ferner zwei Beweise von *K. Schwering* (Math. Ann. 52, S. 171) und *J. C. Kluyver* (ebendas. 53, S. 591), doch beruhen die drei letzten mehr auf analytischer Grundlage.

in welchem σ_n die Anzahl der *v. Staudt*schen Primzahlen für $2n$ bedeutet, und welcher dem *v. Staudt-Clausen*schen Satze zufolge stets eine ganze Zahl ist, sogar eine gerade Zahl sein muß, oder auch, daß die Zahl

$$\beta_n = B_n + (-1)^{n+1} \cdot \left(B_n + \frac{1}{2}\right)$$

gerade oder ungerade ist, je nachdem umgekehrt σ_n ungerade oder gerade ist.

Stern ist in dieser Richtung noch weiter gegangen und hat in einer, im Journ. f. Math. 81, S. 290 befindlichen Arbeit den Nachweis geführt, daß

$$\text{für ungerades } n \text{ stets } \beta_n + \sigma_n \equiv 3 \pmod{4},$$

$$\text{für gerades } n \text{ aber } \beta_n + \sigma_n \equiv 3 \text{ oder } 1 \pmod{4}$$

ist, je nachdem die Anzahl der *v. Staudt*schen Primzahlen für $2n$, welche von der Form $4h + 3$ sind, gerade oder ungerade ist. Doch soll hier auf diese Ergänzungen des Satzes nur kurz verwiesen werden.

Dagegen wollen wir nicht unterlassen, ein paar andere Folgerungen aus dem *v. Staudt-Clausen*schen Satze noch abzuleiten. Zunächst: jede Rekursionsformel für die *Bernoulli*schen Zahlen B_i gibt auch eine solche für deren ganzzahlige Bestandteile G_i. So folgt aus Formel (73a), wenn man die Glieder ihrer linken Seite in umgekehrter Reihenfolge schreibt, nachstehende Gleichung:

$$n - \frac{1}{2} - \binom{2n+1}{2} \cdot B_1 + \binom{2n+1}{4} \cdot B_2 - \cdots + (-1)^n \cdot \binom{2n+1}{2n} \cdot B_n = 0.$$

Setzt man darin aber für die B_i ihre durch den *v. Staudt-Clausen*schen Satz bestimmten Ausdrücke ein, so kommt:

$$(130) \quad \left\{ \begin{aligned} & n - \frac{1}{2} \\ & + \binom{2n+1}{2} \cdot \left(G_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ & + \binom{2n+1}{4} \cdot \left(G_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \binom{2n+1}{2n} \cdot \left(G_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \cdots\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

In dieser Formel hat der Bruch $\frac{1}{2}$ in Summa den Faktor

$$-1 + \binom{2n+1}{2} + \binom{2n+1}{4} + \cdots + \binom{2n+1}{2n} = 2^{2n} - 2.$$

Bedeutet ferner p irgendeine der darin auftretenden ungeraden Prim-

zahlen, so hat $\frac{1}{p}$ zum Faktor die bis zum größten Vielfachen von $p-1$, das noch kleiner ist als $2n+2$, fortzusetzende Summe

$$\binom{2n+1}{p-1}+\binom{2n+1}{2p-2}+\binom{2n+1}{3p-3}+\cdots,$$

da der Bruch $\frac{1}{p}$ nur bei denjenigen Gliedern auftritt, für deren Index $2, 4, \ldots 2n$ die Primzahl p eine *v. Staudt*sche Primzahl ist, deren Index nämlich durch $p-1$ teilbar ist; diese Summe ist aber nach (117) teilbar durch p. Setzt man demnach die ganze Zahl:

$$\frac{1}{p}\left[\binom{2n+1}{p-1}+\binom{2n+1}{2p-2}+\cdots\right]=G_p,$$

so nimmt die Gleichung (130) schließlich folgende Gestalt an:

$$\binom{2n+1}{2}\cdot G_1+\binom{2n+1}{4}\cdot G_2+\cdots+\binom{2n+1}{2n}\cdot G_n \tag{131}$$
$$=1-2^{2n-1}-n-\sum_p G_p,$$

worin die Summe sich auf alle ungeraden Primzahlen $\overline{\gtrless} 2n+1$ erstreckt, da die *v. Staudt*schen Primzahlen für alle Zahlen $2, 4, 6, \ldots 2n$ mit den Primzahlen $2i+1$ übereinstimmen, bei denen i ein Teiler von $1, 2, 3, \ldots, n$, d. i. irgendeine der Zahlen $\overline{\gtrless} n$ ist. Die Formel (131) gab *Hermite* im Journ. f. Math. 81, S. 93.

Geht man mit *Stern* (Journ. f. Math. 84, S. 267), statt von der Formel (73a), von der Rekursionsformel (74) aus, indem man schreibt:

$$\frac{1}{2}-\binom{2n+1}{1}\cdot B_1+\binom{2n+1}{3}\cdot B_2-\cdots(-1)^n\cdot\binom{2n+1}{2n-1}\cdot B_n=0,$$

so kommt durch Einsetzen der Ausdrücke für die B_i die Gleichung:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ +\binom{2n+1}{1}\cdot\left(G_1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\\ +\binom{2n+1}{3}\cdot\left(G_2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\binom{2n+1}{2n-1}\cdot\left(G_n+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\cdots\right)=0;\end{array}\right. \tag{132}$$

hier hat $\frac{1}{2}$ den Faktor:

$$1+\binom{2n+1}{1}+\binom{2n+1}{3}+\cdots+\binom{2n+1}{2n-1}=2^{2n},$$

ein Bruch $\frac{1}{p}$ aber gehört nur zu solchen G_i, für deren doppelten Index $2i$ die Primzahl p eine *v. Staudt*sche Primzahl, mithin $2i$ ein Vielfaches von $p-1$ ist, er erhält also als Faktor die bis zum größten Vielfachen von $p-1$, das noch kleiner ist als $2n+2$, fortzusetzende Summe:

$$\binom{2n+1}{p-2} + \binom{2n+1}{2p-3} + \binom{2n+1}{3p-4} + \cdots,$$

welche nach (118) teilbar ist durch p. Setzt man also die ganze Zahl:

$$\frac{1}{p} \cdot \left[\binom{2n+1}{p-2} + \binom{2n+1}{2p-3} + \cdots\right] = \gamma_p,$$

so nimmt die Gleichung (132) folgende Form an:

$$(133) \quad \begin{cases} \binom{2n+1}{1} \cdot G_1 + \binom{2n+1}{3} \cdot G_2 + \cdots + \binom{2n+1}{2n-1} \cdot G_n \\ \qquad = -2^{2n-1} - \sum\limits_p \gamma_p, \end{cases}$$

wo wieder die Summe auf alle ungeraden Primzahlen $\overline{\gtrless} 2n+1$ zu erstrecken ist. Diese Formel verdankt man *Stern*.

Wir bemerken ferner, um eine in Nr. 13 gegebene Zusage zu erfüllen, daß aus dem *v. Staudt-Clausen*schen Satze der Ausdruck:

$$(134) \qquad 2(2^{2n}-1) \cdot B_n$$

sich, was schon *Euler* bekannt war, als eine ganze Zahl herausstellt. Wir zeigen es sogar allgemeiner, unter a irgendeine (positive) ganze Zahl verstehend, für den Ausdruck:

$$(134\text{a}) \qquad a(a^{2n}-1) \cdot B_n.$$

Jenem Satze zufolge ist nämlich offenbar B_n ein Bruch, in dessen Nenner nur 2 und die *v. Staudt*schen Primzahlen für $2n$, und zwar jeder dieser Faktoren nur einmal aufgeht. Somit hebt sich 2, wenn a gerade ist, gegen den ersten, wenn aber a ungerade ist, gegen den zweiten Faktor des Ausdrucks; desgleichen geht jede der Primzahlen $\alpha, \beta, \ldots$ entweder in a, oder, da $2n$ ein Vielfaches von $\alpha-1$, $\beta-1, \ldots$ ist, dem *Fermat*schen Satze zufolge im zweiten Faktor des Ausdrucks auf, und somit hebt sich der gesamte Nenner von B_n heraus.

Einen weiteren, auf den Zähler von B_n bezüglichen Satz gab *v. Staudt* (in seiner zuletzt angeführten Arbeit; s. auch *Lipschitz*, Journ. f. Math. 96, S. 4). Sei nämlich:

$$2n = 2^{\varrho} \cdot p^a q^b \dots r^h s^k \dots, \tag{135}$$

wo $p, q, \dots$ diejenigen Primfaktoren von $2n$ bedeuten, die etwa zu den *v. Staudt*schen Primzahlen für $2n$ gehören, während $r, s \dots$ die übrigen sind, welche zu diesen nicht zählen. Ist dann g eine primitive Wurzel (mod. r), so folgt aus dem Umstande, daß nach Nummer 10 der Ausdruck

$$\frac{g^{2n} \cdot (g^{2n} - 1) \cdot B_n}{2n}$$

ganzzahlig ist, die Zahl $2n$ aber kein Vielfaches von $r - 1$ ist, daß weder g^{2n} noch $g^{2n} - 1$ durch r teilbar sein kann und demnach B_n oder vielmehr der Zähler von B_n durch r^h aufgehen muß. Da gleiches für die Primzahlpotenzen $s^k, \dots$ gelten muß, so findet sich der Satz:

Die Primfaktoren von $2n$ verteilen sich nach Angabe der Formel (135) in zwei Kategorien derart, daß die der ersteren Kategorie, die Primzahlen $2, p, q, \dots$ selbst einmal im Nenner von B_n, die in $2n$ aufgehenden Potenzen $r^h, s^k, \dots$ derjenigen der zweiten Kategorie aber im Zähler von B_n aufgehen.

Zweites Kapitel.

Rekurrente Zahlenreihen.

1. Die bisher behandelten Arten additiver Bildung von Zahlen sind nur besondere Fälle einer allgemeinen Bildungsweise, die wir nunmehr ausführlich besprechen wollen.

Man nennt eine Zahlenreihe

$$X_1, X_2, X_3, \dots \tag{1}$$

rekurrent, wenn jedes Glied derselben als lineare Funktion von voraufgehenden Gliedern der Reihe dargestellt werden kann. Der allgemeinste Ausdruck einer solchen Beziehung wäre die Formel

$$X_n = \xi_n + a_{i_1}^{(n)} X_{i_1} + a_{i_2}^{(n)} X_{i_2} + \dots + a_{i_{\lambda_n}}^{(n)} X_{i_{\lambda_n}}, \tag{2}$$

in welcher λ_n eine ganze Zahl $< n$ und $i_1, i_2, \dots i_{\lambda_n}$ irgend λ_n Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \dots n - 1$ bezeichnen; $\xi_n, a_{i_1}^{(n)}, a_{i_2}^{(n)}, \dots a_{i_{\lambda_n}}^{(n)}$ bedeuten gegebene Werte, welche wir für das Folgende im allgemeinen als ganze Zahlen voraussetzen. Somit würde im allgemeinen nicht nur das unabhängige Glied ξ_n des Ausdrucks (2), sondern auch die Anzahl

λ_n der Zahlen der Reihe (1), auf welche rekurriert wird, sowie die Skala der Koeffizienten $a_{i_1}^{(n)}, a_{i_2}^{(n)}, \ldots a_{i_{\lambda_n}}^{(n)}$ von einem Gliede der Reihe (1) zum folgenden veränderlich sein. Unter dieser allgemeinsten Voraussetzung sind die rekurrenten Zahlenreihen von *D. André* in einer größeren Arbeit untersucht und explizite Ausdrücke für ihre allgemeinen Glieder X_n hergeleitet worden (*D. André*, Annales de l'Ecole Normale, 2. sér. 7, 1878, S. 375). Hier werden wir uns auf einfachere Fälle beschränken und unsere Aufmerksamkeit mehr auf die zahlentheoretischen Eigenschaften der Zahlenreihen richten. Gewöhnlich versteht man unter einer rekurrenten Zahlenreihe speziell eine solche, bei der in der Formel (2) das unabhängige Glied fehlt und sowohl die Anzahl der Zahlen, auf welche rekurriert wird, als auch die Skala der Koeffizienten von einem Gliede zum anderen unveränderlich bleibt, mithin die rekurrente Beziehung die folgende Form hat:

$$X_n = a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2} + \cdots + a_\lambda X_{n-\lambda}. \tag{3}$$

Rekurrente Reihen dieser Art sind zuerst von *Cassini* bemerkt, demnächst von *Moivre*, der ihnen den Namen gab, näher untersucht worden; später zogen *Euler* und *Lagrange* sie in Betracht, neuerdings hat besonders *E. Lucas* die zahlentheoretischen Eigenschaften derselben zum Gegenstand der Untersuchung gemacht.[1]) Bevor wir aber zu ihrer Betrachtung übergehen, erörtern wir noch ein paar Fälle anderer Art, die gleichfalls ein besonderes zahlentheoretisches Interesse darbieten.

2. Zuerst betrachten wir eine Reihe von Zahlen $X, X_1, X_2, X_3, \ldots$ welche durch die folgenden Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} X_2 = a_1 X_1 + X \\ X_3 = a_2 X_2 + X_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_n = a_{n-1} X_{n-1} + X_{n-2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right. \tag{4}$$

miteinander verbunden sind. Sie sind zuerst von *Euler* untersucht worden[2]) und haben ihre besondere Bedeutung für die Theorie der Kettenbrüche; die rekurrente Beziehung hat in diesem Falle eine feste

1) *Cassini* in Hist. de l'Acad. de France 1680, S. 309; *Moivre,* Miscellanea analytica, S. 27; *Euler,* Introd. in Analysin I Kap. 13 und 17; *Lagrange,* Oeuvres 1, 3, 5; *E. Lucas,* Journ. amer. of Math. I (1878), S. 184, 289.

2) *Euler,* Comment. Acad. Petrop. 7 (1734/35), S. 46; Nov. Comm. Petrop. 11 (1765), S. 28, oder Comm. Arithm. coll. I, S. 11 resp. 316. Die hier folgenden, schon im ersten Teile unseres Werkes S. 102—104 etwas anders dargestellten Betrachtungen werden des Zusammenhangs wegen wiederholt.

Anzahl von Zahlen, auf welche rekurriert wird, doch eine wechselnde Skala, deren Glieder a_i als ganze Zahlen gedacht werden. Indem man nun den Wert von X_2 aus der ersten der Gleichungen (4) in die zweite substituiert, findet man

$$X_3 = (a_2 a_1 + 1) X_1 + a_2 X,$$

diesen in die folgende Gleichung eintragend erhält man

$$X_4 = (a_3(a_2 a_1 + 1) + a_1)X_1 + (a_3 a_2 + 1)X$$

und, wenn man so weitergeht, jede der Zahlen $X_2, X_3, X_4, \ldots$ als eine homogene lineare Funktion von X_1, X, deren Koeffizienten, weil aus den ganzen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nur durch Additionen und Multiplikationen gebildet, gleichfalls ganze Zahlen sein werden, insbesondere positive ganze Zahlen, wenn jene es sind. So findet man also schließlich auch die Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} X_{n-2} = A_1'' X_1 + A'' X \\ X_{n-1} = A_1' X_1' + A' X \\ X_n \quad = A_1 X_1 + A X. \end{cases}$$

Für die Koeffizienten A_1, A, welche — von X_1, X unabhängig — lediglich durch die Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ bestimmt sind, hat *Gauss* ein besonderes Symbol eingeführt (Disquis. arithm. art. 27); mit ihm setzen wir

$$(6)\qquad A_1 = [a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}]$$

und nennen dies Symbol eine *Gauss*sche Klammer. Es handelt sich darum, die Bildung dieses Ausdrucks für A_1, mit welcher auch diejenige von A erhalten werden wird, näher zu bestimmen, denn, wenn wir das Gesetz dieser Koeffizienten ermittelt haben, so liefert uns die letzte der Gleichungen (5) das allgemeine Glied X_n der vorliegenden rekurrenten Reihe, deren erste zwei Glieder X, X_1 willkürlich gewählt werden können. Zu diesem Zwecke bemerke man, daß offenbar in gleicher Weise

$$A_1' = [a_1, a_2, \ldots a_{n-2}]$$
$$A_1'' = [a_1, a_2, \ldots a_{n-3}]$$

gesetzt werden darf. Werden nun speziell die Zahlen X, X_1 gleich Null und Eins gewählt, so erhalten nach (5) die zugehörigen Zahlen X_{n-2}, X_{n-1}, X_n resp. die Werte A_1'', A_1', A_1 und, da zwischen jenen, welche speziellen Werte X, X_1 auch besitzen, die letzte der Gleichungen (4) stattfindet, so ergibt sich die Beziehung

$$A_1 = a_{n-1} A_1' + A_1'',$$

d. h. das Bildungsgesetz:

(7) $[a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}] = [a_1, a_2, \ldots a_{n-2}] \cdot a_{n-1} + [a_1, a_2, \ldots a_{n-3}]$

für die Gaußischen Klammern.

Andererseits leuchtet ein, daß, wenn die erste der Gleichungen (4) unterdrückt wird, sich entsprechend der letzten der Gleichungen (5) eine Beziehung ergeben wird von der Form

(8) $$X_n = B_1 X_2 + B X_1,$$

in welcher nun

(9) $$B_1 = [a_2, a_3, \ldots a_{n-1}]$$

zu setzen ist. Da aber aus (8) mit Rücksicht auf den Wert von X_2 die Gleichung

(10) $$X_n = (a_1 B_1 + B) X_1 + B_1 X$$

hervorgeht, welche mit der letzten der Gleichungen (5) identisch sein muß, so liefert die Vergleichung dieser Gleichung mit der hier gefundenen die Beziehungen

(11) $$A_1 = a_1 B_1 + B, \; A = B_1$$

also

(12) $$A = [a_2, a_3, \ldots a_{n-1}]$$

und dementsprechend auch

$$B = [a_3, a_4, \ldots a_{n-1}],$$

endlich also nach (11) und (6) die Formel

(13) $[a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}] = a_1 \cdot [a_2, a_3, \ldots a_{n-1}] + [a_3, a_4, \ldots a_{n-1}],$

welche gleichfalls ein Bildungsgesetz für die *Gauss*ischen Klammern zum Ausdrucke bringt.

Die beiden Gesetze (7) und (13) lassen nun unmittelbar die Gleichheit

(14) $$[a_1, a_2, \ldots a_{n-1}] = [a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_1]$$

erkennen. Nimmt man nämlich an, diese Gleichheit stehe schon fest für Symbole, deren Elementenzahl kleiner ist als $n-1$, so darf man die Formel (13) auch folgendermaßen schreiben:

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}] = [a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_2] \cdot a_1 + [a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_3],$$

wo nun für die rechte Seite dem Gesetze (7) gemäß auch

$$[a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_2, a_1]$$

gesetzt werden darf; demnach gilt unter der gemachten Voraussetzung auch die behauptete Gleichheit; da aber für zwei Elemente a_1, a_2 in der Tat

$$[a_1, a_2] = a_1 \cdot a_2 + 1 = a_2 \cdot a_1 + 1 = [a_2, a_1]$$

ist, so ist hiermit die Formel (14) als allgemein gültig erwiesen.

Ebenso leicht erkennt man die Richtigkeit nachstehender Gleichung:

$$(15) \quad [-a_1, -a_2, \ldots, -a_{n-1}] = (-1)^{n-1} \cdot [a_1, a_2, \ldots a_{n-1}].$$

Denn nach dem allgemeinen Gesetze (13) ist das Symbol zur Linken gleich

$$-a_1 \cdot [-a_2, -a_3, \ldots, -a_{n-1}] + [-a_3, -a_4, \ldots, -a_{n-1}];$$

wird also angenommen, daß die Beziehung (15) schon für Klammern mit weniger als $n-1$ Elementen richtig sei, so ergibt sich für den vorigen Ausdruck der Wert

$$(-1)^{n-1} \cdot a_1 [a_2, a_3, \ldots a_{n-1}] + (-1)^{n-3} \cdot [a_3, a_4, \ldots a_{n-1}],$$

der nach (13) mit der rechten Seite der Gleichung (15) identisch ist. Da nun für zwei Elemente

$$[-a_1, -a_2] = (-a_1) \cdot (-a_2) + 1 = (a_1 \cdot a_2 + 1) = [a_1, a_2]$$

gefunden wird, so findet die Formel (15) allgemein statt.

Noch hat man die Beziehung

$$(16) \qquad [1, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}] = [a_1 + 1, a_2, \ldots a_{n-1}].$$

In der Tat ist wegen (13) die linke Seite zunächst gleich

$$[a_1, a_2, \ldots a_{n-1}] + [a_2, a_3, \ldots a_{n-1}]$$

und dies nach demselben Bildungsgesetze gleich

$$(a_1 + 1) \cdot [a_2, a_3, \ldots a_{n-1}] + [a_3, a_4, \ldots a_{n-1}],$$

wofür wieder diesem Bildungsgesetze gemäß die rechte Seite der Gleichung (16) gesetzt werden darf.

Bemerken wir endlich, daß die Reihe der Gleichungen (4) in umgekehrter Ordnung geschrieben werden kann, wie folgt:

$$\begin{aligned} X_{n-2} &= -a_{n-1} \cdot X_{n-1} + X_n \\ X_{n-3} &= -a_{n-2} \cdot X_{n-2} + X_{n-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_1 &= -a_2 X_2 + X_3 \\ X &= -a_1 X_1 + X_2, \end{aligned}$$

so wird daraus, entsprechend den Formeln (5), (6), (12), (15) sogleich

$$X = (-1)^{n-1} \cdot [a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_1] \cdot X_{n-1} + (-1)^{n-2} \cdot [a_{n-2}, \ldots a_1] X_n$$

gefunden, während andererseits die letzten beiden der Formeln (5) durch Elimination von X_1 die Gleichung

$$(A' A_1 - A A_1') \cdot X = A_1 \cdot X_{n-1} - A_1' \cdot X_n$$

liefern. Da in diesen beiden Gleichungen wegen (6) und (14) die Koeffizienten von X_{n-1} bis auf den Faktor $(-1)^{n-1}$ übereinstimmen, so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten von X unmittelbar die Gleichheit

$$A' A_1 - A A_1' = (-1)^{n-1}$$

oder durch Einsetzen der *Gauss*ischen Klammern für A und A_1 sowie der entsprechenden für A' und A_1' die neue Beziehung

$$(17)\quad [a_2, a_3, \ldots a_{n-2}] \cdot [a_1, a_2, \ldots a_{n-1}] - [a_1, a_2, \ldots a_{n-2}] \cdot [a_2, \ldots a_{n-1}] = (-1)^{n-1}.$$

Aus ihr erschließt man sofort, daß die Koeffizienten A, A_1 relative Primzahlen sind.

Es wurde schon erwähnt, daß die vorliegende rekurrente Reihe zur Theorie der Kettenbrüche in naher Beziehung steht. In der Tat läßt sich ohne Mühe zeigen, daß der Kettenbruch

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}) = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}},$$

welcher unter der Voraussetzung, daß die a_i positive ganze Zahlen sind, einen positiven rationalen Wert darstellt, gleich $\frac{A_1}{A}$, d. i. gleich dem Quotienten zweier *Gauss*ischen Klammern ist:

$$(18)\qquad (a_1, a_2, \ldots a_{n-1}) = \frac{[a_1, a_2, \ldots a_{n-1}]}{[a_2, a_3, \ldots a_{n-1}]}.$$

Denn man hat

$$(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}) = a_1 + \frac{1}{(a_2, a_3, \ldots a_{n-1})};$$

nimmt man daher als schon erwiesen an, daß

$$(a_2, a_3, \ldots a_{n-1}) = \frac{[a_2, a_3, \ldots a_{n-1}]}{[a_3, \ldots a_{n-1}]}$$

ist, was für zwei Elemente jedenfalls richtig ist, da

$$(a_2, a_3) = a_2 + \frac{1}{a_3} = \frac{a_2 a_3 + 1}{a_3} = \frac{[a_2, a_3]}{[a_3]}$$

gefunden wird, so besteht die Gleichung

$$(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}) = a_1 + \frac{[a_3, a_4, \ldots a_{n-1}]}{[a_2, a_3, \ldots a_{n-1}]} = \frac{a_1 \cdot [a_2, a_3, \ldots a_{n-1}] + [a_3, a_4, \ldots a_{n-1}]}{[a_2, a_3, \ldots a_{n-1}]},$$

d. h. mit Rücksicht auf (13) die behauptete Formel (18), die hiermit allgemein bewiesen ist. Man schließt aus ihr die Tatsache, daß die beiden *Gauss*ischen Klammern

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}], \quad [a_2, a_3, \ldots a_{n-1}]$$

Zähler und Nenner des $n-1^{\text{ten}}$ Näherungsbruchs für den beliebig weit fortgesetzten Kettenbruch $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ sind, falls jener auf seine einfachste Benennung gebracht wird.

3. Wir behandeln an zweiter Stelle eine rekurrente Reihe, welche eng mit den *Gauss*ischen Klammern zusammenhängt und von *J. Hermes* (Math. Annal. 45, 1894, S. 371) als *Farey*sche Zahlenreihe benannt worden ist. Dies ist die Reihe

$$(19) \qquad X_1, X_2, X_3, \ldots X_n, \ldots$$

mit dem Anfangsgliede $X_1 = 1$, deren allgemeines Glied X_n, so oft

$$(20) \qquad 2^\nu < n \overline{\gtrless} 2^{\nu+1}$$

ist, durch die Gleichung

$$(21) \qquad X_n = X_{n-2^\nu} + X_{2^{\nu+1}+1-n}$$

mit voraufgehenden Gliedern verbunden ist. Statt dieser Rekursionsformel darf offenbar auch die folgende gesetzt werden:

$$(22) \qquad X_{2^\nu+h} = X_h + X_{2^\nu-h+1}$$
$$(\text{für } h = 1, 2, \ldots 2^\nu).$$

Die so definierte Reihe zerfällt hiernach in Abteilungen, welche den sukzessiven Werten $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$ entsprechen und bezw $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ Glieder enthalten; die anfänglichen Glieder der Reihe sind, in Abteilungen geschrieben, die folgenden:

$$1\,|\,2\,|\,3, 3\,|\,4, 5, 5, 4\,|\,5, 7, 8, 7, 7, 8, 7, 5\,|\ldots$$

Die $2^{\nu+1}$ Glieder in der Abteilung, welche dem Exponenten $\nu+1$ entspricht, können als bestimmt angesehen werden durch die Glieder aller voraufgehenden Abteilungen mit Koeffizienten, welche mit dem Werte von h wechseln, so daß hier ein Fall der allgemeinen Rekursion vorliegt, wie wir sie anfangs erwähnten. Um nun das Bildungsgesetz für das allgemeine Glied der *Farey*schen Zahlenreihe aufzustellen und zahlentheoretische Eigenschaften derselben zu erhärten, bedarf es eines Satzes über eine eigentümliche Darstellungsweise jeder positiven ganzen Zahl, den wir zu diesem Zwecke zunächst beweisen.

Jede positive ganze Zahl n kann auf eine einzige Weise als ein Aggregat aus einer ungeraden Anzahl von ab-

wechselnd positiv und negativ genommenen wachsenden Potenzen der Zwei, also in der Form

$$n = 2^{k_1} - 2^{k_2} + 2^{k_3} - \cdots + 2^{k_{2i+1}} \tag{23}$$
$$(0 \overline{\gtrless} k_1 < k_2 < k_3 \ldots < k_{2i+1})$$

dargestellt werden. In der Tat: sei 2^h die erste Potenz von 2, welche gleich oder größer ist als n, so daß

$$2^h \overline{>} n > 2^{h-1} \tag{24}$$

ist. Dann ist $n = 2^h - n'$, wo $n' = 2^h - n = 2^{h-1} - (n - 2^{h-1})$ entweder Null oder doch $< 2^{h-1}$ ist. Im ersteren Falle hat man die gemeinte Darstellung $n = 2^h$; im letzteren bestimme man h' so, daß

$$2^{h'} \overline{>} n' > 2^{h'-1},$$

dann ist $n' = 2^{h'} - n''$, wo $n'' = 2^{h'} - n'$ entweder Null oder doch $< 2^{h'-1}$ sein wird. Ist n'' Null, so ist doch $h' < h - 1$; dann schreibe man für $n' = 2^{h'}$ die Differenz $2^{h'+1} - 2^{h'}$ und erhält die gewünschte Darstellung

$$n = 2^h - 2^{h'+1} + 2^{h'}$$

für n. Im entgegengesetzten Falle kann man in gleicher Weise fortfahren und gelangt so jedenfalls zu einer Darstellung von der Form (23), wenn man die Reihenfolge der Glieder umkehrt. Eine solche Darstellung ist aber auch nur eindeutig vorhanden. Denn aus (23) ergibt sich zunächst, sobald der Ausdruck zur Rechten mehr als ein Glied aufweist, also n von der Potenz $2^{k_{2i+1}}$ verschieden ist,

$$n < 2^{k_{2i+1}} \text{ und } n > 2^{k_{2i+1}} - 2^{k_{2i}},$$

d. i.

$$n > 2^{k_{2i+1}-1} + (2^{k_{2i+1}-1} - 2^{k_{2i}}) > 2^{k_{2i+1}-1},$$

da wegen $k_{2i} < k_{2i+1}$ die Klammer sicher nicht negativ ist; man sieht also, daß $2^{k_{2i+1}}$ die erste Potenz von 2 ist, welche größer ist als n, also $k_{2i+1} = h$. Setzt man nun

$$n' = 2^{k_{2i+1}} - n$$

also

$$n' = 2^{k_{2i}} - 2^{k_{2i-1}} + 2^{k_{2i-2}} - \cdots - 2^{k_1},$$

so ergibt sich

$$n' < 2^{k_{2i}} \quad \text{und} \quad n' > 2^{k_{2i}} - 2^{k_{2i-1}},$$

d. h. $n' > 2^{k_{2i}-1}$, mithin $2^{k_{2i}}$ als die erste Potenz von 2, welche größer ist als n', d. i. $k_{2i} = h'$ usw. Man erkennt daher, daß die Exponenten der Darstellung (23) genau die vorher bestimmten Zahlen $h, h', h'', \ldots$ sein müssen und die zuvor nachgewiesene Darstellung die einzig mögliche ist.

Wir leiten hieraus zuvörderst einen wichtigen Satz her, auf welchen wir im folgenden Kapitel von anderen Seiten her werden geführt werden. Man bemerke, daß in der Darstellung (23) die Zahlen

$$(25)\quad s_1 = k_1,\quad s_2 = k_2 - k_1,\quad s_3 = k_3 - k_2, \ldots, s_{2i+1} = k_{2i+1} - k_{2i},$$

welche wir die Spatien der Darstellung nennen wollen, wesentlich positiv (die erste s_1 möglicherweise auch Null) sind, während die Spatiensumme

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{2i+1} = k_{2i+1},$$

d. h. nach der Bedeutung von k_{2i+1}

$$(26)\qquad s_1 + s_2 + \cdots + s_{2i+1} = h$$

ist. Jeder Gleichung von der Form (23), in welcher $k_{2i+1} = h$ ist, entspricht somit eine Zerfällung der Zahl h in eine ungerade Anzahl positiver Summanden $s_1, s_2, \ldots s_{2i+1}$ (deren erster auch Null sein kann); umgekehrt liefert aber auch jede solche Zerfällung eine Gleichung von der Form (23), in welcher $k_{2i+1} = h$ ist und die übrigen Exponenten k_m durch die Gleichungen (25) bestimmt sind. Nun ist vorher gezeigt, daß jeder Ausdruck von der Form (23), in welchem $k_{2i+1} = h$ ist, eine Zahl n darstellt, für welche die Ungleichheiten (24) bestehen, daß aber auch umgekehrt jede solche Zahl auf eine einzige Weise in jener Form mit $k_{2i+1} = h$ dargestellt werden kann. Hiernach gibt es offenbar soviel Zerfällungen der Zahl h von der angegebenen Art, als es Zahlen n gibt, welche den Ungleichheiten (24) genügen, d. h. 2^{h-1}. Man bemerke aber dabei, daß die Summanden in der Zerfällung von h, d. h. die Spatien des Ausdrucks (23) nicht voneinander verschieden zu sein brauchen, sowie daß zwei verschiedene Ausdrücke (23), bei denen zwei Spatien, welche in dem einen die Werte s_a, s_b haben, im andern gleich s_b, s_a sind, zwei Zerfällungen von h geben, die sich nur durch die Vertauschung der Summanden s_a, s_b unterscheiden. Mit Beachtung hiervon läßt sich das gewonnene Ergebnis in folgendem Satze zum Ausdruck bringen:

Die Anzahl der Zerfällungen einer positiven ganzen Zahl h in eine ungerade Anzahl positiver (gleicher oder ungleicher) Summanden s_1, s_2, $s_3, \ldots$, deren erster auch Null sein darf, d. h. die Anzahl ihrer Zerfällungen in positive Summanden überhaupt beträgt 2^{h-1}, wenn Zerfällungen, die aus denselben, aber verschieden geordneten Summanden bestehen, als verschieden gezählt werden.

4. Dem ersten Satze der vorigen Nummer zufolge dürfen wir die Zahl n als eine Funktion der Exponenten k_i oder auch, da diese nach

den Formeln (25) durch die Spatien bestimmt sind, als eine Funktion der Spatien s_i auffassen und wollen sie als solche durch das Symbol:

(27) $$n = \{s_1, s_2, \ldots s_{2i+1}\}$$

bezeichnen. Dies vorausgeschickt, besteht für die *Farey*sche Zahlenreihe folgender Satz:

Das allgemeine Glied X_n der *Farey*schen Zahlenreihe ist gleich der *Gauss*ischen Klammer

$$[1 + s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2i+1}],$$

wenn sein Index:

$$n = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2i+1}\}$$

ist. Zum Beweise dieses Satzes bemerken wir zuerst, daß nach der Rekursionsformel (22), wenn darin $\nu - 1$ statt ν gesetzt wird:

$$X_{2^\nu} = X_{2^{\nu-1}} + X_1 = X_{2^{\nu-1}} + 1$$

gefunden wird, eine Formel, aus welcher, wenn allmählich $\nu = 1, 2, \ldots, s_1$ gesetzt und dann die entstehenden Gleichungen addiert werden, sich

(28) $$X_{\{s_1\}} = X_{2^{s_1}} = s_1 + 1 = [1 + s_1]$$

ergibt. Ferner erhält man nach derselben Rekursionsformel, wenn darin $\nu = s_1 + s_2 - 1$, $h = 2^{s_1+s_2-1} - 2^{s_1} + 1$ gesetzt wird:

$$X_{\{0, s_1, s_2\}} \quad \text{d. i.} \quad X_{1 - 2^{s_1} + 2^{s_1+s_2}}$$

gleich

$$X_{1 - 2^{s_1} + 2^{s_1+s_2-1}} + X_{2^{s_1}},$$

woraus durch s_2 malige Wiederholung der Rekursion endlich:

(29) $$X_{\{0, s_1, s_2\}} = 1 + s_2 \cdot X_{2^{s_1}} = 1 + s_2(s_1 + 1) = [1 + s_1, s_2]$$

hervorgeht. Wir nehmen nun an, man habe bereits festgestellt, daß

(30) $$X_{\{s_1, s_2, \ldots, s_{2i-1}\}} = [1 + s_1, s_2, \ldots, s_{2i-1}]$$

und

(31) $$X_{\{0, s_1, s_2, \ldots, s_{2i}\}} = [1 + s_1, s_2, \ldots, s_{2i}]$$

sei, so ergibt sich, da

$$X_{\{s_1, s_2, \ldots, s_{2i+1}\}} \quad \text{d. i.} \quad X_{2^{s_1} - 2^{s_1+s_2} + \cdots + 2^{s_1+s_2+\cdots+s_{2i+1}}}$$

nach der Rekursionsformel (22), wenn darin

$$\nu = s_1 + s_2 + \cdots + s_{2i+1} - 1, \quad h = 2^{s_1} - 2^{s_1+s_2} + \cdots + 2^{s_1+s_2+\cdots+s_{2i+1}-1}$$

gesetzt wird, gleich

$$X_{\{s_1, s_2, \ldots, s_{2i+1}-1\}} + X_{\{0, s_1, s_2, \ldots, s_{2i}\}}$$

und nun durch s_{2i+1}malige Wiederholung der Rekursion gleich

$$X_{\{s_1, s_2, \ldots, s_{2i-1}\}} + s_{2i+1} X_{\{0, s_1 s_2 \ldots s_{2i}\}}$$

gefunden wird, die Gleichung:

$$X_{\{s_1, s_2, \ldots, s_{2i+1}\}} = [1 + s_1, s_2, \ldots, s_{2i-1}] + s_{2i+1} \cdot [1 + s_1, s_2, \ldots s_{2i}],$$

d. h. nach der Formel (7):

$$X_{\{s_1, s_2, \ldots, s_{2i+1}\}} = [1 + s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2i+1}]. \tag{32}$$

Auf gleiche Weise geht mittels der Rekursionsformel (22), wenn darin

$\nu = s_1 + s_2 + \cdots + s_{2i+2} - 1, \quad h = 1 - 2^{s_1} + 2^{s_1+s_2} - \cdots + 2^{s_1+s_2+\cdots+s_{2i+2}-1}$

gesetzt wird,

$$X_{\{0, s_1, \ldots, s_{2i+2}\}}$$

zunächst gleich:

$$X_{\{0, s_1, s_2, \ldots s_{2i+2}-1\}} + X_{\{s_1, s_2, \ldots, s_{2i+1}\}},$$

also durch s_{2i+2} malige Wiederholung der Rekursion gleich

$$X_{\{0, s_1, s_2, \ldots, s_{2i}\}} + s_{2i+2} \cdot X_{\{s_1, s_2, \ldots, s_{2i+1}\}}$$

hervor. Mit Rücksicht auf die Werte (31), (32) erhält man also

$$X_{\{0, s_1, s_2, \ldots, s_{2i+2}\}} = [1 + s_1, s_2, \ldots, s_{2i}] + s_{2i+2} \cdot [1 + s_1, s_2, \ldots, s_{2i+1}],$$

was wegen Formel (7) einfacher geschrieben werden kann, wie folgt:

$$X_{\{0, s_1, s_2, \ldots s_{2i+2}\}} = [1 + s_1, s_2, \ldots s_{2i+2}]. \tag{33}$$

Aus den vorausgesetzten Formeln (30), (31) fließen also die auf je zwei weitere Elemente ausgedehnten Formeln (32), (33), und man erkennt daher auf Grund der schon festgestellten Gleichungen (28), (29) die allgemeine Gültigkeit der vorausgesetzten, und somit auch diejenige des oben behaupteten Satzes.

Diesem Satze zufolge ist jede Zahl X_n der *Farey*schen Zahlenreihe, deren Index die Spatiensumme h zukommt, gleich einer ungeraden *Gauß*ischen Klammer, das soll sagen: einer *Gauß*ischen Klammer mit einer ungeraden Anzahl von Elementen, die sämtlich positiv sind und $h + 1$ zur Summe haben. Da umgekehrt jeder Zerfällung

$$\sigma_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_{2i+1} = h + 1$$

der Zahl $h + 1$ in eine ungerade Anzahl von lauter positiven Summanden, indem $\sigma_1 = 1 + s_1$ gesetzt wird, eine Zerfällung von h in

eine ungerade Anzahl positiver Summanden, deren erster s_1 auch gleich Null sein kann, also auch ein Index n mit der Spatiensumme h entspricht, so kommt auch jeder ungeraden *Gauß*ischen Klammer der bezeichneten Art eine bestimmte der *Farey*schen Zahlen zu, deren Index n die Spatiensumme h hat. Somit können sämtliche ungerade *Gauß*ischen Klammern in Gruppen verteilt werden, welche den Abteilungen der *Farey*schen Reihe genau entsprechen, indem alle ungeraden *Gauß*ischen Klammern mit der Elementensumme $h + 1$ den *Farey*schen Zahlen, deren Index die Spatiensumme h hat, d. h. welche die $(h+1)^{\text{te}}$ Abteilung der *Farey*schen Zahlenreihe bilden, eindeutig zugeordnet und gleichwertig sind.

Hiermit verbindet sich die Eigenschaft der *Farey*schen Zahlenreihe, jede ihrer Zahlen m so oft aufzuweisen, als es Zahlen kleiner als m und prim zu m gibt, also $\varphi(m)$mal. Ist nämlich m eine Zahl der *Farey*schen Reihe, also etwa $m = X_n$, so ist, wenn

$$n = \{s_1, s_2, \ldots s_{2i+1}\}$$

gesetzt wird,

$$m = [1 + s_1, s_2, \ldots s_{2i+1}];$$

setzt man dann

$$\mu = [s_2, s_3, \ldots s_{2i+1}],$$

so ist

$$\frac{m}{\mu} = \frac{[1 + s_1, s_2, \ldots s_{2i+1}]}{[s_2, s_3, \ldots s_{2i+1}]}$$

der reduzierte Wert des Kettenbruchs

$$(1 + s_1, s_2, s_3, \ldots s_{2i+1})$$

mit einer ungeraden Anzahl positiver Elemente, und demnach $\frac{m}{\mu}$ ein unechter Bruch, dessen Nenner μ eine der Zahlen ist, welche kleiner als m und prim zu m sind. Jede Zahl der *Farey*schen Reihe, welche gleich m ist, wird mithin gefunden, wenn die unechten Brüche $\frac{m}{\mu}$ dieser Art, was bekanntlich stets auf eine einzige Art geschehen kann, in einen gewöhnlichen Kettenbruch mit ungerader Anzahl von Gliedern:

$$(\sigma_1, s_2, s_3, \ldots s_{2i+1})$$

entwickelt und dann der *Farey*schen Reihe das Glied mit dem Index

$$n = \{s_1, s_2, s_3, \ldots s_{2i+1}\},$$

wo $s_1 = \sigma_1 - 1$ ist, entnommen wird. Da es solcher Brüche $\frac{m}{\mu}$ genau $\varphi(m)$ gibt und aus dem zugehörigen Kettenbruche jedesmal so auch wirklich ein Glied $X_n = m$ der *Farey*schen Reihe entsteht, da aus der Gleichung:

$$\frac{m}{\mu} = (\sigma_1, s_2, s_3, \ldots s_{2i+1}) = \frac{[1 + s_1, s_2, \ldots s_{2i+1}]}{[s_2, s_3, \ldots s_{2i+1}]}$$

sich

$$m = [1 + s_1, s_2, s_3, \ldots s_{2i+1}] = X_n$$

findet, so gibt es in der Tat genau $\varphi(m)$ Glieder dieser Reihe, welche den Wert m haben.

5. Nunmehr wenden wir uns zur Betrachtung der gewöhnlich so genannten rekurrenten Zahlenreihen, deren Skala nach Anzahl und Wert ihrer Glieder eine feste ist, die also durch eine Beziehung von der Form

$$X_{n+i} = a_1 X_{n+i-1} + a_2 X_{n+i-2} + \cdots + a_n X_i \tag{34}$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

mit konstanten (ganzzahligen) Koeffizienten a_k miteinander verbunden sind, wobei offenbar die ersten n Glieder $X_1, X_2, \ldots X_n$ der Reihe willkürlich bleiben. Solche Beziehung fand sich zum erstenmal gelegentlich der Entwickelung rational gebrochener Funktionen einer Veränderlichen x nach den steigenden Potenzen der letzteren. Setzt man nämlich die Funktion

$$\frac{1}{1 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_n x^n} \tag{35}$$

nach steigenden Potenzen von x in eine Reihe entwickelt gleich

$$X_1 + X_2 \cdot x + X_3 \cdot x^2 + \cdots, \tag{36}$$

so erhält man durch Multiplikation mit dem Nenner die Identität

$$1 = (1 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_n x^n)\,(X_1 + X_2 \cdot x + X_3 \cdot x^2 + \cdots),$$

aus welcher nun durch Vergleichung der Koeffizienten der Potenzen von x zur Rechten und Linken die Gleichungen

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \cdot X_1 \\
0 &= -a_1 X_1 + X_2 \\
0 &= -a_2 X_1 - a_1 X_2 + X_3 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= -a_{n-1} X_1 - a_{n-2} X_2 - \cdots - a_1 X_{n-1} + X_n \\
0 &= -a_n X_1 - a_{n-1} X_2 - \cdots - a_1 X_n + X_{n+1} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

hervorgehen. Die ersten n dieser Gleichungen bestimmen die Werte der Koeffizienten $X_1, X_2, \ldots X_n$, während die ferneren Koeffizienten $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ mittels der Rekursionsformel (34) aus jenen entstehen. Man sieht: die Skala der Rekursion ist nichts anderes als die Reihe der Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ der

sogenannten erzeugenden Funktion, nämlich des Nenners von (35).

Denkt man sich statt des Ausdrucks (35) den folgenden:

$$(37) \qquad \frac{a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}}{1 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n},$$

dessen Zähler die mit entgegengesetztem Vorzeichen genommene Ableitung der erzeugenden Funktion ist, in eine Potenzreihe (36) entwickelt, so erhält man auf gleichem Wege für die Koeffizienten X_n dieser letzteren die Bedingungsgleichungen:

$$(38) \qquad \begin{cases} a_1 = 1 \cdot X_1 \\ 2a_2 = -a_1X_1 + X_2 \\ 3a_3 = -a_2X_1 - a_1X_2 + X_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ na_n = -a_{n-1}X_1 - a_{n-2}X_2 - \cdots - a_1X_{n-1} + X_n \\ 0 = -a_nX_1 - a_{n-1}X_2 - \cdots - a_1X_n + X_{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

denen zufolge wieder die Koeffizienten $X_1, X_2, \ldots X_n$ aus den ersten n derselben bestimmt werden, jedoch andere Werte erhalten wie zuvor, aus diesen aber auch jetzt wieder die ferneren Koeffizienten $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ mittels der Rekursionsformel (34) hervorgehen. Hier erkennt man leicht die Bedeutung der Entwickelungskoeffizienten, wenn man den Bruch (37) in bekannter Weise in seine Partialbrüche zerlegt. Bezeichnen nämlich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$(39) \qquad y^n - a_1y^{n-1} - a_2y^{n-2} - \cdots - a_n = 0,$$

deren linke Seite aus der erzeugenden Funktion entsteht, wenn x durch $\frac{1}{y}$ ersetzt und mit y^n multipliziert wird, so liefert die Partialbruchzerlegung unter der Voraussetzung, die wir erfüllt denken wollen, daß alle Wurzeln verschieden sind, die einfache Formel:

$$\frac{a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}}{1 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_kx}$$

und aus ihr entsteht, wenn das allgemeine Glied $\frac{\alpha_k}{1 - \alpha_kx}$ nach Potenzen von x entwickelt und die Summe der h^{ten} Potenzen aller Wurzeln:

$$(40) \qquad \alpha_1^h + \alpha_2^h + \cdots + \alpha_n^h = S_h$$

gesetzt wird, die folgende Entwickelung des Ausdrucks (37):

$$S_1 + S_2 \cdot x + S_3 \cdot x^2 + \cdots,$$

welche mit der Entwickelung (36) identisch sein muß und daher

zeigt, daß die durch die Formeln (38) bestimmten Koeffizienten X_h die Potenzsummen S_h der Wurzeln bedeuten. In der Tat sind die Formeln (38) nichts anderes als die aus der Theorie der algebraischen Gleichungen her bekannten *Newton*schen Formeln.

Beispielsweise findet man, da die Gleichung

$$y^2 - y - 1 = 0$$

die zwei voneinander verschiedenen Wurzeln

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

besitzt, die Entwickelung

$$\frac{1+2x}{1-x-x^2} = S_1 + S_2 \cdot x + S_3 \cdot x^2 + \cdots,$$

worin

$$S_h = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^h + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^h \tag{41}$$

ist. Die Anfangswerte S_1, S_2 der Zahlenreihe

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ \ldots \tag{42}$$

sind $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, die folgenden Glieder bestimmen sich aus ihnen mittels der rekurrenten Beziehung

$$S_{i+2} = S_{i+1} + S_i \tag{43}$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

und es entsteht so die Zahlenreihe

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ 199,\ \ldots, \tag{44}$$

die zuerst bei *Leonardo von Pisa (Fibonacci)* sich findet und daher nach ihm benannt werden soll.

6. Was sich so auf analytischem Wege dargeboten hat, soll nun im folgenden mit rein arithmetischen Mitteln ausführlich behandelt werden. Sei

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\ \ldots \tag{45}$$

eine rekurrente Zahlenreihe, für deren Glieder die Beziehung

$$X_{n+i} = a_1 X_{n+i-1} + a_2 X_{n+i-2} + \cdots + a_n X_i \tag{46}$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

vorgeschrieben ist; sie entsteht aus der Gleichung

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n, \tag{47}$$

wenn darin allgemein x^h durch X_{h+i} ersetzt wird; die Koeffizienten dieser Gleichung oder, wie wir kürzer sagen wollen, die Glei-

chung selbst ist die Skala der Rekursion. Die Wurzeln der Gleichung, deren Koeffizienten einer früheren Übereinkunft gemäß stets hinfort ganzzahlig gedacht werden, seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Durch die rekurrente Beziehung sind die Zahlen der Reihe (45) von der $n+1^{\text{ten}}$ an durch die ersten n Zahlen $X_1, X_2, \ldots X_n$ völlig bestimmt und erhalten ganzzahlige Werte, wenn die letzteren als ganze Zahlen gewählt werden. Da diese Wahl aber auf unendlich verschiedene Weise geschehen kann, so gibt es entsprechend diesen verschiedenen Anfangswerten auch unendlich viel rekurrente Zahlenreihen (45), welche doch der gleichen Rekursionsformel (46) gehorchen. Z. B. wird die Zahlenreihe (42) der vorigen Nummer von der Reihe von *Fibonacci* durchaus verschieden, wenn dieselbe Rekursionsformel (43) mit den anderen Anfangswerten $S_1 = 0$, $S_2 = 1$ verbunden wird; man erhält dann die Reihe

$$(48) \qquad 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots,$$

welche als *Lamé*sche Zahlenreihe benannt werden mag. Es muß jedoch bemerkt werden, daß die verschiedenen, derselben Rekursionsformel (46) gehorchenden Zahlenreihen nicht unabhängig voneinander sind.

In der Tat, denken wir uns n verschiedene Zahlenreihen:

$$(49) \qquad X_1^{(h)}, X_2^{(h)}, X_3^{(h)}, \ldots \quad (h = 1, 2, 3, \ldots n),$$

welche sich nur durch die verschiedenen Anfangswerte

$$(49\text{a}) \qquad X_1^{(h)}, X_2^{(h)}, \ldots X_n^{(h)} \quad (h = 1, 2, 3, \ldots n)$$

unterscheiden, aus denen sie dann durch dieselbe Rekursionsformel

$$(50) \qquad X_{n+i}^{(h)} = a_1 X_{n+i-1}^{(h)} + a_2 X_{n+i-2}^{(h)} + \cdots + a_n X_i^{(h)} \quad (h = 1, 2, 3, \ldots n)$$

entstehen. Bildet man alsdann mit unbestimmten Koeffizienten c_k den linearen Ausdruck

$$(51) \qquad X_k = c_1 X_k^{(1)} + c_2 X_k^{(2)} + \cdots + c_n X_k^{(n)},$$

so erhält man, wenn (50) mit c_h multipliziert wird und dann die für $h = 1, 2, 3, \ldots n$ so entstehenden Gleichungen addiert werden, offenbar für die Reihe der Zahlen X_k die gleiche rekurrente Beziehung

$$X_{n+i} = a_1 X_{n+i-1} + a_2 X_{n+i-2} + \cdots + a_n X_i$$

wie zuvor, während die Anfangswerte der Reihe sich aus (51) ergeben, wenn $k = 1, 2, 3, \ldots n$ gesetzt wird, nämlich:

$$(52)\quad \begin{cases} X_1 = c_1 X_1^{(1)} + c_2 X_1^{(2)} + \cdots + c_n X_1^{(n)} \\ X_2 = c_1 X_2^{(1)} + c_2 X_2^{(2)} + \cdots + c_n X_2^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n = c_1 X_n^{(1)} + c_2 X_n^{(2)} + \cdots + c_n X_n^{(n)}. \end{cases}$$

Findet man also auf diese Weise, sobald die Koeffizienten c_k ganzzahlig gedacht werden, stets eine der Rekursionsformel (46) gehorchende Reihe ganzer Zahlen X_k, so erhält man auch alle möglichen Reihen dieser Art, wenn man, was stets auf unendlich viel Weisen möglich ist, die n besonderen Reihen (49), d. i. die Anfangswerte (49a) so wählt, daß die Determinante $|X_k^{(h)}|$ der Gleichungen (52) gleich 1 ist. Denn, wie auch immer die Anfangswerte $X_1, X_2, \ldots X_n$ der rekurrenten Reihe (45), d. h. welche der möglichen ganzzahligen Reihen mit der Rekursionsformel (46) auch gedacht werde, stets liefert dann die Auflösung der Gleichungen (52) ein System ganzzahliger Werte für die Koeffizienten c_k, bei dessen Wahl die Reihe der X_k aus den n Reihen (49) in der vorher angegebenen Weise hervorgeht. Man erreicht dies beispielsweise, wenn man die Anfangswerte (49a) jener n Reihen so wählt, daß

$$(49\text{b})\qquad X_h^{(h)} = 1,\; X_k^{(h)} = 0 \text{ für } h \neq k$$

ist, wodurch gewiß $|X_k^{(h)}| = 1$ wird. Die so gewählten n Reihen mögen hinfort als fundamentale Reihen für die Rekursionsformel (46) benannt werden, da aus ihnen als den einfachsten von allen sämtliche übrigen rekurrenten Reihen derselben Art, wie gezeigt worden, hervorgehen.

Im einfachsten Falle $n = 1$ wird somit jede rekurrente Reihe derselben Art auf eine einzige von ihnen zurückgeführt. In der Tat ist die Skala der Rekursion in diesem Falle eine Gleichung ersten Grades

$$x = a,$$

oder die rekurrente Beziehung von der Form

$$X_{i+1} = a X_i,$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

woraus, wenn $X_1 = c$ gewählt wird,

$$X_{i+1} = c \cdot a^i$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

hervorgeht; jede rekurrente Reihe dieser Art ist also eine geometrische Reihe mit demselben Quotienten a; die fundamentale Reihe erhält man, wenn speziell $c = 1$ gewählt wird, als die Reihe der

Potenzen a^i, und aus ihr entsteht jede andere Reihe derselben Art, wenn sie mit einer (ganzen) Zahl c multipliziert wird.

7. Wir wenden uns nun völlig dem nächsten Falle $n = 2$, d. h. den rekurrenten Reihen mit der Skala zweiten Grades

$$x^2 = a_1 x + a_2 \tag{53}$$

oder mit der Rekursionsformel:

$$X_{i+2} = a_1 X_{i+1} + a_2 X_i \tag{54}$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

zu, von denen wir in der erwähnten Reihe von *Fibonacci* mit der Skala

$$x^2 = x + 1 \tag{55}$$

schon ein Beispiel antrafen.

Die Theorie dieser Reihen, welche wir Reihen zweiter Ordnung nennen wollen, ist besonders eingehend in einer schon (s. Nr. 1) angeführten größeren Arbeit von *E. Lucas* erörtert worden; eine Anzahl der wichtigsten zahlentheoretischen Eigenschaften derselben wurde jedoch bereits viel früher von *H. Siebeck* [Journ. f. Math. 33 (1846), S. 71] gegeben. Bei der hier folgenden Darstellung setzen wir die ganzzahligen Koeffizienten der Gleichung (53) als relative Primzahlen voraus und schreiben die Gleichung bequemer:

$$x^2 = ax - b. \tag{56}$$

Heißen α_1, α_2 ihre Wurzeln und setzt man

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \Delta = \delta^2, \tag{57}$$

so bestehen die Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 = a, \quad \alpha_1\alpha_2 = b, \\ \Delta = a^2 - 4b. \end{aligned}\right. \tag{58}$$

Der Fall, daß die Diskriminante Δ gleich Null ist, kann sich nach unserer Annahme über die Koeffizienten a, b, dessen erster positiv gedacht werde, nur ereignen, wenn $b = 1$, $a = 2$ ist. Dann entspricht der Skala $x^2 = 2x - 1$ die Rekursionsformel:

$$X_{i+2} = 2X_{i+1} - X_i,$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots),$$

aus welcher sich

$$X_{i+2} - X_{i+1} = X_{i+1} - X_i,$$

d. h. die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder der Reihe sich konstant ergibt; bedeutet d diesen konstanten, durch die Differenz

$$d = X_2 - X_1$$

der Anfangsglieder gegebenen Wert, so ist folglich:

$$X_{i+1} = X_i + d$$

und die Reihe zweiter Ordnung nichts anderes, als die sogenannte arithmetische Reihe, wie sie in Nr. 1 des ersten Kapitels betrachtet worden ist.

Wenn dagegen, was nun immer vorausgesetzt wird, die Diskriminante Δ von Null verschieden ist, könnte man mit *Lucas* drei verschiedene Arten von Reihen zweiter Ordnung unterscheiden, je nachdem Δ eine positive Quadratzahl, mithin δ eine reelle ganze, wegen $a^2 - 4b = \delta^2$ mit a zugleich gerade oder zugleich ungerade Zahl ist, oder Δ einen positiven nicht quadratischen, oder einen negativen Wert hat. Im ersten Falle wären die Wurzeln

$$\alpha_1 = \frac{a+\delta}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{a-\delta}{2} \tag{59}$$

ganzzahlig, im zweiten irrational, im dritten komplex. Doch werden wir hier alle drei Fälle gemeinsam behandeln.

Schreibt man die der Skala (56) entsprechende Rekursionsformel

$$X_{i+2} = aX_{i+1} - bX_i \tag{60}$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

mit Rücksicht auf die Gleichungen (58) in der Form:

$$X_{i+2} - (\alpha_1 + \alpha_2) X_{i+1} + \alpha_1 \alpha_2 X_i = 0, \tag{61}$$

so leuchtet ein, daß sie von den beiden Größensystemen x_k', x_k'' erfüllt wird, welche bzw. den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1}' &= \alpha_1 \cdot x_i', \\ x_{i+1}'' &= \alpha_2 \cdot x_i'' \end{aligned}\right\} \quad (\text{für } i = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügen und welche, analog mit dem in Nr. 6 Gesagten, als Glieder geometrischer Reihen durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1}' &= A_1 \cdot \alpha_1^i, \\ x_{i+1}'' &= A_2 \cdot \alpha_2^i \end{aligned}\right\} \quad (\text{für } i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

bestimmt sind. Allgemeiner wird man daher der Rekursionsformel (60) oder (61) genügen durch die Formel:

$$X_{i+1} = A_1 \cdot \alpha_1^i + A_2 \cdot \alpha_2^i. \tag{62}$$
$$(\text{für } i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Wählt man nun die unbestimmten Koeffizienten A_1, A_2 in der Weise, daß

$$X_1 = A_1 + A_2 = 0, \quad X_2 = A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = 1$$

wird, woraus leicht

$$A_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad A_2 = -\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

mithin

(63) $$X_{i+1} = \frac{\alpha_1^i - \alpha_2^i}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$(i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

hervorgeht, so bilden die so ermittelten Zahlen X_k die eine der Fundamentalreihen, deren andere gefunden wird, wenn man A_1, A_2 so wählt, daß umgekehrt

$$X_1 = A_1 + A_2 = 1, \quad X_2 = A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = 0$$

wird. Bei dieser Wahl ergeben sich die Werte:

$$A_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad A_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

folglich:

$$X_{i+1} = \frac{-\alpha_2\alpha_1^i + \alpha_1\alpha_2^i}{\alpha_1 - \alpha_2} = -b \cdot \frac{\alpha_1^{i-1} - \alpha_2^{i-1}}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

so daß, wenn die Glieder der zweiten Fundamentalreihe X'_{i+1} genannt werden,

(64) $$X'_{i+1} = -b \cdot X_i$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

gefunden wird, während $X'_1 = 1$ ist. Da so die zweite Fundamentalreihe unmittelbar aus der ersten hervorgeht, alle übrigen Reihen aber, welche derselben Rekursionsformel (60) gehorchen, aus den beiden Fundamentalreihen gefunden werden, ersieht man, daß hier schon die erste, durch (63) bestimmte Reihe ausreicht, um alle übrigen anzugeben. Z. B. wissen wir aus Nr. 5, daß auch die Summen gleicher Potenzen der Wurzeln der Gleichung (56):

(65) $$S_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k$$

der Rekursionsformel (60) — auch für $i = 0$ — genügen; setzen wir

(66) $$Y_{k+1} = S_k,$$

so besteht also die Beziehung:

(67) $$Y_{k+1} = c'X_{k+1} + c''X'_{k+1},$$

$$(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

d. h. nach (64):

(68) $$Y_{k+1} = c'X_{k+1} - bc''X_k,$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots)$$

während:

(69) $$Y_1 = c'X_1 + c''X'_1$$

ist. Nun sind die Anfangswerte $Y_1 = S_0 = 2$, $Y_2 = S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = a$, mithin erhält man zur Bestimmung von c', c'' die beiden Gleichungen:

(70) $$2 = c' X_1 + c'' X_1' = c'',$$

(71) $$a = c' X_2 - b c'' X_1 = c',$$

und nunmehr aus (68) die Formel:

(72) $$S_k = Y_{k+1} = a X_{k+1} - 2b X_k.$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Die beiden rekurrenten Reihen mit den allgemeinen Gliedern:

(73) $$R_k = X_{k+1} = \frac{\alpha_1^k - \alpha_2^k}{\alpha_1 - \alpha_2},$$
(74) $$S_k = Y_{k+1} = \alpha_1^k + \alpha_2^k$$
(für $k = 0, 1, 2 \ldots$)

bestehen, wie sie es als Lösungen der Rekursionsformel (60) mit ganzzahligen Anfangsgliedern müssen, aus ganzen Zahlen, gleichviel ob die Wurzeln α_1, α_2 der Gleichung (56) ganz, irrational oder komplex sind, denn die Ausdrücke (73), (74) sind ganze und ganzzahlige symmetrische Funktionen der Wurzeln, also ganze und ganzzahlige Funktionen der ganzzahligen Koeffizienten a, b. Mit den Eigenschaften dieser beiden Zahlenreihen wollen wir uns nunmehr eingehender beschäftigen. Als ausgezeichnete Beispiele derselben heben wir hier zunächst, um uns darauf berufen zu können, die folgenden besonders hervor:

Sei erstens die Skala

(75) $$x^2 = 3x - 2$$

mit den Wurzeln

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 1,$$

so erhält man die rekurrenten Reihen mit den allgemeinen Gliedern

(76) $$R_k = 2^k - 1, \quad S_k = 2^k + 1.$$
$$(k = 0, 1, 2, 3 \ldots)$$

Wegen des Anteils, welchen schon *Fermat* den Zahlen von dieser Form zugewandt hat, mögen diese Reihen als *Fermat*sche Zahlenreihen benannt werden; ihre anfänglichen Glieder sind die folgenden:

0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, ...

2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, 513, ...

Zweitens liefert die Skala

$$x^2 = x + 1$$

mit den Wurzeln

$$\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

die rekurrenten Reihen mit den allgemeinen Gliedern

$$(77)\qquad R_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{2}},\quad S_k = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k,$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

deren zweite wir bereits in Nr. 5 als die Reihe von *Fibonacci* angetroffen haben (s. dazu Niedere Zahlenth. I, S. 115); sie mögen daher beide mit diesem Namen belegt werden. Ihre anfänglichen Glieder sind die folgenden:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots$$

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ \ldots$$

Drittens sei die Skala

$$x^2 = 2x + 1,$$

deren Wurzeln

$$\alpha_1 = 1 + \sqrt{2},\quad \alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$$

sind, so daß die entsprechenden beiden rekurrenten Reihen die allgemeinen Glieder

$$(78)\qquad R_k = \frac{(1+\sqrt{2})^k - (1-\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}},\quad S_k = (1+\sqrt{2})^k + (1-\sqrt{2})^k$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

besitzen (s. dazu Niedere Zahlenth. I, S. 118) und mit den folgenden Zahlen beginnen:

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ 408,\ 985,\ \ldots$$

$$2,\ 2,\ 6,\ 14,\ 34,\ 82,\ 198,\ 478,\ 1154,\ 2786,\ \ldots$$

E. Lucas hat diese Reihen als *Pell*sche Reihen bezeichnet, um das Verdienst zu ehren, welches *Pell* um die Auflösung der sogenannten *Pell*schen Gleichung zukomme; gegenwärtig weiß man aber, daß dies Verdienst gar nicht nachweisbar ist, und so wollen wir lieber diese Reihen mit Rücksicht auf die (Niedere Zahlenth. I, S. 117/118) darauf bezügliche Arbeit von *Dupre* nach dem letzteren als *Dupré*sche Zahlenreihen bezeichnen.

8. Indem wir nun die zahlentheoretischen Eigenschaften der Zahlen R_k, S_k ermitteln wollen, leiten wir zunächst eine Reihe von Beziehungen zwischen ihnen her, aus denen wir jene entnehmen.

Aus den Formeln (59) oder, wie wir sie auch schreiben können:

$$\alpha_1 = \frac{a+\sqrt{\Delta}}{2},\quad \alpha_2 = \frac{a-\sqrt{\Delta}}{2}$$

erhält man unmittelbar

$$R_k = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\left(\frac{a+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^k - \left(\frac{a-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^k\right)$$

$$S_k = \left(\frac{a+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^k + \left(\frac{a-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^k$$

oder, wenn diese Ausdrücke nach den Potenzen von $\sqrt{\Delta}$ entwickelt werden:

(79) $$2^{k-1} \cdot R_k = \frac{k}{1}\, a^{k-1} + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, a^{k-3}\Delta + \cdots$$

(80) $$2^{k-1} \cdot S_k = a^k + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2}\, a^{k-2}\Delta + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\, a^{k-4}\Delta^2 + \cdots$$

Da ferner die Zahlen R_k, S_k derselben Rekursionsformel (60) gehorchen, man somit die Gleichungen hat:

$$R_{i+2} = aR_{i+1} - bR_i$$
$$S_{i+2} = a\,S_{i+1} - b\,S_i,$$

so findet man durch Elimination von a aus ihnen die folgende:

$$R_{i+2}S_{i+1} - S_{i+2}R_{i+1} = b \cdot (R_{i+1}S_i - S_{i+1}R_i)$$
$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

und, wenn darin i in $i-1$, $i-2$, ... verwandelt und die entstehenden ähnlichen Gleichungen miteinander verbunden werden, diese andere:

$$R_{i+2}S_{i+1} - R_{i+1}S_{i+2} = b^{i+1} \cdot (R_1S_0 - R_0S_1),$$

d. h. nach den Anfangswerten

$$R_0 = 0,\ R_1 = 1,\ S_0 = 2,\ S_1 = a$$

die Gleichung

$$R_{i+2}S_{i+1} - R_{i+1}S_{i+2} = 2b^{i+1},$$

also auch

(81) $$R_{i+1}S_i - R_iS_{i+1} = 2b^i.$$

Führt man in diese Gleichung nach (72) die Werte

$$S_i = aR_i - 2bR_{i-1},\ S_{i+1} = aR_{i+1} - 2bR_i$$

ein und reduziert die so entstehende linke Seite, so ergibt sich die fernere, für das Folgende besonders wichtige Gleichung

(82) $$R_i^2 - R_{i-1}R_{i+1} = b^{i-1}.$$

Andererseits folgert man aus den Beziehungen

(83) $$\alpha_1^i - \alpha_2^i = \delta \cdot R_i,\ \alpha_1^i + \alpha_2^i = S_i$$

die anderen:

(84) $$2\alpha_1^i = S_i + \delta \cdot R_i, \quad 2\alpha_2^i = S_i - \delta \cdot R_i,$$

und aus deren Multiplikation mit Rücksicht auf $\alpha_1 \alpha_2 = b$ und $\Delta = \delta^2$ die Gleichung

(85) $$4b^i = S_i^2 - \Delta \cdot R_i^2.$$

Diese Gleichung lehrt zunächst, daß die Zahlen R_i, S_i keinen ungeraden Primteiler gemeinsam haben können. Denn ein solcher Primteiler p müßte in b aufgehen. Nun folgt aber für $k = i$ aus der Gleichung (80), wenn sie als eine Kongruenz (mod. b) aufgefaßt wird, für welchen Modulus aus $\Delta = a^2 - 4b$ sich $\Delta \equiv a^2$ ergibt, die nachstehende Kongruenz:

$$2^{i-1} \cdot S_i \equiv 2^{i-1} \cdot a^i \pmod{b},$$

also auch (mod. p), oder einfacher

$$S_i \equiv a^i \pmod{p}.$$

Demnach müßte der Primteiler p auch aufgehen in a, während doch a, b als relative Primzahlen vorausgesetzt worden sind.

Ferner läßt die Gleichung (85) einen Schluß zu auf die Linearformen, in denen die ungeraden Primteiler der Zahlen R_i, S_i enthalten sein müssen. Ist i gerade, so muß jeder ungerade Primteiler von S_i offenbar Teiler „der quadratischen Form“ $x^2 + \Delta y^2$, mithin bekanntlich in gewissen, durch die Diskriminante Δ bestimmten Linearformen enthalten sein. Ist i ungerade, so folgt aus (85)

$$4b^{i+1} = b \cdot S_i^2 - \Delta b \cdot R_i^2$$

und somit jeder ungerade Primteiler von S_i als ein Teiler der quadratischen Form $x^2 + \Delta b \cdot y^2$. Was die Primteiler von R_i anbelangt, so können wir ähnliches nur für diejenigen folgern, welche den Zahlen R_i mit ungeradem Index i angehören; für ungerades i folgt nämlich aus (85), daß jeder ungerade Primteiler von R_i Teiler der Form $x^2 - by^2$ ist. Wir dürfen hiernach den Satz aussprechen:

Jeder ungerade Primteiler der Zahlen R_i ungeraden Ranges geht auf in $x^2 - by^2$; jeder ungerade Primteiler der Zahlen S_i geraden Ranges in $x^2 + \Delta y^2$, jeder derartige Teiler der Zahlen S_i ungeraden Ranges in $x^2 + \Delta b y^2$.

Beispielsweise sind hiernach und nach den Sätzen über die Linearformen der Teiler quadratischer Formen

1) in den *Fermat*schen Reihen die Primteiler der Zahlen $2^{2k+1} - 1$ Teiler von $x^2 - 2y^2$, also von der Form $8h \pm 1$; die Primteiler der Zahlen $2^{2k} + 1$ Teiler von $x^2 + y^2$, also von der Form $4h + 1$; diejenigen der Zahlen $2^{2k+1} + 1$ Teiler von $x^2 + 2y^2$, mithin von der Form $8h + 1$ oder $8h + 3$;

2) in den Reihen von *Fibonacci* sind ähnlicherweise die Primteiler von R_{2k+1}, S_{2k}, S_{2k+1} bezw. Teiler von x^2+y^2, x^2+5y^2, x^2-5y^2, mithin von den Formen $4h+1$; $20h+1$, 3, 7, 9; $20h+1$, 9, 11, 19;

3) in den *Dupré*schen Reihen sind die gedachten Primteiler bezw. Teiler von x^2+y^2, x^2+2y^2, x^2-2y^2, also von den Formen $4h+1$; $8h+1$, 3; $8h+1$, 7.

9. Kehren wir nun wieder zu den Formeln (84) zurück. Setzt man darin $i=m$, $i=n$ und multipliziert die entstehenden Gleichungen, so kommt

$$4\alpha_1^{m+n} = S_m S_n + \delta\cdot(S_m R_n + S_n R_m) + \Delta\cdot R_m R_n$$
$$4\alpha_2^{m+n} = S_m S_n - \delta\cdot(S_m R_n + S_n R_m) + \Delta\cdot R_m R_n,$$

zwei Gleichungen, deren Addition und Subtraktion die beiden folgenden liefert:

$$(86)\qquad \begin{cases} 2\cdot S_{m+n} = S_m S_n + \Delta\cdot R_m R_n, \\ 2\cdot R_{m+n} = S_m R_n + S_n R_m, \end{cases}$$

welche wir als die Additionsformeln in der Theorie der rekurrenten Reihen zweiter Ordnung bezeichnen wollen. Der zweiten von ihnen geben wir noch eine andere Gestalt, in der sie von *Siebeck* aufgestellt worden ist. Ersetzt man darin nämlich S_m, S_n nach (72) durch die Ausdrücke:

$$S_m = aR_m - 2bR_{m-1},\quad S_n = aR_n - 2bR_{n-1},$$

so gelangt man zur Gleichung:

$$R_{m+n} = aR_m R_n - b(R_m R_{n-1} + R_n R_{m-1}),$$

wofür man wegen $aR_n - bR_{n-1} = R_{n+1}$ auch schreiben kann:

$$(87)\qquad R_{m+n} = R_m\cdot R_{n+1} - b\cdot R_{m-1}\cdot R_n.$$

Nimmt man $m = qn$ an, so folgt hieraus:

$$R_{(q+1)n} = R_{qn}\cdot R_{n+1} - b\,R_{qn-1}R_n;$$

wenn daher R_{qn} teilbar ist durch R_n, so muß es $R_{(q+1)n}$ auch sein; da nun gewiß R_n selbst durch R_n teilbar ist, so ist es auch R_{2n}, dann auch R_{3n}, R_{4n}, $\cdots$, kurz, man erhält den Satz:

Ist m teilbar durch n, so ist auch R_m teilbar durch R_n.

In Beachtung der Bedeutung des Zeichens R_n darf man hiernach sagen: Der Ausdruck

$$\frac{(a+\sqrt{\Delta})^{qn}-(a-\sqrt{\Delta})^{qn}}{(a+\sqrt{\Delta})^{n}-(a-\sqrt{\Delta})^{n}}\cdot\frac{1}{2^{(q-1)n}}$$

ist einer ganzen Zahl gleich.

Hieraus schließt man nun weiter, daß, wenn sowohl m als n Vielfache einer Zahl d sind, die Zahlen R_m, R_n beide teilbar sind durch R_d, oder: ist d gemeinsamer Teiler von m und n, so ist R_d gemeinsamer Teiler von R_m, R_n.

Ferner folgt aus (86), daß jeder ungerade gemeinsame Teiler von R_{m+n} und R_m, da er jener Gleichung zufolge in $S_m \cdot R_n$ aufgehen muß, nach (85) aber R_m und S_m keinen gemeinsamen ungeraden Teiler haben, notwendig auch in R_n aufgehen muß. Mittels des Euklidischen Algorithmus zur Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen erkennt man hiernach, daß jeder ungerade gemeinsame Teiler von R_m, R_n auch in R_d aufgehen muß, wenn d den größten gemeinsamen Teiler von m und n bezeichnet. Da dann dem Vorigen zufolge umgekehrt R_m, R_n beide durch R_d teilbar sind, läßt sich folgender neue Satz aussprechen:

Der größte ungerade gemeinsame Teiler von R_m, R_n ist der ungerade Faktor der Zahl R_d, deren Index d der größte gemeinsame Teiler von m, n ist.

Daher werden R_m, R_n ohne einen ungeraden gemeinsamen Teiler sein, wenn m, n teilerfremd sind, denn dann ist $d = 1$, mithin $R_1 = 1$ der größte ungerade gemeinsame Teiler von R_m, R_n.

Ist also p eine ungerade Primzahl, so können $R_1, R_2, \cdots, R_{p-1}$ keinen ungeraden Teiler gemeinsam haben mit R_p.

Aus dem Umstande, daß R_{qn} teilbar ist durch R_n, folgt, daß, wenn m eine zusammengesetzte Zahl ist, im allgemeinen dasselbe von R_m gilt, denn, wenn $m = qn$ gesetzt wird, ist eben R_m teilbar durch R_n, also zusammengesetzt, falls numerisch $R_{qn} > R_n > 1$ ist.

Wenn demnach die rekurrente Reihe der R_n eine numerisch wachsende Wertreihe ist, so gilt der Satz:

R_m kann nur dann Primzahl sein, wenn auch m es ist.

Doch ist die so ausgesprochene notwendige Bedingung nicht auch ausreichend, wie folgendes Beispiel zeigt. In der Reihe von *Fibonacci* ist

$$R_{53} = 53316291173$$

keine Primzahl, sondern zerlegbar in das Produkt

$$953 \cdot 55945741.$$

In dieser Reihe ist der erste Koeffizient der Skala a gleich 1; sooft dies aber der Fall, ist jedesmal $R_2 = R_1 = 1$, dann kann also ein Glied R_m mit geradem Index eine Primzahl sein, obwohl m ein Vielfaches von 2; doch, wenn dann die Reihe der R_k vom Gliede R_2 an numerisch wächst, mithin $R_n > 1$ für $n > 2$ ist, so ist R_4 das einzige Glied, welches eine Primzahl sein kann, ohne daß sein Index es ebenfalls ist.

Schreibt man die zweite der Additionsformeln (86) oder die Gleichung (87), wie folgt:

$$\frac{R_{m+n}}{R_n} = \frac{R_m}{R_n} \cdot R_{n+1} - b \cdot R_{m-1}$$

und multipliziert dann beide Seiten der Formel mit

$$\frac{R_{m+n-1} \cdot R_{m+n-2} \cdots R_{m+1}}{R_{n-1} \cdot R_{n-2} \cdots R_1},$$

so entsteht die Gleichung

$$\frac{R_{m+n} \cdot R_{m+n-1} \cdots R_{m+1}}{R_n \cdot R_{n-1} \cdots R_1} = \frac{R_{m+n-1} \cdot R_{m+n-2} \cdots R_m}{R_n \cdot R_{n-1} \cdots R_1} \cdot R_{n+1}$$
$$- b \cdot \frac{R_{m+n-1} \cdot R_{m+n-2} \cdots R_{m+1}}{R_{n-1} \cdot R_{n-2} \cdots R_1} \cdot R_{m-1}.$$

Aus ihr folgert man den Satz:

Das Produkt aus n aufeinander folgenden Zahlen der rekurrenten Reihe der R_k ist durch das Produkt $R_1 \cdot R_2 \cdots R_n$ der ersten n dieser Zahlen teilbar. Nimmt man nämlich an, dieser Satz bestehe bereits für jede geringere Anzahl von Faktoren, sowie, falls m kleiner ist als ein bestimmter Wert, auch für n Faktoren, so sind die Quotienten, welche zur Rechten der vorigen Gleichung auftreten, ganzen Zahlen gleich und der Satz ist also auch für n Faktoren und den um 1 größeren Wert von m gültig. Nun gilt der Satz für $n = 1$, welchen Wert m auch hat, denn wegen $R_1 = 1$ ist stets $\frac{R_m}{R_1}$ eine ganze Zahl; er gilt aber auch für $n = 2$, wenn $m = 1$, denn

$$\frac{R_3 \cdot R_2}{R_2 \cdot R_1} = R_3$$

ist einer ganzen Zahl gleich; somit gilt der Satz auch für $n = 2$, welchen Wert m auch habe; da dann wieder für $n = 3$, $m = 1$

$$\frac{R_4 \cdot R_3 \cdot R_2}{R_3 \cdot R_2 \cdot R_1} = R_4$$

ganzzahlig ist, erkennt man die Richtigkeit des Satzes auch für $n = 3$, welchen Wert m auch habe; usw. fort.

Weiter erhalten wir aus der zweiten der Formeln (86) für $m = n$ die Formel

$$(88) \qquad R_{2n} = R_n \cdot S_n,$$

während die erste derselben

$$2 S_{2n} = S_n^2 + \Delta \cdot R_n^2$$

ergibt, wofür aber wegen (85):

$$(89) \qquad S_{2n} = 2b^n + \Delta \cdot R_n^2 = S_n^2 - 2b^n$$

geschrieben werden kann. Diese Formeln leisten guten Dienst, um die Zahlen R_k, S_k mit geradem Index k in Faktoren zu zerlegen. Ist z. B. $n = 2\nu + 1$, $b = 2\beta^2$, so ist die rechte Seite der Gleichung (89) als Differenz zweier Quadrate zerlegbar, nämlich:

$$S_{4\nu+2} = (S_{2\nu+1} + 2^{\nu+1} \cdot \beta^{2\nu+1}) \cdot (S_{2\nu+1} - 2^{\nu+1} \cdot \beta^{2\nu+1}).$$

Für die *Fermat*sche Reihe ist $b = 2$, d. i. $b = 2\beta^2$, wenn $\beta = 1$ gesetzt wird; da für sie $S_k = 2^k + 1$ ist, findet sich demnach die Formel

$$(90) \qquad 2^{4\nu+2} + 1 = (2^{2\nu+1} + 2^{\nu+1} + 1)(2^{2\nu+1} - 2^{\nu+1} + 1),$$

welche von *E. Lucas* als zuerst von *d'Aurifeuille* gegeben angeführt wird, die aber nur ein spezieller Fall einer allgemeineren schon von *Sophie Germain* gegebenen Formel ist. Für $\nu = 14$ ergibt sich daraus

$$2^{58} + 1 = (2^{29} + 2^{15} + 1)(2^{29} - 2^{15} + 1),$$

wo der zweite Faktor, da $2^2 \equiv -1 \pmod{5}$ ist, sich als durch 5 teilbar herausstellt; die Formel liefert die folgende Zerlegung:

$$2^{58} + 1 = 5 \cdot 107\,567\,629 \cdot 536\,903\,681.$$

Ist andererseits n eine Potenz von 2, $n = 2^\nu$, so folgt aus (88)

$$R_{2^{\nu+1}} = R_{2^\nu} \cdot S_{2^\nu}$$

und kraft dieser Formel läßt sich $R_{2^{\nu+1}}$ berechnen, sobald man die Reihe der Zahlen

$$S_1, S_2, S_4, S_8, S_{16}, \ldots$$

berechnet hat, denn wegen $R_1 = 1$ ist allgemein

$$(91) \qquad R_{2^{\nu+1}} = S_1 \cdot S_2 \cdot S_4 \ldots S_{2^\nu}.$$

Wir werden später von dieser Formel Gebrauch zu machen haben.

10. Um nun weiter zu untersuchen, welche Primzahlen in den einzelnen Gliedern der rekurrenten Reihen der R_k, S_k aufgehen können, und so deren Zerlegung zu erkennen, betrachten wir zuvörderst die endliche Menge der Primzahlen p, welche in den Koeffizienten a, b der Skala oder in deren Diskriminante Δ aufgehen.

Doch schicken wir noch eine allgemeine Bemerkung voraus. Wir nennen eine ungerade Primzahl p einen eigentlichen Teiler von R_n, wenn n der kleinste Index ist, für welchen R_n durch p aufgeht, und definieren die eigentlichen Teiler von S_n auf entsprechende Weise. Ist dann p ein eigentlicher Teiler von R_π, so sind alle Zahlen R_n und nur diejenigen Zahlen R_n durch p teilbar, deren Index ein Vielfaches von π ist. Denn, sind gleichzeitig R_n und R_π teilbar durch p, so geht nach einem früheren

Satze p auch in R_d auf, wenn d der größte gemeinsame Teiler von π und n ist, der, entgegen der Bedeutung von π, kleiner als π sein würde, wenn n kein Vielfaches von π wäre. Demnach muß n teilbar sein durch π; ist dies aber der Fall, so ist auch R_n teilbar durch R_π und folglich durch p, w. z. b. w.

Die eigentlichen Teiler von S_n stimmen mit den eigentlichen Teilern von R_{2n} überein. Denn erstens ist, wenn p ein eigentlicher Teiler von S_n ist, nach (88) p auch ein Teiler von R_{2n}. Wenn nun p ein eigentlicher Teiler von R_π wäre, so müßte $2n$ durch π teilbar sein; n selbst kann nicht durch π teilbar sein, denn sonst wäre auch R_n teilbar durch p, während es doch ohne gemeinsamen ungeraden Teiler mit S_n ist; daher muß $\pi = 2n'$ sein, wo n' ein Teiler von n. Da nun $R_{2n'} = R_{n'} \cdot S_{n'}$ und $R_{n'}$ durch den eigentlichen Teiler p von R_π nicht teilbar sein kann, müßte es $S_{n'}$ sein, woraus $n' = n$ und somit $\pi = 2n$ hervorgeht. Umgekehrt geht jeder eigentliche Teiler p von R_{2n} wegen (88) und da er in R_n nicht aufgehen kann, in S_n auf; wäre er nun nicht eigentlicher Teiler von S_n, so gäbe es einen kleineren Index n', für welchen p eigentlicher Teiler von $S_{n'}$ wäre; dann würde er aber dem eben Bewiesenen zufolge eigentlicher Teiler schon von $R_{2n'}$ sein, gegen die Voraussetzung.

Was nun zuerst die Primzahl 2 anbetrifft, so folgt aus den Rekursionsformeln

$$R_{i+2} = aR_{i+1} - bR_i,\ S_{i+2} = aS_{i+1} - bS_i$$

unmittelbar, daß,

falls a ungerade, b gerade ist, wegen $R_1 = 1$, $R_2 = a$ sämtliche R_i, wegen $S_0 = 2$, $S_1 = a$ sämtliche S_i, bis auf die geraden Anfangsglieder R_0, S_0 ungerade sind;

falls a gerade, b ungerade ist, werden die R_i von R_0 an abwechselnd gerade und ungerade, die S_i sämtlich gerade sein;

falls aber beide a, b ungerade sind, werden die R_i von R_0, die S_i von S_0 an immer eins gerade, die beiden folgenden ungerade sein.

Sei ferner p ein ungerader Primfaktor von a. Da $R_1 = 1$, $R_2 = a$ ist, so ist p ein eigentlicher Teiler von R_2, somit ist jedes R_n mit geradem Index n teilbar, dagegen jedes R_n mit ungeradem Index nicht teilbar durch p. Da S_n keinen ungeraden Teiler mit R_n gemeinsam hat, kann S_n bei geradem Index nicht durch p teilbar sein; da andererseits R_n bei ungeradem Index nicht, wohl aber $R_{2n} = R_n \cdot S_n$ durch p teilbar ist, muß S_n bei ungeradem Index durch p teilbar sein. Insbesondere werden von den drei aufeinander folgenden Zahlen R_{p-1}, R_p, R_{p+1} die beiden äußeren teilbar, die mittlere nicht teilbar sein durch p.

Sei nunmehr p ein ungerader Primteiler von b. Aus (80) haben wir bereits die Kongruenz:

$$S_i \equiv a^i \pmod{p}$$

hergeleitet, und in gleicher Weise ergibt sich aus (79)

$$R_i \equiv a^{i-1} \pmod{p}.$$

Da a, b als teilerfremd vorausgesetzt sind, lehren diese Kongruenzen, daß keine der Zahlen R_i, S_i, insbesondere keine der drei Zahlen R_{p-1}, R_p, R_{p+1} durch p teilbar sein kann.

Ist endlich p ein ungerader Primfaktor von Δ, der wegen

$$\Delta = a^2 - 4b$$

weder in a noch in b aufgehen kann, so folgen aus (79), (80) für $k = i$ die Kongruenzen

$$2^{i-1} R_i \equiv i a^{i-1},\ 2^{i-1} S_i \equiv a^i \pmod{p},$$

welche lehren, daß keine der Zahlen S_i, von den Zahlen R_i aber nur diejenigen durch p teilbar sind, deren Index i selbst durch p aufgeht. Die Primzahl p ist mithin eigentlicher Teiler von R_p; da ferner aus (79) für $k = p$ die Gleichung

$$2^{p-1} R_p = p \cdot a^{p-1} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{p-3} \Delta + \cdots$$

mithin, da sämtliche Binomialkoeffizienten durch p teilbar sind, die Kongruenz:

$$2^{p-1} R_p \equiv p \cdot a^{p-1} \equiv p \pmod{p^2}$$

hervorgeht, so erkennt man, daß der Primfaktor p in R_p nur zur ersten Potenz enthalten ist. In diesem Falle ist von den drei aufeinander folgenden Zahlen R_{p-1}, R_p, R_{p+1} nur die mittlere durch p teilbar.

11. Wir betrachten nunmehr die ungeraden Primzahlen p, welche weder in a noch in b noch auch in Δ aufgehen.

Aus (79) folgt für $k = p$

$$2^{p-1} \cdot R_p = p \cdot a^{p-1} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{p-3} \Delta + \cdots + \Delta^{\frac{p-1}{2}},$$

also, da $2^{p-1} \equiv 1$, $\Delta^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{\Delta}{p}\right) \pmod{p}$ ist, die Kongruenz

$$R_p \equiv \left(\frac{\Delta}{p}\right) \pmod{p}. \tag{92}$$

Da nun die Gleichung (82) für $i = p$ die Kongruenz

$$R_p^2 - R_{p-1} \cdot R_{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$$

ergibt, so fließt aus dieser mit Beachtung des eben erhaltenen Resultates die andere:

$$R_{p-1} \cdot R_{p+1} \equiv 0 \pmod{p},$$

also muß eine der beiden Zahlen R_{p-1}, R_{p+1} und, da das dem größten gemeinsamen Teiler 2 der beiden Indizes entsprechende Glied $R_2 = a$ der Reihe nicht durch p aufgeht, auch nur eine derselben durch p teilbar sein. In diesem Falle ist also von den drei aufeinander folgenden Zahlen R_{p-1}, R_p, R_{p+1} nur eine, und zwar eine der beiden äußeren durch p teilbar. Welche von beiden es ist, wird vom quadratischen Charakter der Diskriminante Δ (mod. p) bestimmt.

Aus (79) fließt nämlich für $k = p + 1$ die Gleichung

$$2^p \cdot R_{p+1} = (p+1)a^p + \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{p-2}\Delta + \cdots + (p+1)a\Delta^{\frac{p-1}{2}}$$

und aus ihr die Kongruenz

$$2 \cdot R_{p+1} \equiv a\left(1 + \left(\frac{\Delta}{p}\right)\right) \pmod{p}.$$

Demnach ist R_{p+1} dann und nur dann teilbar durch p, wenn $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1$ ist, und deshalb R_{p-1} dann und nur dann, wenn $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1$ ist. Man erhält sonach den Satz:

Je nachdem Δ quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist, geht R_{p-1} oder R_{p+1} durch p auf, ein Satz, der sich ausspricht in der Formel

$$R_{p-\left(\frac{\Delta}{p}\right)} \equiv 0 \pmod{p}. \tag{93}$$

In diesem Satze ist als besonderer Fall der *Fermat*sche Lehrsatz enthalten. Für die Reihen der ersten der von *Lucas* unterschiedenen drei Arten ist nämlich

$$R_{p-1} = \frac{\alpha_1^{p-1} - \alpha_2^{p-1}}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

während α_1, α_2 ganze Zahlen und $\Delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2$, also quadratischer Rest von jeder nicht in $\alpha_1 - \alpha_2$ aufgehenden Primzahl ist. Hier lautet der Satz also so, daß $\alpha_1^{p-1} - \alpha_2^{p-1}$ für jede weder in $a = \alpha_1 + \alpha_2$ noch in $b = \alpha_1\alpha_2$ noch auch in Δ d. i. in $\alpha_1 - \alpha_2$, oder einfacher, da aus $\alpha_1 \pm \alpha_2 \equiv 0$ auch $\alpha_1^{p-1} - \alpha_2^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$ gefunden wird, für jede nicht in b d. h. weder in α_1 noch in α_2 aufgehende Primzahl p durch p teilbar sei, ein Satz, den schon *Euler* (Comm. arithm. coll. I S. 2) ausgesprochen hat, und der nur eine andere Form des *Fermat*schen Satzes ist.

Setzt man nun in (81) einmal $i = p$, das andere Mal $i = p - 1$ und schreibt die so entstehenden Gleichungen als Kongruenzen (mod. p), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} R_{p+1} \cdot S_p - S_{p+1} \cdot \left(\frac{\Delta}{p}\right) &\equiv 2b \\ \left(\frac{\Delta}{p}\right) \cdot S_{p-1} - S_p \cdot R_{p-1} &\equiv 2 \end{aligned}\right\} \pmod{p}.$$

Wegen (93) ergibt sich also, wenn $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1$ ist,

wenn aber $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1$ ist,

$$\left.\begin{aligned} S_{p+1} &\equiv 2b, \\ S_{p-1} &\equiv 2 \end{aligned}\right\} \pmod{p},$$

so daß allgemein gesetzt werden darf

$$S_{p-\left(\frac{\Delta}{p}\right)} \equiv 2b^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p}\right)\right)} \pmod{p}. \tag{94}$$

Aus (80) endlich folgt für $k=p$ die Kongruenz

$$2^{p-1}\cdot S_p \equiv a^p$$

oder einfacher

$$S_p \equiv a \pmod{p}. \tag{95}$$

Wenn nun auch durch (93) festgestellt ist, daß R_{p+1} oder R_{p-1} durch p teilbar ist, so brauchen diese Zahlen doch nicht die ersten in der Reihe der Zahlen R_k zu sein, welche durch p aufgehen. Sei vielmehr R_π die erste durch p teilbare Zahl, also p ein eigentlicher Teiler von R_π. Dann muß nach der Vorausbemerkung in voriger Nr. der Index $p-\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ ein Vielfaches von π, also $p-\left(\frac{\Delta}{p}\right) = h\pi$ sein. Man darf also folgenden Satz aussprechen:

Ist die Primzahl p ein eigentlicher Teiler von R_π, so hat sie die Form $p = h\pi + \left(\frac{\Delta}{p}\right)$ und sie kommt in der Reihe der Zahlen R_k in allen denjenigen Zahlen vor, deren Index k ein Vielfaches von π ist, und nur in diesen. Ist insbesondere eine solche nicht in a, b, Δ aufgehende Primzahl p ein Teiler einer Zahl R_q, deren Index q eine Primzahl ist, so ist sie ein eigentlicher Teiler von R_q und somit, je nachdem Δ quadratischer Rest oder Nichtrest ist von p, von der Form $2kq+1$ oder $2kq-1$.

Da wir fanden, daß die eigentlichen Teiler von S_n mit den eigentlichen Teilern von R_{2n} übereinstimmen, läßt sich dem vorigen Satze der folgende hinzufügen: Ist die Primzahl p eigentlicher Teiler von S_π, so hat sie die Form $p = 2h\pi + \left(\frac{\Delta}{p}\right)$.

Handelt es sich z. B. um die Reihen von *Fibonacci* mit der Diskriminante $\Delta = 5$, so geht jede Primzahl p, für welche $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = 1$ ist, d. h. jede Primzahl p von einer der Formen $10k \pm 1$ in R_{p-1}, dagegen jede Primzahl p, für welche $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = -1$ ist, d. h. jede Primzahl p von einer der beiden Formen $10k \pm 3$ in R_{p+1} auf.

Man kann diese Sätze mit Nutzen verwenden, um die Zerlegung der Zahlen R_k in ihre Primfaktoren zu gewinnen. Handelt es sich etwa um die Zahl

$$2^{64} - 1 = 18446744073709551615,$$

d. h. um das Glied R_{64} der *Fermat*schen Reihen, so erhält man zunächst nach (91) die Zerlegung

$$R_{64} = S_1 \cdot S_2 \cdot S_4 \cdot S_8 \cdot S_{16} \cdot S_{32},$$

worin

$$S_1 = 3, \; S_2 = 5, \; S_4 = 17, \; S_8 = 257, \; S_{16} = 65537$$

Primzahlen sind, während

$$S_{32} = 4294967297$$

ist. Die eigentlichen Primteiler von S_{32} sind, da $\Delta = 1$ quadratischer Rest von jeder Primzahl ist, von der Form $64k + 1$; man hat daher, um sie zu finden, die Zerlegung von S_{32} nur mit den Primzahlen von dieser Form:

$$p = 193, \; 257, \; 449, \; 577, \; 641, \; \cdots$$

zu versuchen. Man findet, daß erst 641 in S_{32} aufgeht und erhält

$$S_{32} = 641 \cdot 6700417.$$

Um, wenn möglich, den zweiten Faktor noch weiter zu zerlegen, versuche man aufs neue die Division mit den folgenden Primzahlen jener Form:

$$641, \; 769, \; 1153, \; 1217, \; 1409, \; 1601, \; 2113, \; \ldots,$$

welche die Quadratwurzel aus jenem Faktor nicht übertreffen; da keine von diesen, noch auch 3, 5, 17 in ihm aufgehend befunden wird, die Primzahl 65537 aber größer ist als jene Quadratwurzel, ist der Faktor selbst eine Primzahl, und damit die Zerlegung der Zahl R_{64} in ihre Primfaktoren geleistet.

Ähnlicherweise findet man für das Glied

$$R_{59} = 956722026041$$

der Reihen von *Fibonacci*, dessen Primfaktoren, da jetzt $a = 1$, $b = 1$, $\Delta = 5$ ist, weder in a, noch in b, noch in Δ aufgehen, also dem Obigen zufolge als eigentliche Primteiler von R_{59} von der Form $118k \pm 1$ sein müssen, daß die erste von ihnen 119 zwar nicht, dagegen die zweite 353 in R_{59} aufgeht, so daß

$$R_{59} = 353 \cdot 2710260697$$

gesetzt werden kann.

Verbinden wir endlich die gewonnenen Sätze mit den für die Reihen der R_k, S_k geltenden Additionsformeln, so erhalten wir eine

eigentümliche Periodizität, welche *Lucas* veranlaßt hat, die Zahlen R_k, S_k der rekurrenten Reihen zweiter Ordnung als fonctions numériques simplement périodiques zu benennen. Die auffallende Analogie, welche diese Größen durch die Additionsformeln und eine Menge anderer algebraischer Eigenschaften mit den trigonometrischen Funktionen $\sin z$, $\cos z$ darbieten, kommt durch die genannte Periodizität zu besonders prägnantem Ausdrucke. Doch gilt diese Periodizität nicht in absolutem Sinne, vielmehr nur in bezug auf einen Primzahlenmodulus p der hier betrachteten Art.

Aus (87) ergibt sich für $n = h\pi$ die Beziehung

$$R_{m+h\pi} = R_m \cdot R_{h\pi+1} - b \cdot R_{m-1} \cdot R_{h\pi}.$$

Ist nun zunächst p ein eigentlicher Primteiler von R_π, für welchen $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1$ ist, und $p = h\pi + 1$, so ergibt vorstehende Beziehung als Kongruenz (mod. p) gefaßt folgendes Resultat:

$$R_{m+h\pi} \equiv R_m \pmod{p},$$

welchen Wert m auch habe; daher liefert dann die Beziehung

$$S_{m+h\pi} = a \cdot R_{m+h\pi} - 2b \cdot R_{m+h\pi-1}$$

die Kongruenz

$$S_{m+h\pi} \equiv a \cdot R_m - 2b \cdot R_{m-1} \equiv S_m \pmod{p}.$$

In diesem Falle ist also

$$R_{m+h\pi} \equiv R_m, \quad S_{m+h\pi} \equiv S_m \pmod{p}.$$

Die Zahlenreihen der R_k, S_k sind daher in bezug auf den Modulus p periodisch und ihre Periode ist $h\pi = p - 1$.

Wenn dagegen p ein eigentlicher Primteiler von R_π ist, für welchen $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1$ ist, und man setzt also $p = h\pi - 1$, so findet sich aus (87) für $n = h\pi - 1$ die Beziehung

$$R_{m+h\pi} = R_{m+1} \cdot R_{h\pi} - b \cdot R_m \cdot R_{h\pi-1},$$

also die Kongruenz

$$R_{m+h\pi} \equiv b \cdot R_m,$$

allgemeiner also

$$R_{m+h\delta\pi} \equiv b^\delta \cdot R_m \pmod{p},$$

so daß, wenn δ der Exponent ist, zu welchem b (mod. p) gehört, sich

$$R_{m+h\delta\pi} \equiv R_m \pmod{p}$$

ergibt, welchen Wert m auch habe. Daher kommt dann aus der Beziehung

$$S_{m+h\delta\pi} = a \cdot R_{m+\delta h\pi} - 2b \cdot R_{m+h\delta\pi-1}$$

auch die Kongruenz

$$S_{m+h\delta\pi} \equiv S_m \pmod{p}.$$

In diesem Falle sind also die beiden Reihen der R_k, S_k zwar wieder periodisch, ihre Periode aber beträgt $\delta h\pi = \delta(p+1)$.

12. Aus der Vorbemerkung in Nr. 10 wissen wir schon, daß eine Primzahl p, welche eigentlicher Teiler von R_π ist, in allen Zahlen R_n und nur in solchen aufgeht, deren Index n ein Vielfaches von π ist. Wir fragen aber auch einmal nach der Häufigkeit dieses Aufgehens, nämlich: wenn p in R_π, wie wir annehmen wollen, genau λ mal aufgeht, wie oft wird es in $R_{h\pi}$ aufgehen?

Die Beantwortung dieser Frage stützt sich auf eine Formel, die wir zunächst beweisen müssen. Wir behaupten, es sei identisch

$$\begin{aligned}(96)\quad & \alpha_1^m + \alpha_2^m \\ & = (\alpha_1+\alpha_2)^m - \frac{m}{1}\alpha_1\alpha_2 \cdot (\alpha_1+\alpha_2)^{m-2} + \frac{m}{2} \cdot \binom{m-3}{1}\alpha_1^2\alpha_2^2 \cdot (\alpha_1+\alpha_2)^{m-4} \\ & \quad - \frac{m}{3} \cdot \binom{m-4}{2}\alpha_1^3\alpha_2^3 \cdot (\alpha_1+\alpha_2)^{m-6} + \cdots,\end{aligned}$$

und bestätigen dies durch allgemeine Induktion. Man hat nämlich offenbar

$$\alpha_1^{m+1} + \alpha_2^{m+1} = (\alpha_1^m + \alpha_2^m)(\alpha_1+\alpha_2) - \alpha_1\alpha_2(\alpha_1^{m-1} + \alpha_2^{m-1}).$$

Gesetzt nun, die Formel (96) bestünde für alle Exponenten 1, 2, 3, ... m inklusive, so erhielte man durch Einsetzen in die vorstehende Gleichung die linke Seite gleich einem Ausdrucke mit dem allgemeinen Gliede

$$(-1)^h \cdot \left[\frac{m}{h} \cdot \binom{m-h-1}{h-1} + \frac{m-1}{h-1} \cdot \binom{m-h-1}{h-2}\right] \cdot \alpha_1^h\alpha_2^h \cdot (\alpha_1+\alpha_2)^{m-2h+1},$$

wo nun der Wert der Klammer leicht gleich

$$\frac{m+1}{h} \cdot \binom{m-h}{h-1},$$

der des allgemeinen Gliedes also gleich

$$(-1)^h \cdot \frac{m+1}{h} \cdot \binom{m+1-h-1}{h-1}\alpha_1^h\alpha_2^h \cdot (\alpha_1+\alpha_2)^{m+1-2h}$$

gefunden und somit die Gültigkeit der Formel (96) auch noch für den Exponenten $m+1$ erkannt wird. Da sie aber für $m=2$ und $m=3$ ersichtlich stattfindet, so ist sie bewiesen.

Ersetzen wir nun in dieser Identität die Zeichen α_1, α_2 durch α_1^n und $-\alpha_2^n$ resp., indem wir wieder unter α_1, α_2 dann die Wurzeln der

Gleichung (56) verstehen und wählen für m eine ungerade Primzahl p, so nimmt sie, durch $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$ geteilt, nachstehende Form an:

$$(97)\quad \begin{aligned} R_{pn} &= \Delta^{\frac{p-1}{2}} \cdot R_n^p + \frac{p}{1} b^n \Delta^{\frac{p-3}{2}} \cdot R_n^{p-2} + \frac{p}{2} \cdot \binom{p-3}{1} b^{2n} \Delta^{\frac{p-5}{2}} \cdot R_n^{p-4} \\ &\quad + \frac{p}{3} \cdot \binom{p-4}{2} b^{3n} \Delta^{\frac{p-7}{2}} \cdot R_n^{p-6} + \cdots + p \cdot b^{\frac{p-1}{2}n} \cdot R_n, \end{aligned}$$

in welcher die sämtlichen Koeffizienten, da allgemein

$$\frac{p}{h} \cdot \binom{p-h-1}{h-1} = \binom{p-h}{h} + \binom{p-h-1}{h-1}$$

ist, ganze, und zwar durch p teilbare Zahlen sind. Gesetzt also, p sei eigentlicher Teiler von R_π und gehe genau λ mal in R_π auf, so folgt sogleich aus (97), indem darin n gleich π gewählt wird, daß p in $R_{p\pi}$ genau so oft aufgeht, wie im letzten Gliede $pb^{\frac{p-1}{2}\pi} \cdot R_\pi$, d. i. genau $\lambda + 1$ mal, demnach in $R_{p^2\pi}$ genau $\lambda + 2$ mal, in $R_{p^3\pi}$ genau $\lambda + 3$ mal usw., allgemein in $R_{p^\mu\pi}$ genau $\lambda + \mu$ mal. Ist demnach n ein beliebiger Index, so kann R_n durch p nur teilbar sein, wenn $n = h\pi$; geht aber p in h genau ν mal auf, so daß $n = h' \cdot p^\nu \pi$, wo h' nicht mehr teilbar ist durch p, so enthält R_n genau die $\lambda + \nu^{\text{te}}$ Potenz von p als Faktor; denn, da R_n aufgeht durch $R_{p^\nu\pi}$, enthält es jedenfalls die Potenz $p^{\lambda+\nu}$, aber nicht mehr die Potenz $p^{\lambda+\nu+1}$, da sonst R_n, $R_{p^{\nu+1}\pi}$ den gemeinsamen Teiler $p^{\lambda+\nu+1}$ besäßen, während der größte gemeinsame Teiler ihrer Indizes gleich $p^\nu\pi$ ist, $R_{p^\nu\pi}$ aber den Teiler $p^{\lambda+\nu+1}$ nicht besitzt. Hierdurch ist die oben gestellte Frage vollständig beantwortet.

Hieraus können wir nun einen Satz erschließen, der als die größtmögliche Verallgemeinerung des Satzes (93) zu betrachten ist. Sei nämlich jetzt m eine zu a, b, Δ prime, aber sonst beliebige ungerade Zahl, welche, in Primzahlpotenzen zerlegt,

$$(98)\qquad m = p^\alpha \cdot p'^{\alpha'} \cdot p''^{\alpha''} \ldots$$

gesetzt werde, und bezeichne $\chi(m)$ die zahlentheoretische Funktion

$$(99)\quad \begin{cases} \chi(m) = p^{\alpha-1} \cdot p'^{\alpha'-1} \\ \qquad \cdot p''^{\alpha''-1} \ldots \left(p - \left(\frac{\Delta}{p}\right)\right)\left(p' - \left(\frac{\Delta}{p'}\right)\right)\left(p'' - \left(\frac{\Delta}{p''}\right)\right) \cdots, \end{cases}$$

welche für den Fall, daß Δ quadratischer Rest von m ist, in die Funktion $\varphi(m)$ übergeht, welche die Anzahl der zu m teilerfremden Zahlen $< m$ angibt. Man bezeichne mit R_π, $R_{\pi'}$, $R_{\pi''}$, ... diejenigen Zahlen der rekurrenten Reihe, für welche die Primzahlen $p, p', p'', \ldots$ eigentliche Teiler sind, und in ihnen seien genau die Potenzen

$p^\lambda, p'^{\lambda'}, p''^{\lambda''}, \ldots$ dieser Primzahlen enthalten. Dann wissen wir aus dem Voraufgehenden, daß die Zahlen

$$R_{p-\left(\frac{\Delta}{p}\right)}, \quad R_{p'-\left(\frac{\Delta}{p'}\right)}, \quad R_{p''-\left(\frac{\Delta}{p''}\right)}, \ldots$$

ebenfalls genau durch $p^\lambda, p'^{\lambda'}, p''^{\lambda''}, \ldots$ resp. teilbar sind, denn $p - \left(\frac{\Delta}{p}\right)$ ist ein Vielfaches $h\pi$, bei welchem h nicht durch p teilbar sein kann, desgleichen $p' - \left(\frac{\Delta}{p'}\right)$ ein Vielfaches $h'\pi'$, bei welchem h' nicht durch p' aufgehen kann usw. Hiernach ist $\chi(m)$ ein Vielfaches $h\pi$, bei welchem h gewiß durch $p^{\alpha-1}$ aufgeht, ein Vielfaches $h'\pi'$, bei welchem h' gewiß teilbar ist durch $p'^{\alpha'-1}$ usf. Daraus ergibt sich dann nach dem Voraufgehenden, daß $R_{\chi(m)}$ gewiß aufgeht resp. durch $p^{\lambda+\alpha-1}, p'^{\lambda'+\alpha'-1}, p''^{\lambda''+\alpha''-1}, \ldots$ und folglich auch durch m. Man erhält also den allgemeinen Satz:

Ist m irgendeine zu a, b, Δ prime ungerade Zahl, so ist stets

$$R_{\chi(m)} \equiv 0 \pmod{m} \tag{100}$$

und in Erweiterung des Begriffs des eigentlichen Teilers darf man sagen: m sei eigentlicher Teiler einer Zahl R_μ, deren Index μ ein Teiler von $\chi(m)$ ist.

Es liegt nahe, zu fragen, inwieweit diese Sätze auch umkehrbar sind. In dieser Hinsicht beweisen wir nur folgenden Ausspruch:

Ist m eine zu a, b, Δ prime ungerade Zahl, von welcher Δ quadratischer Rest ist, und R_{m-1} die erste Zahl in der rekurrenten Reihe der R_k, welche durch m aufgeht, so muß m Primzahl sein. Denn unter diesen Voraussetzungen ist $\chi(m) = \varphi(m)$ und $\varphi(m)$ ist stets kleiner als $m - 1$, sooft m keine Primzahl ist; dann würde aber aus dem gleichzeitigen Bestehen der Kongruenzen

$$R_{m-1} \equiv 0, \; R_{\varphi(m)} \equiv 0 \pmod{m}$$

auch $R_d \equiv 0 \pmod{m}$ folgen, wo d den größten gemeinsamen Teiler von $m-1$ und $\varphi(m)$, d. i. eine Zahl $\overline{\overline{<}}\, \varphi(m) < m - 1$ bezeichnet, gegen die Voraussetzung über R_{m-1}. Demnach muß m eine Primzahl sein.

13. Der so gewonnene Satz ist Ursprung einer eigentümlichen Methode, gegebene ungerade Zahlen auf die Primzahleigenschaft hin zu untersuchen. Man denke sich irgendeine rekurrente Reihe der R_k, deren Diskriminante Δ quadratischer Rest in bezug auf die zu untersuchende Zahl m ist. Es bedarf dann nur der Berechnung der ersten $m - 1$ Zahlen

$$R_1, R_2, \ldots R_{m-1} \tag{101}$$

dieser Reihe; geht die Division mit m beim letzten Gliede, aber bei keinem der früheren auf, so erweist dies m als eine Primzahl. Stellt

man dieser Methode die gewöhnlich angewandte gegenüber, bei welcher zu gleicher Untersuchung die gegebene Zahl m als Dividend durch eine Reihe wechselnder Divisoren, etwa durch die Primzahlen unterhalb der Grenze $\sqrt{m}$ auf ihre Teilbarkeit hin geprüft wird, so sieht man hier, wie *Lucas* sehr lichtvoll hervorgehoben hat, umgekehrt eine wechselnde Reihe von Dividenden, nämlich die Zahlen (101), dieser Prüfung in bezug auf die gegebene Zahl m als Divisor unterworfen; und während in jenem Falle der Nichterfolg der Divisionen die Primzahleigenschaft von m entscheidet, so bedarf es hier zu dieser Entscheidung des Erfolges der Division wenigstens bei dem letzten dieser Dividenden.

Indessen ist doch zu bedenken, daß der Satz der vorigen Nummer, auf welchem diese Methode begründet ist, kein völlig charakteristisches Merkmal für die Primzahleigenschaft einer Zahl abgibt, da er zwar eine dafür ausreichende, aber nicht zugleich auch notwendige Bedingung zum Ausdruck bringt: die Zahl m kann sehr wohl auch dann eine Primzahl sein, wenn R_{m-1} nicht das erste durch m teilbare Glied der rekurrenten Reihe ist. Aus diesem Grunde ist es wünschenswert, noch weitere Sätze zu finden, welche genaueren Aufschluß ermöglichen. Man verdankt *Lucas* und *Pepin* eine Reihe solcher Sätze, welche wenigstens für Zahlen einer bestimmten Form zur Untersuchung ihrer Teilbarkeit geeignet sind. Es handelt sich vornehmlich um große Zahlen der *Fermat*schen Reihen, d. i. von einer der Formen $R_n = 2^n - 1$, $S_n = 2^n + 1$. Was diejenigen der ersteren Form betrifft, so können sie, entsprechend einem allgemeinen Satze in Nr. 9, nur dann Primzahlen sein, wenn der Exponent n selbst eine Primzahl ist, denn, wäre $n = qr$, so ergäbe sich nach der Formel

$$2^{qr} - 1 = (2^q - 1) \cdot (2^{q(r-1)} + 2^{q(r-2)} + \cdots + 2^q + 1)$$

die Zahl $2^n - 1$ als zusammengesetzt. Da ferner $2^2 - 1 = 3$ Primzahl ist, so bedarf es nur noch der Untersuchung der Zahlen $R_p = 2^p - 1$, wo p ungerade Primzahl ist. Jeder Primteiler q einer solchen Zahl ist jedenfalls eigentlicher Teiler von R_p und deshalb, da die Diskriminante der *Fermat*schen Reihen gleich 1 ist, nach Nr. 11 von der Form $2hp + 1$, eine schon *Fermat* bekannte und von *Euler* und *Legendre* bewiesene Tatsache.[1]) — Was andererseits die Zahlen $S_n = 2^n + 1$ betrifft, so können sie nur dann Primzahlen sein, wenn n eine Potenz von 2, $n = 2^\nu$ ist; enthielte nämlich n einen ungeraden Teiler, so daß, wenn n' ungerade ist, $n = 2^\nu \cdot n'$ gesetzt werden kann, so fände sich

---

1) Siehe hierzu *Euler*, Comm. Petrop. 6, 1732/33, S. 103 oder Comm. arithm. coll. 1, S. 1; Novae Comm. Petr. 1, 1747/48, S. 20 oder Comm. ar. coll. 1, S. 51. *Legendre*, essai sur la th. des nombres, 2. éd. 1808, S. 191 sqq.

$$2^{2^\nu n'} + 1 = (2^{2^\nu} + 1) \cdot (2^{2^\nu (n'-1)} - 2^{2^\nu (n'-2)} + \cdots + 1),$$

also als zusammengesetzte Zahl. Man hat es also allein mit der Frage zu tun, ob die Zahlen von der Form $2^{2^\nu} + 1$ Primzahlen sind. Daß sie zwar für $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ Primzahlen, es nicht aber, wie *Fermat* gemeint hat, für jeden Wert, nämlich schon für $\nu = 5$ nicht sind, ist bereits in Nr. 11 gezeigt worden. Die Frage ist bekanntlich von besonderer Bedeutung für die Lehre von der Kreisteilung, da der letzteren zufolge nur für solche Primzahlen p, welche jene Form haben, der Kreis mittels Zirkel und Lineal in p gleiche Teile geteilt werden kann.[1])

Wir wollen hier nun noch einige Sätze von *Lucas* und von *Pepin* beibringen, welche bei der Untersuchung der Zahlen $R_p = 2^p - 1$ und $S_{2^\nu} = 2^{2^\nu} + 1$ in der gedachten Hinsicht sich nutzbringend erweisen.

14. Sei $N = 2^{2^\nu} + 1$. Wenn diese Zahl eine Primzahl ist, so ist sie, falls $\nu \geqq 2$ ist (für $\nu = 1$ ist $N = 5$ Primzahl), von der Form $8k + 1$, in bezug auf sie also 2 quadratischer Rest. Legen wir deshalb der Untersuchung die Reihen von *Dupré* zugrunde, deren Diskriminante 2 ist. In ihr müßte $R_{N-1} = R_{2^{2^\nu}}$ durch N teilbar sein, wenn N Primzahl ist. Da nun nach (91):

$$R_{2^n} = S_1 \cdot S_2 \cdot S_4 \ldots S_{2^{n-1}} \tag{102}$$

ist, müßte dann einer der Faktoren $S_1, S_2, S_4, \ldots S_{2^{2^\nu - 1}}$ durch N teilbar, und deshalb N gewiß eine zusammengesetzte Zahl sein, falls keine dieser Zahlen oder, wenn zur Abkürzung allgemein

$$S_{2^n} = s_n$$

gesetzt wird, falls keine der Zahlen

---

1) *Legendre* a. a. O. gibt die Zerlegung von $2^{32} + 1$, $2^{39} + 1$, $2^{32} - 1$; die Zahl $2^{31} - 1 = 2147483647$ erwies *Euler* (Mém. de l'Ac. de Berlin (1772) 1774, S. 36 als die größte bis dahin bekannte Primzahl. — Die Zahlen

$$2^1 + 1 = 3, \quad 2^2 + 1 = 5, \quad 2^4 + 1 = 17, \quad 2^8 + 1 = 257, \quad 2^{16} + 1 = 65537$$

wurden leicht als Primzahlen erkannt. — Für $2^{32} + 1$ fand schon *Euler*, was in Nr. 11 gezeigt, daß sie den Faktor 641 hat (Nov. Comm. Petr. 1, 1747/48, Comm. ar. coll. 1, S. 55). Nach *Pervuschin* (Bull. Ac. Pét. 24 u. 25) ist:

$$2^{2^{12}} + 1 \equiv 0 \pmod{114689 = 7 \cdot 2^{14} + 1},$$

$$2^{2^{23}} + 1 \equiv 0 \pmod{167772161 = 5 \cdot 2^{25} + 1},$$

$$2^{2^{36}} + 1 \equiv 0 \pmod{2748779069441}.$$

Für $2^{2^6} + 1 = 2^{64} + 1$ zeigte *Landry* (Mondes (2) 52; Nouv. Corr. Math. 6, S. 417), daß

$$2^{64} + 1 = 274177 \cdot 67280421310721$$

ist, vgl. *Seelhoff* Arch. f. Math. u. Phys. (2) 2, S. 329.

(103) $$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{2^\nu - 1}$$

durch N teilbar ist. Zwischen diesen Zahlen besteht die aus (89) fließende Rekursionsformel:

(104) $$s_{n+1} = s_n^2 - 2 \quad (\text{für } n > 0)$$

mit den Anfangsgliedern $s_0 = 2$, $s_1 = s_0^2 + 2 = 6$. Ist nun im Gegenteil eine der Zahlen (103), etwa $s_{\lambda-1}$, durch N teilbar, so ist sie es auch durch jeden etwa in N aufgehenden Primfaktor p. Nun folgt aus (104), daß, wenn $s_n \equiv 0 \pmod{p}$ ist, $s_{n+1} \equiv -2$, $s_{n+2} \equiv 2$, $s_{n+3} \equiv 2, \ldots \pmod{p}$, also kein auf s_n folgendes Glied der Reihe (103) mehr durch p teilbar ist. Daraus ist zu schließen, daß, weil $s_{\lambda-1}$ durch p teilbar vorausgesetzt ist, kein früheres Glied der Reihe (103) und daher wegen (102) keine der Zahl R_{2^λ} in der Reihe

$$R_1, R_2, R_4, \cdots, R_{2^{2^\nu}}$$

voraufgehende Zahl durch p teilbar, p also eigentlicher Teiler von R_{2^λ}, mithin von der Form $2^\lambda k + 1$ ist. Wäre nun $\lambda \gtreqless 2^{\nu-1}$ und $p = 2^\lambda k + 1$ die **kleinste** der etwa in N aufgehenden Primzahlen, so wäre N, wenn zusammengesetzt, mindestens gleich

$$p^2 = 2^{2\lambda} k^2 + 2^{\lambda+1} k + 1,$$

was doch im Gegenteil größer ist als $N = 2^{2^\nu} + 1$. In dieser Voraussetzung müßte also N Primzahl sein. Man gelangt so zu folgendem von *Lucas* ausgesprochenen Satze:

Ist in der Reihe (103) kein Glied teilbar durch N, so ist N zusammengesetzt; ist aber das erste durch N teilbare Glied der Reihe die Zahl $s_{\lambda-1}$, so ist jeder etwaige Primteiler von N von der Form $2^\lambda k + 1$ und N selbst ist eine Primzahl von dieser Form, wenn $\lambda \gtreqless 2^{\nu-1}$.

Ganz analoge Sätze hat *Lucas* auch mit Bezug auf die Zahlen von den Formen $2^{4q+1} - 1$ und $2^{4q+3} - 1$ aufgestellt, doch zeigen sie sich sämtlich immer noch als unzureichend, um jederzeit über die Primzahleigenschaft der fraglichen Zahlen zu entscheiden, insofern z. B. die Zahl N auch dann noch eine Primzahl sein könnte, wenn die oben mit λ bezeichnete Zahl $< 2^{\nu-1}$ ist.

15. Ein vollkommenes Kriterium, um zu entscheiden, ob die Zahl $N = 2^{2^\nu} + 1$ Primzahl sei oder nicht, hat *Pepin* gegeben. (Par. Comptes Rendus (1877) 85, S. 329; einen ähnlichen Satz für einen andern Fall gab er ebendas. (1878) 86, S. 307.) Sei q irgendeine Primzahl von der Form $4k + 1$, die nicht zugleich von der Form $Nz + 1$ und in bezug auf welche N quadratischer Nichtrest ist, z. B. $q = 5$, für welchen Modulus in der Tat, falls $\nu \gtreqless 2$ ist,

$N \equiv 2 \pmod{5}$ also ein Nichtrest ist. Seien ferner die rekurrenten Reihen der R_k, S_k jetzt auf die Skala

$$x^2 = (q+1)x - q$$

mit den Wurzeln $\alpha_1 = q$, $\alpha_2 = 1$ und der Diskriminante $\Delta = (q-1)^2$ bezüglich, welche von jeder nicht in $q-1$ enthaltenen Primzahl quadratischer Rest ist. Hiernach ist

$$R_{2^n} = \frac{q^{2^n}-1}{q-1}, \quad S_{2^n} = q^{2^n} + 1.$$

Dann wird behauptet: Damit N Primzahl sei, ist notwendig und hinreichend, daß

$$S_{2^{2^\nu}-1} = q^{\frac{N-1}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{N} \tag{105}$$

sei. Daß es notwendig ist, ergibt sich aus dem allgemeinen Satze, wonach, falls N Primzahl ist, $R_{N-1} = R_{2^{2^\nu}}$ durch N aufgehen muß, während $R_{2^{2^\nu}-1}$ durch N nicht aufgehen, nämlich die Kongruenz

$$q^{\frac{N-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{N}$$

nicht bestehen kann[1]), denn, da N quadratischer Nichtrest von q ist, so ist auch umgekehrt, wenn N Primzahl ist, q quadratischer Nichtrest von N. Daß die Bedingung (105) aber auch ausreichend ist, erkennt man folgendermaßen: Aus (105) folgt $R_{2^{2^\nu}}$ teilbar durch N, also auch durch jeden etwa in N enthaltenen Primfaktor p. Dieser muß daher eigentlicher Teiler einer Zahl R_{2^λ} der Reihe

$$R_1,\ R_2,\ R_4,\ \cdots,\ R_{2^{2^\nu}},$$

daher auch Teiler von $S_{2^{\lambda-1}}$ sein, d. h. es wäre

$$q^{2^{\lambda-1}} \equiv -1 \pmod{p},$$

also p kein Teiler von $q-1$ und, wenn $\lambda < 2^\nu$ wäre,

$$q^{2^{2^\nu}-1} \equiv +1 \pmod{p}$$

entgegen der Kongruenz (105), welche auch (mod. p) erfüllt sein müßte. Man schließt demnach, daß p ein eigentlicher Teiler von $R_{2^{2^\nu}}$ und daher von der Form $2^{2^\nu}k + 1$ sein muß. Da p andererseits aufgeht in $N = 2^{2^\nu} + 1$, muß p mit N identisch, N also Primzahl sein.

---

1) Man erkennt hier den Grund, warum statt des noch unzureichenden Kriteriums, wie der Satz von *Lucas* es bietet, ein vollkommenes erreicht wird, in dem Umstande, daß bei der Wahl der vorgelegten rekurrenten Reihe an Stelle derjenigen von *Dupré* die Zahl N, wenn sie Primzahl ist, ein eigentlicher Teiler von $R_{2^{2^\nu}}$ sein muß.

Wir schließen diese Betrachtungen ab, indem wir noch zwei ähnliche Sätze von *Lucas* beweisen. Sie lauten:

I. Ist $p = 4q + 3$ Primzahl, so ist $2p + 1 = 8q + 7$ dann und nur dann eine Primzahl, wenn in der *Fermat*schen Reihe $R_p \equiv 0 \pmod{2p+1}$ ist.[1])

II. Ist $p = 4q + 3$ Primzahl, so ist $2p - 1 = 8q + 5$ dann und nur dann eine Primzahl, wenn in der Reihe von *Dupré* $R_p \equiv 0 \pmod{2p-1}$ ist.

Zum Beweise des ersteren Satzes bemerken wir, daß, da die Diskriminante der *Fermat*schen Reihen gleich 1, also für jede Primzahl quadratischer Rest ist, die Zahl $2p+1$, wenn sie Primzahl ist, notwendig in R_{2p} aufgehen muß. Nun kann $S_p = 2^p + 1$ nicht durch $2p + 1$ teilbar sein, denn $2p + 1$ ist kongruent 7 (mod. 8) und in bezug auf einen solchen Modulus ist 2 quadratischer Rest, -1 aber quadratischer Nichtrest, unmöglich also $2^p \equiv -1$. Also muß $R_p \equiv 0$ sein (mod. $2p + 1$). Diese notwendige Bedingung reicht aber auch aus. Denn, wäre $2p + 1$ alsdann eine zusammengesetzte Zahl und π einer ihrer Primfaktoren, so wäre auch $R_p \equiv 0 \pmod{\pi}$ und dieser Kongruenz zufolge π ein eigentlicher Teiler von R_p, mithin von der Form $\pi = 2kp + 1$. Da andererseits π ein Teiler von $2p + 1$ ist, so folgt wieder die Identität von π und $2p + 1$, d. h. die Primzahleigenschaft der Zahl $2p + 1$.

Ebenso beweist sich, wenn wir zum zweiten Satz übergehen, da die Diskriminante der *Dupré*schen Reihen gleich 2, also quadratischer Nichtrest von $2p - 1 = 8q + 5$ ist, die Kongruenz $R_{2p} \equiv 0$ (mod. $2p - 1$) als eine für den Fall, daß $2p - 1$ Primzahl ist, notwendige Bedingung. Nun ist aber

$$S_p = \left(1 + \sqrt{2}\right)^p + \left(1 - \sqrt{2}\right)^p$$

nicht teilbar durch $2p - 1$, denn sonst wäre

$$\left.\begin{array}{ll} & \left(1+\sqrt{2}\right)^p \equiv -\left(1-\sqrt{2}\right)^p \\ \text{also} & \left(1+\sqrt{2}\right)^{2p} \equiv -\left(1-\sqrt{2}\right)^p \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^p \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod{2p-1},$$

während doch, wenn zur Abkürzung $P = 2p - 1$ gesetzt wird,

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2p} = \left(1+\sqrt{2}\right) \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^P \equiv \left(1+\sqrt{2}\right)\left(1 + 2^{\frac{P-1}{2}}\sqrt{2}\right)$$
$$\equiv 1 + 2^{\frac{P+1}{2}} + \sqrt{2}\left(1 + 2^{\frac{P-1}{2}}\right)$$

und, da $\left(\frac{2}{P}\right) \equiv 2^{\frac{P-1}{2}} \equiv -1$, $2^{\frac{P+1}{2}} \equiv -2$ ist, im Gegenteil:

---

1) Daß, wenn $p = 4q + 3$ und $2p + 1 = 8q + 7$ Primzahlen sind, $2^p - 1$ zusammengesetzt, nämlich durch $2p + 1$ teilbar ist, findet sich schon bei *Euler* Comm. arith. coll. I, S. 2.

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2p} \equiv -1 \pmod{2p-1}$$

gefunden wird. Hieraus schließt man also zunächst, daß, wenn $2p-1$ Primzahl ist, notwendig $R_p \equiv 0 \pmod{2p-1}$ sein muß. Dies reicht aber auch aus. Denn, wäre $P = 2p-1$ zusammengesetzt und π ein Primfaktor von P, so fände sich wieder π als eigentlicher Teiler von R_p, mithin von der Form $\pi = kp \pm 1$, während doch $2p-1$ teilbar ist durch π; man schlösse daraus wieder leicht die Identität von π und $2p-1$, d. h. die Primzahleigenschaft der letzteren Zahl.

16. Die Frage, ob die Zahlen von der Form $2^n - 1$ Primzahlen oder zusammengesetzte Zahlen sind, ist von wesentlichster Bedeutung für die Aufsuchung der sogenannten vollkommenen Zahlen. Man versteht unter vollkommener Zahl eine ganze Zahl N, für welche die Summe ihrer aliquoten Teile d. i. ihrer von N selbst verschiedenen Teiler gleich N, oder, was dasselbe sagt, für welche die Summe ihrer sämtlichen Teiler einschließlich N gleich dem Doppelten der Zahl N ist. Bezeichnet man mit *Liouville* diese Summe durch $\zeta_1(N)$, so bestimmt also die Gleichung

$$\zeta_1(N) = 2N \tag{106}$$

die vollkommenen Zahlen. Schon *Euclid* hat gelehrt (Elementa, liber 9, prop. 36), daß, wenn die Summe der Zahlen

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{p-1} = 2^p - 1$$

eine Primzahl ist, was nach Nr. 13 nur dann der Fall sein kann, wenn p selbst Primzahl ist, die gerade Zahl

$$N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1) \tag{107}$$

eine vollkommene Zahl ist. In der Tat ist für diese Zahl dann die Summe ihrer Teiler gleich

$$(1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^{p-1})\left(1 + (2^p - 1)\right),$$

d. i.

$$(2^p - 1) \cdot 2^p = 2N.$$

Aber *Euler* verdankt man den Beweis, daß die so für hinreichend erkannte Form (107) auch die notwendige Form für gerade vollkommene Zahlen ausmacht (s. die erst nach *Euler*s Tode veröffentlichte Schrift tractatus de numerorum doctrina, Comm. ar. coll. 2, p. 514 oder besser de numeris amicabilibus, ebendas. S. 630, § 8). Soll nämlich

$$N = 2^\alpha \cdot m,$$

wo m ungerade, eine gerade vollkommene Zahl sein, so muß $\alpha > 0$ und

$$\zeta_1(N) = (2^{\alpha+1} - 1) \cdot \zeta_1(m) = 2^{\alpha+1} \cdot m$$

mithin:

$$\frac{\zeta_1(m)}{m} = \frac{2^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1} - 1}$$

sein. Da der Bruch zur Rechten seine einfachste Gestalt hat, so muß, unter n eine ganze Zahl verstanden,

$$\zeta_1(m) = 2^{\alpha+1} \cdot n, \; m = (2^{\alpha+1} - 1) \cdot n$$

sein. Demnach wären, wenn n von 1 verschieden,

$$1, \; n, \; 2^{\alpha+1} - 1, \; (2^{\alpha+1} - 1)n$$

vier notwendig verschiedene Teiler von m und folglich die Summe $\zeta_1(m)$ sämtlicher Teiler von m mindestens gleich der Summe dieser Zahlen. So erhielte man die Ungleichheit

$$2^{\alpha+1} \cdot n \geqq 2^{\alpha+1}(1 + n),$$

welche unmöglich ist. Also kann n nur gleich 1, d. h.

$$m = 2^{\alpha+1} - 1 \quad \text{und} \quad \zeta_1(m) = 2^{\alpha+1} = 1 + m$$

sein, was nur der Fall, wenn m eine Primzahl π, also $\alpha + 1$ eine Primzahl p ist. Man findet also:

Soll $N = 2^\alpha \cdot m$ eine gerade vollkommene Zahl sein, so muß

$$N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$$

sein, während p und $\pi = 2^p - 1$ Primzahlen sind.

Man kann fast noch einfacher schließen, wie *Lucas* (th. des nombres, S. 375). Sei, in Primzahlpotenzen zerlegt,

$$N = 2^\alpha \cdot \pi^\beta \varkappa^\gamma \ldots \tag{108}$$

Dann ist

$$\zeta_1(N) = (2^{\alpha+1} - 1)(1 + \pi + \pi^2 + \cdots + \pi^\beta)(1 + \varkappa + \cdots + \varkappa^\gamma) \cdots$$

Für vollkommene Zahlen bestünde also die Gleichung

$$2^{\alpha+1} \cdot \pi^\beta \varkappa^\gamma \cdots = (2^{\alpha+1} - 1)(1 + \pi + \cdots + \pi^\beta)(1 + \varkappa + \cdots + \varkappa^\gamma) \cdots,$$

aus welcher

$$\pi^\beta \varkappa^\gamma \cdots + \frac{\pi^\beta \varkappa^\gamma \cdots}{2^{\alpha+1} - 1} = (1 + \pi + \cdots + \pi^\beta)(1 + \varkappa + \cdots + \varkappa^\gamma) \cdots$$

hervorgeht. Demnach muß $\frac{\pi^\beta \varkappa^\gamma \cdots}{2^{\alpha+1} - 1}$ eine ganze Zahl sein und hat als solche die Form $\pi^{\beta'} \varkappa^{\gamma'} \ldots$ Die beiden Glieder zur Linken:

$$\pi^{\beta}\varkappa^{\gamma}\ldots, \quad \pi^{\beta'}\varkappa^{\gamma'}\ldots$$

sind zwei verschiedene Teiler der Zahl $\pi^{\beta}\varkappa^{\gamma}\ldots$, deren sämtliche Teiler zur Rechten stehen. Die Gleichheit kann mithin nur stattfinden, wenn die gesamte Anzahl der Teiler, nämlich:

$$(\beta + 1)(\gamma + 1)\ldots$$

nur zwei beträgt, was erfordert, daß von den Exponenten $\beta, \gamma, \ldots$ ein einziger, etwa β, gleich 1 ist, die übrigen aber verschwinden, daß mithin die Zerlegung (108) sich auf die folgende:

$$N = 2^{\alpha}\cdot\pi$$

reduziert. Die Bedingung für vollkommene Zahlen liefert dann weiter

$$2^{\alpha+1}\pi = (2^{\alpha+1} - 1)(1 + \pi),$$

d. i.

$$\pi = 2^{\alpha+1} - 1$$

und $\alpha + 1$ gleich einer Primzahl p.

Nach *Mersennes* Versicherung (cogitata physico-mathem., Paris 1644, praefatio generalis art. 19) geben unter allen Primzahlen $p \overline{\gtrless} 257$ nur die folgenden:

$$(109) \qquad p = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17,\ 19,\ 31,\ 67,\ 127,\ 257$$

eine Primzahl $\pi = 2^p - 1$. Hiernach haben die zugehörigen Werte der Zahl $2^p - 1$ den Namen *Mersenne*sche Zahlen erhalten. Daß die ersten sieben von ihnen in der Tat Primzahlen sind, war ohne große Schwierigkeit zu bestätigen. Für $p = 31$ bewies es *Euler* durch Ausführung der Divisionen mit den Primzahlen $< \sqrt{2^{31} - 1}$ (s. S. 93 Anm.). Auch die weitere Behauptung *Mersennes*, daß für die übrigen Primzahlexponenten $p \overline{\gtrless} 257$ die Zahl $2^p - 1$ keine Primzahl sei, ist wenigstens für $p < 61$ als richtig erkannt worden. In einer Tabelle, welche *Landry* gegeben[1]) und *Lucas* seiner großen Arbeit [Amer. Journ. of Math. 1 (1878)] eingefügt hat, finden sich die Zerlegungen aller Zahlen von der Form $2^n \pm 1$ von $n = 1$ bis $n = 64$ (bis auf vier). Aus dieser wie aus späteren Ergebnissen von *Le Lasseur* hat *Lucas* in seiner th. des nombres p. 357 eine Zusammenstellung aller Exponenten p gezogen, für welche $2^p - 1$ bisher als zusammengesetzte Zahl erkannt worden ist. Wir geben sie in folgender Tabelle wieder, welche in der Spalte p den Exponenten, in der Spalte d den kleinsten Faktor der zugehörigen Zahl $2^p - 1$ angibt:

1) Décomp. des nombres $2^n \pm 1$ en leurs facteurs premiers de $n = 1$ à $n = 64$ moins quatre, Paris 1869 (mit: Aux mathématiciens de toutes les parties du monde. Communication sur la décomposition des nombres en leurs facteurs simples, Paris 1867).

p	d	p	d	p	d	p	d
11	23	47	2 351	97	11 447	211	15 193
23	47	53	6 361	113	3 391	223	18 287
29	233	59	179 951	131	263	233	1 399
37	223	73	439	151	18 121	239	479
41	13 367	79	2 687	179	359	251	503
43	431	83	167	191	383	.	.

Von den hier zusammengestellten Resultaten gehören die auf $p = 11, 23, 37$ bezüglichen schon *Fermat* an (op. math., Tolosiae 1679, S. 164). Für $p = 29$ gab es *Euler* (Comm. Petr. 6, S. 103 oder Comm. ar. coll. 1, S. 2), desgleichen für $p = 43, 73$. Nach dem ersten der in Nr. 15 bewiesenen Sätze von *Lucas* ist $2^p - 1 \equiv 0 \pmod{q}$, wenn $p = 4n + 3$, $q = 8n + 7$ Primzahlen sind, was, wie dort in der Anmerkung erwähnt, schon *Euler* bekannt war. Aus diesem Satze folgt die Zerlegbarkeit der Zahlen $2^p - 1$ auch für

$$p = 83, 131, 179, 191, 239, 251.$$

Die Zusammensetzung für $p = 41$ gab *Plana* (mem. R. Ac. Torino (1) 20 (1863), S. 130); für $p = 43, 47, 53, 59$ gab sie *Landry; Le Lasseur* (s. *Lucas* Amer. Journ. 1, S. 236, sowie seine récréations math. 1, S. 241 und 2, S. 230) für

$$p = 73, 79, 97, 113, 211, 223, 233.$$

Zudem fand *Seelhoff* die folgenden Zusammensetzungen für den Fall der Exponenten $p = 37$ (Arch. f. Math. u. Phys. (2) 5, S. 211) und $p = 41, 47, 53$ (ebend. (2) 2, S. 327):

$$2^{37} - 1 = 223 \cdot 616\,318\,177$$

$$2^{41} - 1 = 13\,367 \cdot 164\,511\,353$$ [1])

$$2^{47} - 1 = 2\,351 \cdot 59\,862\,819\,377$$

$$2^{53} - 1 = 69\,431 \cdot 129\,728\,784\,761;$$

auch der zweite Faktor in der ersten dieser Zerlegungen ist eine Primzahl.

Wenn soweit die *Mersenne*sche Aussage sich als richtig erwiesen hat, so hat dagegen *Seelhoff* (Ztschr. f. Math. u. Phys. 31 (1886), S. 174) nachgewiesen, daß sie für $p = 61$ unrichtig, daß nämlich

1) Bei *Seelhoff* heißt der erste Faktor 13 767, was *Valentin* (ebend. (2) 4, S. 100) berichtigt hat; auch bemerkt Dieser, daß der zweite Faktor in der Zerlegung von $2^{53} - 1$ noch keine Primzahl, sondern gleich

$$6361 \cdot 20\,394\,401$$

ist.

$$2^{61}-1$$

Primzahl ist. Dasselbe fand nach einem im Bull. Acad. Pét. (3) 31 (1887) col. 532 enthaltenen Berichte von *Imschenetzki* und *Buniakowsky* schon 1883 *Perwuschin*. Inwieweit aber *Mersennes* Aussage für die Exponenten

$$p = 67,\ 71,\ 89,\ 101,\ 103,\ 107,\ 109,\ 127,\ 137,\ 139,\ 149,\ 157,\ 163,\ 167,\ 173,\ 181,\ 193,\ 197,\ 199,\ 227,\ 229,\ 241,\ 257$$

zutrifft, blieb bisher noch unbekannt. (Man sehe hierzu *W. W. Rouse Ball*, Mess. of Math. (2) 21, S. 34 u. 121).

Aus diesen Resultaten ergibt sich nun in Verbindung mit dem zuvor Bewiesenen, daß bisher nur neun gerade vollkommene Zahlen bekannt sind: diejenigen Zahlen

$$N = 2^{p-1}\cdot(2^p-1),$$

welche den Exponenten $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61$ entsprechen; die ersten acht derselben, zwar schon von *J. Prestet*, nouv. éléments de math. 1, Paris 1689, S. 155 angeführt, stehen aber erst seit *Euler* fest, die neunte nach den Resultaten von *Seelhoff* und *Perwuschin*.

Ob es aber auch ungerade vollkommene Zahlen gibt, ist zurzeit noch zweifelhaft. Schon *Euler* hat eine einfache Bedingung gegeben, denen solche Zahlen genügen müßten. Sollte nämlich eine ungerade Zahl N eine vollkommene Zahl sein, so folgte aus der sie definierenden Gleichung:

$$\zeta(N) = 2N$$

die Kongruenz

$$\zeta(N) \equiv 2 \pmod{4};$$

an späterer Stelle (Kap. 8, Nr. 5) wird gezeigt werden, daß infolge hiervon die ungerade Zahl N von der Form

$$N = p^{4a+1}\cdot y^2$$

sein müßte, wo p eine Primzahl von der Form $4k+1$. Auch sonst sind weitere Bedingungen, die für ungerade vollkommene Zahlen notwendig wären, aufgestellt.[1]) Doch ist noch ebensowenig ihr Nichtvorhandensein bewiesen, wie andererseits tatsächlich eine solche Zahl gefunden.

---

1) Siehe *M. A. Stern, Cl. Servais, E. Cesàro, J. J. Sylvester, C. Bourlet, M. Stuyvaert* resp. in *Mathesis* (1) 6, S. 248; 7, S. 228, S. 245; 8, S 57; Nouv. Ann. math. (3) 15, S. 297; *Mathesis* (2) 6, S. 132.

Drittes Kapitel.

Zerfällung einer Zahl in Summanden.

1. Haben wir im vorigen die additive Bildung von Zahlen aus anderen Zahlen behandelt, welche als die gegebenen anzusehen waren, so wollen wir nunmehr die umgekehrte Beziehung in Betracht nehmen, nämlich untersuchen, wie eine gegebene ganze Zahl als Summe anderer Zahlen dargestellt werden kann, die also die gesuchten sind. Es wird sich dabei vornehmlich um die Anzahl solcher Darstellungen handeln. Als Summe der letzteren Zahlen bezeichnen wir die gegebene Zahl stets mit dem Buchstaben s, und wir nennen jede Darstellung von s als Summe positiver ganzer Zahlen eine Zerfällung von s. Da die Summanden nicht größer als s, mithin nur Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots, s$ sein können, wird jede Zerfällung von s, wenn gleiche Teile vereint werden dürfen, die Form haben

$$(1) \qquad s = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + \cdots + s \cdot x_s,$$

worin die x_i nicht negative ganze Zahlen bedeuten. Die Anzahl aller derartigen Zerfällungen von s ist also identisch mit der Anzahl aller Auflösungen der unbestimmten Gleichung (1) in nicht negativen ganzen Zahlen x_i. Zur Bezeichnung dieser Anzahl wählen wir ein Zeichen, das, soviel ich sehe, zuerst von *Jacobi* (Journ. f. Math. 12, S. 167) und später namentlich von *Th. Vahlen* in seiner größeren Arbeit über additive Zahlentheorie (ebendas. 112, S. 1) mit Vorteil benutzt worden ist, das Zeichen:

$$\underset{x_i \geqq 0}{N}(s = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \cdots + s \cdot x_s).$$

Aus der gesamten Menge dieser Zerfällungen kann man aber nach den verschiedensten Gesichtspunkten einen Teil derselben ausscheiden. Z. B. kann man, statt alle Zahlen $1, 2, 3, \ldots, s$ als Summanden, oder, wie wir sagen wollen, als Elemente der Zerfällung zuzulassen, nur einen Teil derselben zu Elementen wählen. Bezeichnen also $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nur $n < s$ bestimmte Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots, s$, so kann man nach den Lösungen der Gleichung

$$(2) \qquad s = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \qquad (x_i \geqq 0)$$

in nicht negativen ganzen Zahlen x_i fragen; die Anzahl dieser Lösungen d. i. der entsprechenden Zerfällungen der Zahl s bezeichnen wir analog mit

$$N(s = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n).$$
$$x_i \geqq 0$$

Sylvester hat dafür ein in gewisser Hinsicht vorteilhafteres Zeichen benutzt, das wir hier, ein wenig verändert, folgendermaßen schreiben:

$$\frac{s}{\overline{a_1, a_2, \ldots a_n}}.$$

Die so bezeichnete Anzahl der Lösungen der Gleichung (2) aber heiße im Anschluß an *Sylvester* der Denumerant dieser Gleichung. Dies Zeichen soll auch benutzt werden, wenn die Größen a_i nicht, wie bisher vorausgesetzt, voneinander verschiedene positive Zahlen, ja selbst, wenn sie negative Zahlen sind, doch wird auch dann immer nur nach den Lösungen in nicht negativen ganzen Zahlen gefragt.

Statt die Elemente der Zerfällung selbst festzusetzen, kann man auch nur ihre Anzahl festsetzen, also etwa die Zerfällungen der Zahl s in n Summanden verlangen. Dabei läßt sich bestimmen, daß diese Summanden sämtlich voneinander verschieden sein, die Elemente der Zerfällung also nur einmal auftreten sollen, oder aber daß auch, wie bei den bisher betrachteten Fällen, deren Wiederholung zulässig sei. Danach hat man also Zerfällungen mit und ohne Wiederholung d. i. in verschiedene Elemente oder in Elemente überhaupt zu unterscheiden. Man kann ferner statt der Anzahl der zulässigen Elemente auch deren Größe durch irgendwelche Bestimmungen beschränken, oder kann auch festsetzen, daß die Natur der Elemente eine besondere, daß sie z. B. lauter ungerade oder lauter gerade Zahlen oder Zahlen von sonst einer vorgeschriebenen Form oder Beschaffenheit sein sollen usw. Endlich kann man auch, da eine Summe durch Vertauschung der Summanden ungeändert bleibt, bei den Zerfällungen im Gegensatz zu den anfangs betrachteten Fällen auf die Anordnung der Elemente Rücksicht nehmen und zwei Zerfällungen, die aus den gleichen, aber anders geordneten Elementen bestehen, als verschiedene zählen. Dann sollen im Gegensatz zu den Zerfällungen der bisherigen Art, die schlechthin Zerfällungen (partitions) heißen sollen, diese geordneten Zerfällungen oder Zerfällungen mit Permutation der Elemente Zergliederungen (compositions) genannt werden.

2. So entsteht eine Fülle von Aufgaben, denn für alle die angedeuteten mannigfaltigen Arten der Zerfällung wäre die Anzahl derselben zu bestimmen und etwaige Beziehungen zwischen diesen verschiedenen Anzahlen aufzudecken, u. dgl. mehr. Schon *Fermat* hat eine Reihe dahin zielender Sätze ausgesprochen, unter denen sein Satz von der Zerfällbarkeit jeder Zahl in Polygonalzahlen einer der berühmtesten ist. Vornehmlich aber war es *Euler*, der dies Gebiet

der mathematischen Spekulation erfolgreich eröffnete, indem er sich eines vorzüglich dazu geeigneten analytischen Hilfsmittels, der Entwicklung gewisser unendlichen Produkte in Potenzreihen, bediente. So erwies sich eine innige Beziehung der Theorie von der Zerfällung ganzer Zahlen zur Analysis. Da sie andererseits enge verwandt ist mit der Kombinationslehre in weiterem Sinne, so erscheinen die rühmenden Worte, mit welchen sie *Sylvester* in einer seiner bezüglichen Arbeiten charakterisiert hat, nicht unberechtigt: Partitions constitute the sphere in which analysis lives, moves and has its being; and no power of language can exagerate or point too forcibly the importance of this till recently almost neglected but vast, subtle and universally permeeting element of algebraic thought and expression.

Um das erwähnte analytische Hilfsmittel zu kennzeichnen (s. Näheres darüber in des Verf. Analytische Zahlentheorie, Kap. 1 und 2), betrachten wir das Produkt[1])

$$\prod_{h=1}^{n}(1+x^h) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n).$$

Wird es nach Potenzen von x entwickelt, so erscheinen in deren Exponenten alle Zahlen, die additiv aus verschiedenen der Zahlen 1, 2, 3, . . ., n gebildet werden können, und die Potenz x^s so oft, als s in verschiedene jener Zahlen zerfällt werden kann. Nennt man $c_{n,s}$ diese Anzahl, so darf man also schreiben:

$$\prod_{h=1}^{n}(1+x^h) = \sum_{s=0}^{\frac{n(n+1)}{2}} c_{n,s}x^s, \tag{3}$$

da die Entwicklung mit der Potenz $x^0 = 1$ beginnt und mit der Potenz

$$x^{1+2+3+\cdots+n} = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

schließt. Weil so die Anzahl $c_{n,s}$ durch Entwicklung des Produktes gewonnen wird, heißt man dies letztere die erzeugende Funktion für $c_{n,s}$.

Ähnlicherweise lassen sich auch bei anderen Zerfällungsarten erzeugende Funktionen für deren Anzahl aufstellen. Werden z. B. die Reihen

1) Um mit unendlichen Produkten und Potenzreihen rechnen zu können, bedarf es der Konvergenz derselben. Diese ist hier wie bei den sonst in der Folge zur Verwendung kommenden Ausdrücken dieser Art gewährleistet, wenn die Variable ihrem absoluten Betrage nach klein genug gedacht wird. S. die oben zitierte Stelle.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1-x^n} = 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \cdots$$

ineinander multipliziert, so entsteht als allgemeines Glied der Entwicklung die Potenz

$$x^{1 \cdot z_1 + 2 z_2 + 3 z_3 + \cdots + n z_n},$$

worin die z_i nicht negative ganze Zahlen bedeuten; die Potenz x^s wird demnach so oft hervorgehen, als die Gleichung

$$s = 1 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 + 3 \cdot z_3 + \cdots + n \cdot z_n \tag{4}$$

Lösungen in nicht negativen ganzen Zahlen zuläßt, d. h. so oft, als die Zahl s in gleiche oder verschiedene der Zahlen 1, 2, 3, . . ., n zerfällt werden kann, eine Anzahl, die als Denumerant der Gleichung (4) durch

$$\frac{s}{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n}$$

zu bezeichnen wäre. Schreibt man einfacher

$$\gamma_{n,s} = \frac{s}{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n}, \tag{5}$$

so entsteht die Entwicklung

$$\prod_{h=1}^{n} \frac{1}{1-x^h} = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_{n,s} \cdot x^s, \tag{6}$$

und das Produkt zur Linken ist die erzeugende Funktion für $\gamma_{n,s}$. Läßt man hier n unendlich groß werden und schreibt dann

$$\prod_{h=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^h} = \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma_s \cdot x^s, \tag{7}$$

so bezeichnet der Koeffizient Γ_s, für welchen das Produkt zur Linken die erzeugende Funktion ist, die Anzahl der Zerfällungen von s in gleiche oder verschiedene Summanden überhaupt, d. h. die Anzahl der Lösungen der Gleichung (1) oder den Denumeranten

$$\Gamma_s = \gamma_{s,s}. \tag{7a}$$

3. Bisweilen liefert auf solche Weise die, eine gesuchte Anzahl erzeugende Funktion unmittelbar einen einfachen Ausdruck derselben. Wenn z. B. die Gleichung

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

$n$mal mit sich selbst multipliziert wird, so ist das allgemeine Glied der Entwicklung die Potenz

$$x^{z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n},$$

deren Exponent jede Summe aus n gleichen oder verschiedenen positiven ganzen Zahlen vorstellt, wobei aber dieselben Zahlen verschieden geordnet sein können. Demnach entsteht die Potenz x^s so oft, als die Anzahl der Zergliederungen von s in n positive Summanden beträgt, und die erzeugende Funktion der Anzahl ist

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^n = x^n\left(1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{1\cdot 2\cdots i}x^i + \cdots\right).$$

Setzt man hier $n + i = s$, so nimmt das allgemeine Glied die Form an:

$$\frac{n(n+1)\cdots(s-1)}{1\cdot 2\cdots(s-n)}\cdot x^s = \frac{(s-1)!}{(s-n)!\,(n-1)!}\cdot x^s = \binom{s-1}{n-1}\cdot x^s$$

und man erhält die Entwicklung

$$\text{(8)} \qquad \left(\frac{x}{1-x}\right)^n = \sum_{s=n}^{\infty}\binom{s-1}{n-1}\cdot x^s,$$

derzufolge $\binom{s-1}{n-1}$ die Anzahl der Zergliederungen von s in n positive Summanden bestimmt. Die erzeugende Funktion für die gesamte Anzahl der Zergliederungen von s in positive Summanden überhaupt wird offenbar

$$\text{(9)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n = \frac{x}{1-x}\left(1 + \frac{x}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \cdots\right)$$

$$= \frac{x}{1-x}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x},$$

deren Entwicklung nach Potenzen von x, nämlich

$$x + 2x^2 + 4x^3 + \cdots + 2^{s-1}x^s + \cdots,$$

für die gesamte Anzahl der Zergliederungen von s den Ausdruck 2^{s-1} ergibt, wie man auch aus (8) und mittels der Formel

$$\binom{s-1}{0} + \binom{s-1}{1} + \cdots + \binom{s-1}{s-1} = 2^{s-1}$$

unmittelbar erschließt.

Wir fanden dies Resultat schon an einer früheren Stelle (Kap. 2, Nr. 3) auf rein arithmetischem Wege. Noch einfacher ergibt es sich aus der Bemerkung, daß die Zergliederungen von s sich unterscheiden

lassen in solche, welche mit 1, und solche, welche mit 2, 3, ... beginnen. Die ersteren entstehen offenbar, indem man allen Zergliederungen von $s-1$ den Summanden 1 vorsetzt, die übrigen aber aus den Zergliederungen von $s-1$, welche resp. mit 1, 2, ... beginnen, d. h. aus den Zergliederungen von $s-1$ insgesamt, indem man darin den ersten Summanden um 1 vergrößert. Z. B. entstehen aus den sämtlichen Zergliederungen von 4:

$$4;\quad 3+1;\quad 2+2;\quad 2+1+1;\quad 1+3;\quad 1+2+1;$$
$$1+1+2;\quad 1+1+1+1$$

die Zergliederungen von 5 auf folgende Weise:

1) $1+4;\quad 1+3+1;\quad 1+2+2;\quad 1+2+1+1;\quad 1+1+3;$
$1+1+2+1;\quad 1+1+1+2;\quad 1+1+1+1+1;$

2) $5;\quad 4+1;\quad 3+2;\quad 3+1+1;\quad 2+3;\quad 2+2+1;$
$2+1+2;\quad 2+1+1+1.$

Wird daher die Anzahl aller Zergliederungen von s mit A_s bezeichnet, so ergibt sich die einfache Beziehung $A_s = 2A_{s-1}$ und, da $A_1 = 1$ ist, allgemein

$$A_s = 2^{s-1}.$$

Auch die durch (8) bestimmte Anzahl der Zergliederungen von s in n positive Summanden kann auf einfache Weise ohne Hilfe der Analysis hergeleitet werden. Sie gilt ersichtlich für $n = 2$, denn man hat dann nur die $\binom{s-1}{1}$ Zergliederungen in zwei positive Summanden:

$$s = 1 + (s-1) = 2 + (s-2) = \cdots = (s-2) + 2 = (s-1) + 1.$$

Im allgemeinen Falle heiße $A_{n,s}$ die gesuchte Anzahl. Da die gedachten Zergliederungen von s in solche zerfallen, welche mit 1, 2, 3, ... resp. beginnen, und deren Anzahl offenbar derjenigen der Zergliederungen von $s-1$, $s-2$, $s-3, \ldots$ in $n-1$ Summanden resp. gleich ist, so besteht die Beziehung

$$A_{n,s} = A_{n-1,\,s-1} + A_{n-1,\,s-2} + A_{n-1,\,s-3} + \cdots$$

Nimmt man daher an, die zu beweisende Formel sei bereits für $n-1$ Summanden festgestellt, so wird

$$A_{n,s} = \binom{s-2}{n-2} + \binom{s-3}{n-2} + \cdots + \binom{n-2}{n-2},$$

d. i. in umgekehrter Reihenfolge geschrieben gleich

$$1 + \frac{n-1}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{(s-2)(s-3)\cdots(s-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-2)},$$

ein Ausdruck, der bei allmählicher Vereinigung der Summanden gleich

$$(9') \qquad \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(s-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(s-n)} = \binom{s-1}{n-1}$$

gefunden wird. Hiermit ist aber das Resultat allgemein erhärtet.

4. Geben nun die erzeugenden Funktionen in ihren Entwicklungskoeffizienten die Anzahl der Zerfällungen einer bestimmten Art, so dient die Vergleichung verschiedener erzeugender Funktionen dazu, Beziehungen zwischen den Anzahlen von Zerfällungen verschiedener Art zu ermitteln, da jede zwischen zwei erzeugenden Funktionen etwa bestehende Beziehung eben auch eine entsprechende Beziehung zwischen ihren Entwicklungskoeffizienten bedingt. Es ist *Eulers* Verdienst, zuerst auf diesem Wege eine Reihe wichtiger Sätze über Zerfällungen gefunden zu haben. Unter anderen bewies er die folgende Gleichheit:

$$(10) \qquad \prod_{h=1}^{\infty}(1+x^h) = \prod_{u}\frac{1}{1-x^u}$$

zwischen zwei unendlichen Produkten, in deren rechtsstehendem die Multiplikation über alle ungeraden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe zu erstrecken ist. Nun ist, wie aus (3) für $n = \infty$ zu schließen ist,

$$(11) \qquad \prod_{h=1}^{\infty}(1+x^h) = \sum_{s=0}^{\infty} C_s \cdot x^s,$$

worin C_s die Anzahl aller Zerfällungen von s in verschiedene positive Summanden bezeichnet. Andererseits findet sich ähnlich mit (7) die folgende Gleichung:

$$(12) \qquad \prod_{u}\frac{1}{1-x^u} = \sum_{s=0}^{\infty}\Gamma_s^{(u)} \cdot x^s,$$

wenn $\Gamma_s^{(u)}$ die Anzahl der Zerfällungen von s in gleiche oder verschiedene ungerade Summanden bedeutet. Wegen (10) erschließt man daher nachstehende Gleichung:

$$(13) \qquad C_s = \Gamma_s^{(u)}$$

oder den Satz: Jede positive ganze Zahl s zerfällt ebenso oft in verschiedene positive Summanden, als sie in gleiche oder verschiedene ungerade Summanden zerfällt werden kann.

Wir werden noch von anderen Sätzen handeln, die *Euler* auf ähnliche Weise gewonnen hat. Wenn wir aber in der Folge auch nicht auf die Anwendung analytischer Betrachtungen gänzlich verzichten wollen noch können, so ist doch unsere Absicht, die Theorie der Zerfällungen, wie dies in voriger Nummer zuletzt schon geschehen ist, soweit es gelingen will, auf rein arithmetischen Grundlagen aufzubauen. Wir leiten daher auch den soeben ausgesprochenen Satz von solcher Grundlage aus nochmals her.

Die Anzahl der Zerfällungen einer Zahl s in verschiedene positive Summanden kann bei Anwendung des in Nr. 1 eingeführten Zeichens, indem man die Summanden der Größe nach geordnet denkt, durch

$$N(s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots)$$
$$0 < a_1 < a_2 < a_3 \ldots$$

bezeichnet werden. Wir denken uns in jeder solchen Zerfällung

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{14}$$

alle diejenigen Summanden a_i zusammengezogen, deren größter ungerader Teiler u_i der gleiche ist; ihr Komplex kann dann durch

$$k_i \cdot u_i = (2^{\lambda_i} + 2^{\mu_i} + 2^{\nu_i} + \cdots) u_i$$

bezeichnet werden, wo $0 \leqq \lambda_i < \mu_i < \nu_i < \cdots$ ist, und daher entspricht der Zerfällung (14) eine bestimmte Zerfällung der folgenden Art:

$$s = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + \cdots, \tag{14'}$$

bei welcher die ungeraden Zahlen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ voneinander verschieden sind, so daß $u_1 < u_2 < u_3 \ldots$ angenommen werden kann. Aber aus jeder Zerfällung der letzteren Art entspringt auch wieder umgekehrt, da jede ganze Zahl

$$k_i = 2^{\lambda_i} + 2^{\mu_i} + 2^{\nu_i} + \cdots$$
$$0 \leqq \lambda_i < \mu_i < \nu_i \ldots$$

gesetzt werden kann, eine bestimmte Zerfällung von s von der Art (14), und demnach besteht die Gleichheit

$$N(s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) = N(s = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots),$$
$$0 < a_1 < a_2 < \cdots \qquad\qquad u_1 < u_2 < \cdots$$

worin die u_i ungerade sind, d. h., was zu beweisen war: die Anzahl der Zerfällungen von s in verschiedene positive Summanden ist ebenso groß, wie die Anzahl ihrer Zerfällungen in gleiche oder verschiedene aber ungerade Summanden.

4a. Der Verfasser verdankt Herrn *J. Schur* die Mitteilung, daß dieser *Euler*sche Satz erheblich verallgemeinert werden kann. Unmittelbar fast leuchtet zunächst ein, daß auch die Anzahl der Zerfällungen von s in verschiedene positive Summanden, welche zu einer gegebenen ungeraden Zahl m teilerfremd sind, ebenso groß ist, wie die Anzahl ihrer Zerfällungen in gleiche oder ungleiche aber ungerade zu m teilerfremde Summanden. In der Tat, sind die Elemente a_i der Zerfällung (14) teilerfremd zu m, so sind es auch die nach Absonderung der in ihnen aufgehenden höchsten Potenzen von 2 verbleibenden Faktoren u_i, mithin ist die aus (14) hervor-

gehende Zerfällung (14') eine der im Satze an zweiter Stelle genannten; und umgekehrt folgt aus einer solchen, wenn

$$k_i = 2^{\lambda_i} + 2^{\mu_i} + 2^{\nu_i} + \cdots$$
$$0 \overline{\lessgtr} \lambda_i < \mu_i < \nu_i \ldots$$

gesetzt wird, eine Zerfällung von s in lauter verschiedene Elemente $2^{\lambda_i} u_i$, welche ebenso wie die Zahl u_i selbst zur ungeraden Zahl m teilerfremd sind.

Aber man darf den allgemeineren Satz aussprechen:

Bezeichnet S ein System von endlich oder unendlich vielen positiven durch eine gegebene Zahl r nicht teilbaren ganzen Zahlen und R dasjenige System von Zahlen, das aus dem ersteren hervorgeht, wenn seine Zahlen mit allen Potenzen $1, r, r^2, r^3, \ldots$ multipliziert werden, so ist für jede positive ganze Zahl s die Anzahl ihrer Zerfällungen in gleiche oder verschiedene Summanden aus dem Systeme S ebenso groß, wie diejenige ihrer Zerfällungen in Summanden aus dem Systeme R, wenn deren jeder höchstens $r-1$ mal auftritt.

Ist nämlich

$$s = k_1 s_1 + k_2 s_2 + k_3 s_3 + \cdots$$

eine Zerfällung der ersten Art und schreibt man jeden Koeffizienten k_i als eine Zahl des aus der Grundzahl r gebildeten Zahlensystems in der Form

$$k_i = c_i + c_i' r + c_i'' r^2 + \cdots,$$

wo die $c_i^{(h)}$ Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots, r-1$ sind, so entsteht eine Zerfällung von s in lauter verschiedene Summanden von der Form $c_i^{(h)} \cdot r^h s_i$, d. i. in Elemente aus R, deren jedes höchstens $r-1$ mal auftritt; und umgekehrt hat jede Zerfällung von s von der letzteren Art die Form

$$s = \sum c_i^{(h)} \cdot r^h s_i,$$

wo die $c_i^{(h)}$ der Reihe $0, 1, 2, \ldots r-1$ angehören, und ergibt durch Zusammenfassung der Summanden, welche dasselbe Element s_i enthalten, eine eindeutig bestimmte Zerfällung von s von der ersteren Art:

$$s = k_1 s_1 + k_2 s_2 + k_3 s_3 + \cdots$$

Aus diesem hiermit bewiesenen allgemeinen Satze geht wieder der besondere *Euler*sche hervor, wenn unter S das System aller ungeraden Zahlen verstanden und $r = 2$ gedacht wird.

5. Unseren weiteren Betrachtungen schicken wir nun zunächst eine Reihe anderer, noch elementarerer Sätze vorauf.

Ist

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{15}$$

eine Zerfällung von s in n verschiedene positive Summanden, die wir wieder der Größe nach geordnet denken, so daß

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \tag{15a}$$

ist, und setzt man dann

$$a_n - a_{n-1} = a'_1,\ a_{n-1} - a_{n-2} = a'_2, \ldots, a_2 - a_1 = a'_{n-1},\ a_1 = a'_n, \tag{16}$$

so sind die sämtlichen $a'_i > 0$ und man erhält leicht

$$s = 1 \cdot a'_1 + 2 \cdot a'_2 + \cdots + n \cdot a'_n. \tag{17}$$

Da aus dieser Gleichung umgekehrt vermittelst der Beziehungen (16) eine Zerfällung (15) mit n der Größe nach wachsenden positiven Summanden gefunden wird, so geht die Gleichung

$$\underset{0 < a_1 < a_2 \cdots < a_n}{N(s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} = \underset{a'_i > 0}{N(s = 1 \cdot a'_1 + 2 \cdot a'_2 + \cdots + n \cdot a'_n)} \tag{18}$$

hervor. Ersetzt man hierin allgemein a'_i durch $\alpha_i + 1$, so wird $\alpha_i \geqq 0$ sein und jeder Zerfällung

$$s = 1 \cdot a'_1 + 2 \cdot a'_2 + \cdots + n \cdot a'_n$$

von s eine Zerfällung

$$s - \frac{n(n+1)}{2} = 1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + \cdots + n \cdot \alpha_n \tag{19}$$

von $s - \frac{n(n+1)}{2}$ entsprechen, und umgekehrt. Man erhält daher die neue Gleichung:

$$\underset{0 < a_1 < a_2 \cdots < a_n}{N(s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} = \underset{\alpha_i \geqq 0}{N\left(s - \frac{n(n+1)}{2} = 1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + \cdots + n \cdot \alpha_n\right)}, \tag{20}$$

in welcher die rechte Seite auch als der Denumerant

$$\frac{s - \frac{n(n+1)}{2}}{1, 2, 3, \ldots n} \tag{21}$$

der Gleichung (19) geschrieben werden kann, und somit folgenden Satz:

Die Anzahl $C_{n,s}$ der Zerfällungen von s in n positive Elemente ohne Wiederholung ist dem Denumeranten (21) gleich:

$$C_{n,s} = \gamma_{n,\, s - \frac{n(n+1)}{2}}. \tag{20a}$$

Die Verbindung der Formeln (18) und (20) führt zu der dritten:

$$(22)\quad N(\underset{a_i'>0}{s=1\cdot a_1'+2\cdot a_2'+\cdots+n\cdot a_n'})=N\Big(\underset{\alpha_i\overline{\gtrless}0}{s-\frac{n(n+1)}{2}=1\cdot\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n}\Big).$$

Werden nunmehr in der Zerfällung (15) die positiven Elemente a_i beliebig als gleich oder verschieden gedacht, so daß sie jetzt die Bedingungen erfüllen:

$$(23)\qquad 0<a_1\overline{\lessgtr}a_2\overline{\lessgtr}a_3\ldots\overline{\lessgtr}a_n,$$

so geht zwar wieder durch die Beziehungen (16) eine Zerfällung (17) hervor, in ihr ist aber nur $a_n'>0$, die übrigen $a_i'\overline{\gtrless}0$, oder aber man erhält eine Zerfällung von $s-n$:

$$s-n=1\cdot a'_1+2\cdot a'_2+\cdots+n\cdot a'_n,$$

in welcher nun sämtliche $a'_i\overline{\gtrless}0$ sind. Da aus ihr umgekehrt eine Zerfällung (15) von s in n gleiche oder verschiedene positive Summanden erschlossen wird, erhält man die Gleichung

$$(24)\quad N(\underset{0<a_1\overline{\lessgtr}a_2\overline{\lessgtr}\cdots\overline{\lessgtr}a_n}{s=a_1+a_2+\cdots+a_n})=N(\underset{a'_i\overline{\gtrless}0}{s-n=1\cdot a'_1+2\cdot a'_2+\cdots+n\cdot a'_n}),$$

deren rechte Seite auch als der Denumerant

$$(25)\qquad \frac{s-n}{\overline{1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n}}$$

geschrieben werden kann. Demnach gilt der Satz:

Die Anzahl $\Gamma_{n,s}$ der Zerfällungen von s in n positive Elemente mit Wiederholungen ist dem Denumeranten (25) gleich:

$$(24a)\qquad \Gamma_{n,s}=\gamma_{n,s-n}.$$

Hiernach sind die erzeugenden Funktionen der Anzahlen $\Gamma_{n,s}$ und $C_{n,s}$, wie mit Rücksicht auf (5) und (6) sogleich zu übersehen ist, die Produkte

$$\prod_{h=1}^{n}\frac{x}{1-x^h},\quad \prod_{h=1}^{n}\frac{x^h}{1-x^h}$$

respektive.

Den gefundenen beiden Sätzen gemäß aber zerfällt s ebenso oft in n verschiedene positive Summanden, wie $s-\frac{n(n+1)}{2}$ in gleiche oder verschiedene Summanden aus der Reihe 1, 2, 3, . . ., n; dagegen zerfällt s ebenso oft in n gleiche oder verschiedene positive Summanden, wie $s-n$ in gleiche oder verschiedene Summanden aus jener Reihe. Durch Verbindung dieser Resultate miteinander erkennt man den

neuen Satz: daß die Zahl s ebenso oft in n verschiedene positive Summanden zerfällt, wie $s-\frac{n(n-1)}{2}$ in n gleiche oder verschiedene positive Summanden, ein Satz, der sich in der folgenden Formel:

$$(26)\quad N(s=a_1+a_2+\cdots+a_n)=N(s-\frac{n(n-1)}{2}=a'_1+a'_2+\cdots+a'_n)$$
$$0<a_1<a_2\ldots<a_n \qquad\qquad 0<a'_1 \overline{\overline{<}} a'_2\ldots \overline{\overline{<}} a'_n$$

ausspricht. Setzt man in dieser allgemein $a'_i=\alpha_i+1$, so erhält sie die neue Gestalt:

$$(27)\quad N(s=a_1+a_2+\cdots+a_n)=N(s-\frac{n(n+1)}{2}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n).$$
$$0<a_1<a_2\ldots<a_n \qquad\qquad 0 \overline{\overline{<}} \alpha_1 \overline{\overline{<}} \alpha_2\ldots \overline{\overline{<}} \alpha_n$$

Ersetzt man ferner in (24) s durch $s+n$ und allgemein a_i durch α_i+1, so läßt sich die Formel folgendermaßen schreiben:

$$(28)\quad N(s=\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n)=N(s=1\cdot a'_1+2\cdot a'_2+\cdots+n\cdot a_n)$$
$$0 \overline{\overline{<}} \alpha_1 \overline{\overline{<}} \alpha_2\ldots \overline{\overline{<}} \alpha_n \qquad\qquad a'_i \overline{\overline{>}} 0$$

und lehrt, daß jede Zahl s ebenso oft aus n nicht negativen Elementen wie aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots, n$ additiv gebildet werden kann, wenn Wiederholung der Elemente gestattet ist. Die gemeinsame Anzahl dieser Zerfällungen ist gleich dem Denumeranten

$$(29)\qquad \gamma_{n,s}=\frac{s}{1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n}.$$

Offenbar kann dieselbe Formel (28) auch in dem folgenden, sogenannten „*Euler*schen Reziprozitätssatze“ ausgesprochen werden: die Anzahl Zerfällungen einer Zahl s in weniger als $n+1$ gleiche oder verschiedene Elemente ist gleich der Anzahl ihrer Zerfällungen in gleiche oder verschiedene Elemente, die kleiner als $n+1$ sind. Um dies ohne weiteres einzusehen, sei $m=n+1$ und

$$s=k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_\nu a_\nu$$

eine Zerfällung von s in $k_1+k_2+\cdots+k_\nu<m$ Summanden, so ist jedes $k_i<m$ und

$$s=a_1k_1+a_2k_2+\cdots+a_\nu k_\nu$$

eine Zerfällung von s in $\mu=a_1+a_2+\cdots+a_\nu$ Summanden, welche kleiner als m sind. Ist umgekehrt eine solche gegeben und werden die Summanden der Größe nach geordnet gedacht:

$$k_1<k_2<\cdots<k_\nu<m,$$

so kann man schreiben:

$$s = a_1 k_1 + a_2\big(k_1 + (k_2 - k_1)\big) + a_3\big(k_1 + (k_2 - k_1) + (k_3 - k_2)\big) + \cdots$$
$$= \mu \cdot k_1 + (\mu - a_1) \cdot (k_2 - k_1) + (\mu - a_1 - a_2) \cdot (k_3 - k_2) + \cdots$$

und erhält also eine Zerlegung von s in

$$k_1 + (k_2 - k_1) + (k_3 - k_2) + \cdots + (k_\nu - k_{\nu-1}) = k_\nu < m$$

positive Summanden μ, $\mu - a_1$, $\mu - a_1 - a_2$, ... Sonach entspricht jeder Zerfällung der einen Art eine Zerfällung der anderen Art, und umgekehrt, ihre Anzahl ist also beiderseits dieselbe.

6. Zur Berechnung der Anzahl

$$C_{n,s} = \underset{0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n}{N(s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} \tag{30}$$

bietet sich eine einfache Rekursionsformel dar. Setzt man nämlich in der Gleichung

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{31}$$

allgemein $a_i = \alpha_i + 1$, so ergibt sich daraus

$$s - n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \tag{32}$$

mit den Bedingungen $0 \overline{\overline{<}} \alpha_1 < \alpha_2 \cdots < \alpha_n$, und umgekehrt aus einer Gleichung dieser Art eine Gleichung der ersteren, so daß sich die Gleichung

$$\underset{0 < a_1 < a_2 \cdots < a_n}{N(s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} = \underset{0 \overline{\overline{<}} \alpha_1 < \alpha_2 \cdots < \alpha_n}{N(s - n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)} \tag{33}$$

ergibt. Nun kann man aber die Lösungen der Gleichung (32) in solche unterscheiden, bei denen $\alpha_1 > 0$, und in solche, bei denen $\alpha_1 = 0$ ist, bei denen also die Gleichung die Form annimmt

$$s - n = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n$$

mit den Bedingungen $0 < \alpha_2 < \alpha_3 \cdots < \alpha_n$. Hieraus entnimmt man die rekurrente Beziehung

$$\underset{0 < a_1 < a_2 \cdots < a_n}{N(s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} \tag{34}$$

$$= \underset{0 < \alpha_1 < \alpha_2 \cdots < \alpha_n}{N(s - n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)} + \underset{0 < \alpha_2 < \alpha_3 \cdots < \alpha_n}{N(s - n = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n)}$$

oder

$$C_{n,s} = C_{n,s-n} + C_{n-1,s-n}. \tag{34a}$$

Aus ihr aber folgen, wenn s allmählich durch $s - n$, $s - 2n$, ... ersetzt wird, die Gleichungen:

$$C_{n,s-n} = C_{n,s-2n} + C_{n-1,s-2n}$$
$$C_{n,s-2n} = C_{n,s-3n} + C_{n-1,s-3n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

durch deren Addition zu (34a) sich endlich die andere:

(34b) $$C_{n,s} = C_{n-1,s-n} + C_{n-1,s-2n} + C_{n-1,s-3n} + \cdots$$

ergibt, so weit fortzusetzen, bis die Zahl $s - hn < \frac{n(n+1)}{2}$ wird, die entsprechende Anzahl $C_{n,s-hn}$ also verschwindet. Durch diese Formel wird die Anzahl der Zerfällungen von s in n verschiedene positive Summanden auf die Anzahl der Zerfällungen kleinerer Zahlen in $n-1$ solche Summanden zurückgeführt. Da sie offenbar bei einem einzigen Summanden stets gleich 1, bei zwei Summanden für eine Zahl s gleich dem größten Ganzen $\left[\frac{s-1}{2}\right]$ ist, wird sie mittels der Rekursionsformel allgemein bekannt.

Behandelt man in gleicher Weise den Ausdruck

$$\Gamma_{n,s} = \underset{0 < a_1 \leqq a_2 \cdots \leqq a_n}{N(s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)},$$

indem man zunächst $a_i = \alpha_i + 1$ setzt, so kommt

$$\Gamma_{n,s} = \underset{0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \cdots \leqq \alpha_n}{N(s - n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)}$$

d. i., wenn nun diejenigen Zerfällungen, bei denen $\alpha_1 > 0$ ist, von den anderen, bei denen $\alpha_1 = 0$ ist, unterschieden werden,

(35) $$\Gamma_{n,s} = \underset{0 < \alpha_1 \leqq \alpha_2 \cdots \leqq \alpha_n}{N(s - n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)} + \underset{0 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \cdots \leqq \alpha_n}{N(s - n = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n)}$$

oder, da $s - n = (s-1) - (n-1)$ gesetzt werden kann,

(35a) $$\Gamma_{n,s} = \Gamma_{n,s-n} + \Gamma_{n-1,s-1},$$

woraus nun weiter die Formel hervorgeht

(35b) $$\Gamma_{n,s} = \Gamma_{n-1,s-1} + \Gamma_{n-1,s-n-1} + \Gamma_{n-1,s-2n-1} + \cdots,$$

so weit fortzusetzen, bis $\Gamma_{n,s-hn}$ verschwindet, d. h. bis $s - hn < n$ wird; die Anzahl der Glieder zur Linken beträgt also $\left[\frac{s}{n}\right]$.

Ganz ebenso führt der Ausdruck

$$\underset{0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \cdots \leqq \alpha_n}{N(s = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)},$$

welcher nach (28) mit $\gamma_{n,s}$ gleich ist, zu der Rekursionsformel

(36) $$\gamma_{n,s} = \underset{0 < \alpha_1 \leqq \alpha_2 \cdots \leqq \alpha_n}{N(s = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)} + \underset{0 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \cdots \leqq \alpha_n}{N(s = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n)},$$

d. h. mit Beachtung von (24) und (28) zur Gleichung

$$(36\text{a}) \qquad \gamma_{n,s} = \gamma_{n,s-n} + \gamma_{n-1,s},$$

woraus endlich die Formel

$$(36\text{b}) \qquad \gamma_{n,s} = \gamma_{n-1,s} + \gamma_{n-1,s-n} + \gamma_{n-1,s-2n} + \cdots$$

erschlossen wird, diese so weit fortgesetzt, bis $s - hn < 0$, d. h. $h > \left[\frac{s}{n}\right]$ wird; die Anzahl ihrer Glieder zur Rechten beträgt also $\left[\frac{s}{n}\right] + 1$. Übrigens leitet man (36a) auch unmittelbar aus (35a) ab, wenn man sich der Beziehung (24a) erinnert und s durch $s + n$ ersetzt.

6*. Betrachten wir jetzt statt der Größe $\gamma_{n,s}$ die durch die Formel



$$(\text{a}) \qquad \prod_{s=1}^{n} (1 + x^h) = \sum_{s=0}^{\frac{n(n+1)}{2}} c_{n,s} \cdot x^s$$

definierte Größe $c_{n,s}$, nämlich die Anzahl der Zerfällungen von s in verschiedene Summanden, welche kleiner als $n + 1$ sind, d. h. in verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$. Diese Größe kann in der Weise von *Vahlen* durch das Symbol

$$(\text{b}) \qquad c_{n,s} = N\left(s = \sum_{i=1}^{n} i \cdot x_i\right), \text{ wo } x_i = 0 \text{ oder } 1 \text{ ist,}$$

bezeichnet oder als die Anzahl der Lösungen der unbestimmten Gleichung

$$(\text{c}) \qquad s = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + \cdots + n \cdot x_n \qquad (x_i = 0, 1)$$

aufgefaßt werden. Unterscheidet man hier die Lösungen, in denen $x_n = 0$, also

$$s = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \cdots + (n - 1) \cdot x_{n-1} \qquad (x_i = 0, 1)$$

ist, von den anderen, bei welchen $x_n = 1$, also

$$s - n = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \cdots + (n - 1) \cdot x_{n-1} \qquad (x_i = 0, 1)$$

ist, so erhält man unmittelbar die Rekursionsformel

$$(\text{d}) \qquad c_{n,s} = c_{n-1,s} + c_{n-1,s-n},$$

welche die Größe $c_{n,s}$ allmählich zu berechnen verstattet. Da jede der Größen x_i zwei Werte annehmen kann, so erhält der Ausdruck

$$1 \cdot x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n$$

2^n Werte, deren kleinster Null, deren größter $\frac{n(n+1)}{2}$ ist. Demnach muß

$$\text{(e)} \qquad \sum_{s=0}^{\frac{n(n+1)}{2}} c_{n,s} = 2^n$$

sein, wie auch aus (a) für $x = 1$ ohne weiteres hervorgeht. Sind unter denjenigen Werten jenes Ausdrucks, bei welchen $x_1 = 0$ ist, G gerade und U ungerade, so werden unter den anderen, bei welchen $x_1 = 1$ ist, U gerade und G ungerade sein; man hat demnach

$$\sum_g c_{n,g} = \sum_u c_{n,u} = G + U,$$

wenn diese Summen resp. über die geraden und über die ungeraden Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots \frac{n(n+1)}{2}$ erstreckt werden, oder auch

$$\text{(f)} \qquad \sum_{s=0}^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^s \cdot c_{n,s} = 0.$$

Da ferner jedes x_i in der Hälfte der 2^n Werte des Ausdrucks gleich Null, in der anderen Hälfte gleich Eins ist, so erhält man durch Addition aller jener Werte offenbar die Summe

$$2^{n-1}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 2^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dieselbe Summe läßt sich jedoch, weil jede Zahl s der Reihe $0, 1, 2, \ldots \frac{n(n+1)}{2}$ genau resp. $c_{n,s}$ mal entsteht, auch darstellen durch den Ausdruck

$$0 \cdot c_{n,0} + 1 \cdot c_{n,1} + 2 \cdot c_{n,2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} \cdot c_{n,\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Somit ergibt sich die Gleichung

$$\text{(g)} \qquad \sum_{s=0}^{\frac{n(n+1)}{2}} s \cdot c_{n,s} = 2^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Setzt man allgemein $x_i + y_i = 1$, so nimmt, wenn x_i die Werte $0, 1$ erhält, y_i die Werte $1, 0$ an. Daher kommt einerseits

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{n} i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

andererseits entspricht hiernach jeder Auflösung der Gleichung (c) eine Auflösung der Gleichung

$$\frac{n(n+1)}{2} - s = 1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + \cdots + n \cdot y_n$$
$$(y_i = 0,\ 1)$$

und umgekehrt. Also ist

(h)
$$c_{n,s} = c_{n,s'}$$
$$\text{für } s + s' = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mit Beachtung dieser Beziehung nimmt die Gleichung (e) oder (g), wenn $\frac{n(n+1)}{2}$ ungerade ist, ohne Mühe folgende einfache Form an:

(i)
$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{n(n+1)}{4}\right]} \cdot c_{n,s} = 2^{n-1},$$

während, wenn $\frac{n(n+1)}{2}$ gerade ist, das letzte Glied in der Summe zur Linken nur halb zu nehmen ist.

Nunmehr setze man

(k)
$$\prod_{h=1}^{n} (1 - x^h) = \sum_{s=0}^{\frac{n(n+1)}{2}} d_{n,s} \cdot x^s,$$

d. h. man bezeichne mit $d_{n,s}$ den Unterschied zwischen der Anzahl der geraden und der der ungeraden Zerfällungen von s, d. h. kurz der Zerfällungen von s in eine gerade oder ungerade Anzahl verschiedener Zahlen der Reihe 1, 2, 3, ... n, eine Größe, die nach *Vahlen* durch das Symbol [vgl. Formel (169)]

$$d_{n,s} = N\left(s = \sum_{i=1}^{n} i \cdot x_i;\ (-1)^{\sum_1^n x_i}\right) \quad \text{für } x_i = 0,1$$

auszudrücken ist. Die Zerfällungen von s, bei denen $x_n = 0$ ist, liefern zu dem gedachten Unterschiede den Beitrag

$$N\left(s = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot x_i;\ (-1)^{\sum_1^{n-1} x_i}\right) = d_{n-1,s},$$

die anderen aber, bei denen $x_n = 1$ ist, den Beitrag

$$N\left(s - n = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot x_i;\ -(-1)^{\sum_1^{n-1} x_i}\right) = -d_{n-1,s-n}.$$

Daraus geht die rekurrente Beziehung hervor:

$$d_{n,s} = d_{n-1,s} - d_{n-1,s-n},$$

derzufolge auch

$$d_{n-1,s} = d_{n-2,s} - d_{n-2,s-n+1}$$
$$d_{n-2,s} = d_{n-3,s} - d_{n-3,s-n+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

sein wird. Nun ist $c_{i,k}$ also auch $d_{i,k}$ gleich Null, sobald $\frac{i(i+1)}{2} < k$ ist; setzt man also die Reihe der vorstehenden Gleichungen so weit

fort, bis die Größen $d_{i,s}$ verschwinden, und addiert sie dann, so gewinnt man die Formel:

(l) $$d_{n,s} = -(d_{n-1,s-n} + d_{n-2,s-n+1} + d_{n-3,s-n+2} + \cdots).$$

Endlich sei

(m) $$\frac{1}{\prod_{h=1}^{n}(1+x^h)} = \sum_{s=0}^{\infty} \delta_{n,s} \cdot x^s,$$

d. h. $\delta_{n,s}$ der Unterschied zwischen der Anzahl gerader und derjenigen ungerader Zerfällungen von s in gleiche oder verschiedene Zahlen der Reihe 1, 2, 3, . . ., n. Dann darf man setzen

$$\delta_{n,s} = N\left(s = \sum_{i=1}^{n} i x_i;\ (-1)^{\sum_1^n x_i}\right)$$
$$x_i \geqq 0$$

oder auch

$$\delta_{n,s} = N\left(s = \sum_{i=1}^{n-1} i x_i + n x_n;\ (-1)^{\sum_1^{n-1} x_i + x_n}\right).$$

Diejenigen Zerfällungen von s, bei welchen $x_n = 0$ ist, liefern zu vorstehendem Unterschiede den Beitrag

$$N\left(s = \sum_{i=1}^{n-1} i x_i;\ (-1)^{\sum_1^{n-1} x_i}\right) = \delta_{n-1,s};$$

ersetzt man in den anderen, bei welchen $x_n > 0$ ist, das Zeichen x_n durch $x_n + 1$, so sieht man, daß sie zu jenem Unterschiede den Beitrag

$$N\left(s - n = \sum_{i=1}^{n} i x_i;\ -(-1)^{\sum_1^n x_i}\right) = -\delta_{n,s-n}$$

beisteuern. Somit ergibt sich die Rekursionsformel

$$\delta_{n,s} = \delta_{n-1,s} - \delta_{n,s-n},$$

aus welcher weiter

$$\delta_{n-1,s} = \delta_{n-2,s} - \delta_{n-1,s-n+1}$$
$$\delta_{n-2,s} = \delta_{n-3,s} - \delta_{n-2,s-n+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta_{2,s} = \delta_{1,s} - \delta_{2,s-2}$$

folgt, während offenbar

$$\delta_{1,s} = (-1)^s = -\delta_{1,s-1}$$

ist. Durch Addition all dieser Gleichungen findet sich

(n) $$\delta_{n,s} = -(\delta_{n,s-n} + \delta_{n-1,s-n+1} + \delta_{n-2,s-n+2} + \cdots + \delta_{1,s-1}).$$

Multipliziert man noch die Gleichungen (a) und (m) miteinander, so liefert die entstehende Gleichung

$$1 = \sum_{s=0}^{\frac{n(n+1)}{2}} c_{n,s} x^s \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \delta_{n,s} \cdot x^s$$

durch Vergleichung der Koeffizienten der Potenzen von x auf beiden Seiten die beachtenswerte Beziehung:

$$\text{(o)} \qquad c_{n,0} \cdot \delta_{n,s} + c_{n,1} \cdot \delta_{n,s-1} + c_{n,2} \cdot \delta_{n,s-2} + \cdots = 0, \quad (\text{für } s > 0)$$

deren linke Seite so weit fortzusetzen ist, bis die Glieder verschwinden. (Man vgl. zu dieser Nummer die Arbeit von *J. B. Pomey*, Nouv. Ann. de math. (3), 4 (1885), S. 408.)

7. Die Formeln (35b), (36b) finden sich in einer Arbeit von *J. F. W. Herschel* (London Roy. Soc. Transact. 140 II (1850) S. 399), der sie *Warburton* zuschreibt und durch folgende Betrachtung beweist.

Die Zerfällungen von s in n gleiche oder verschiedene positive Elemente enthalten entweder das Element 1 oder sind frei von 1; die Anzahl der ersteren ist offenbar gleich $\Gamma_{n-1,s-1}$. Die 1-freien Zerfällungen aber enthalten entweder das Element 2 oder sind 1, 2-frei; jede Zerfällung der ersteren Art hat die Form

$$s = 2 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

worin die $a_i \geqq 2$ sind, und gibt eine Zerfällung

$$s - 2 - (n-1) = (a_2 - 1) + (a_3 - 1) + \cdots + (a_n - 1)$$

von $s - n - 1$ in $n - 1$ positive Elemente, und umgekehrt; ihre Anzahl beträgt also $\Gamma_{n-1,s-n-1}$. Die 1, 2-freien Zerfällungen von s enthalten nun wieder entweder das Element 3 oder sind 1, 2, 3-frei. Jede Zerfällung der ersteren Art hat die Form

$$s = 3 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

worin die $a_i \geqq 3$ sind, und gibt eine Zerfällung

$$s - 3 - 2(n-1) = (a_2 - 2) + (a_3 - 2) + \cdots + (a_n - 2)$$

der Zahl $s - 2n - 1$ in $n - 1$ positive Summanden, und umgekehrt; ihre Anzahl beträgt also $\Gamma_{n-1,s-2n-1}$; usw. fort. Hieraus ergibt sich dann schließlich die Formel (35b), auf entsprechende Weise aber auch die Formel (36b).

Wir sind so zur Betrachtung der 1, 2, 3, ... r-freien Zerfällungen von s in n gleiche oder verschiedene positive Elemente, d. h. der Zerfällungen

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

mit den Bedingungen $r < a_1 \overline{\overline{\lessgtr}}\, a_2 \overline{\overline{\lessgtr}}\, a_3 \cdots \overline{\overline{\lessgtr}}\, a_n$ geführt worden, deren Anzahl ersichtlich mit derjenigen der Zerfällungen

$$s - nr = (a_1 - r) + (a_2 - r) + \cdots + (a_n - r)$$

von $s - nr$ in n gleiche oder verschiedene positive Summanden gleich ist. Bezeichnet man ihre Anzahl durch $\Gamma_{n,s}^{(r)}$, so besteht also die Gleichung

$$\Gamma_{n,s}^{(r)} = \Gamma_{n,s-nr}. \tag{37}$$

Wir wollen nun auch die 1, 2, 3, ... r-freien Zergliederungen von s in n gleiche oder verschiedene positive Elemente betrachten und zeigen, daß sich deren Anzahl durch einen einfachen Ausdruck bestimmt. Bezeichnen wir sie mit $G_{n,s}^{(r)}$, und setzen zur Abkürzung $r + 1 = \varrho$, so behaupten wir die Gleichung

$$G_{n,s}^{(r)} = \binom{s + n - 1 - n\varrho}{n - 1}. \tag{38}$$

Um sie zu beweisen, nehmen wir an, sie stehe bereits für Zergliederungen fest, deren Elementenanzahl $< n$ ist, welche Werte s und r auch haben; für $n = 1$ ist dies gewiß der Fall, da dann beide Seiten gleich Eins oder beide gleich Null sind, letzteres, wenn $s < \varrho$ ist. Da in den gedachten Zergliederungen die auftretenden Elemente $\overline{\overline{>}}\, \varrho$ sind, gibt es allgemein solche Zergliederungen nur, wenn $s \overline{\overline{>}}\, n\varrho$ ist, mithin ist

$$G_{n,s}^{(r)} = 0,$$

wenn $s < n\varrho$; da alsdann aber $s + n - 1 - n\varrho < n - 1$ ist, verschwindet auch der Binomialkoeffizient in (38) und die Gleichung trifft zu. Ist $s = n\varrho$, so wird der Binomialkoeffizient gleich 1, in diesem Falle ist aber auch nur die eine Zergliederung von s in n gleiche Summanden ϱ vorhanden, also die Gleichung (38) wieder erfüllt. Nehmen wir daher endlich $s > n\varrho$ an. Dann lassen sich die Zergliederungen in solche unterscheiden, bei denen die Elemente $\overline{\overline{>}}\, \varrho + 1$ sind, und in die übrigen, bei denen der Summand ϱ ein-, zwei-, dreimal usw. auftreten kann. Tritt er genau h-mal auf, so entsteht nach seiner Absonderung eine 1, 2, 3 $\cdots$ $r + 1$-freie Zergliederung von $s - h\varrho$ in $n - h$ Summanden, und umgekehrt würde eine solche, deren Anzahl $G_{n-h, s-h\varrho}^{(r+1)}$ beträgt, eine der gedachten Zergliederungen oder vielmehr, da zu jeder von ihnen die h Summanden ϱ auf $\binom{n}{h}$ verschiedene Weisen hinzutreten können, genau $\binom{n}{h}$ Zergliederungen der gedachten Art liefern, deren Anzahl also

$$\binom{n}{h} \cdot G^{(r+1)}_{n-h,\, s-h\varrho}$$

beträgt. Aus solcher Erwägung fließt folgende Beziehung:

$$(39)\quad \begin{aligned} G^{(r)}_{n,s} = G^{(r+1)}_{n,s} + \binom{n}{1} \cdot G^{(r+1)}_{n-1,\, s-\varrho} + \binom{n}{2} \cdot G^{(r+1)}_{n-2,\, s-2\varrho} + \cdots \\ + \binom{n}{n-1} \cdot G^{(r+1)}_{1,\, s-(n-1)\varrho}, \end{aligned}$$

welcher der gemachten Annahme zufolge die Gestalt gegeben werden kann:

$$(40)\quad \begin{aligned} G^{(r)}_{n,s} - G^{(r+1)}_{n,s} = \binom{n}{1} \cdot \binom{s-n\varrho-1}{n-2} + \binom{n}{2} \cdot \binom{s-n\varrho-1}{n-3} + \cdots \\ + \binom{n}{n-1} \cdot \binom{s-n\varrho-1}{0}. \end{aligned}$$

Nun besteht für Binomialkoeffizienten die Beziehung:

$$(41)\quad 1 \cdot \binom{m}{h} + \binom{n}{1} \cdot \binom{m}{h-1} + \binom{n}{2} \cdot \binom{m}{h-2} + \cdots + \binom{n}{h} \cdot \binom{m}{0} = \binom{m+n}{h}.$$

In der Tat findet sie statt für $n = 1$, welche Werte m und h auch bezeichnen, da

$$1 \cdot \binom{m}{h} + \binom{1}{1} \cdot \binom{m}{h-1} = \binom{m+1}{h}$$

ist [Kap. 1, (25b)]. Angenommen nun, sie bestünde so auch für größere Werte bis zum Werte n, so wäre auch

$$1 \cdot \binom{m}{h-1} + \binom{n}{1} \cdot \binom{m}{h-2} + \cdots + \binom{n}{h-1} \cdot \binom{m}{0} = \binom{m+n}{h-1},$$

und, wenn diese Gleichung zur Gleichung (41) addiert wird, so entsteht die folgende:

$$1 \cdot \binom{m}{h} + \binom{n+1}{1} \cdot \binom{m}{h-1} + \binom{n+1}{2} \cdot \binom{m}{h-2} + \cdots + \binom{n+1}{h} \cdot \binom{m}{0} = \binom{m+n+1}{h},$$

derzufolge die Formel (41) für alle m, h auch noch bei dem um 1 größeren Werte von n bestünde. Damit ist ihre Allgemeingültigkeit bewiesen.

Setzt man daher in (41) $h = n-1$, $m = s - n\varrho - 1$ ein, so läßt sich mit Hilfe der so entstehenden Gleichheit die Formel (40) umformen in die folgende:

$$G^{(r)}_{n,s} - G^{(r+1)}_{n,s} = \binom{s-n\varrho+n-1}{n-1} - \binom{s-n\varrho-1}{n-1},$$

aus welcher, wenn r in $r+1$, $r+2$, ... verwandelt wird, diese anderen:

$$G_{n,s}^{(r+1)} - G_{n,s}^{(r+2)} = \binom{s-n\varrho-1}{n-1} - \binom{s-n\varrho-n-1}{n-1}$$

$$G_{n,s}^{(r+2)} - G_{n,s}^{(r+3)} = \binom{s-n\varrho-n-1}{n-1} - \binom{s-n\varrho-2n-1}{n-1}$$

. . . .

hervorgehen. Setzt man die Reihe derselben fort, bis das subtraktive Glied $\binom{s-n\varrho-hn-1}{n-1}$ rechts verschwindet, was gewiß geschehen wird, wenn $h+\varrho=\left[\frac{s}{n}\right]$ wird, und addiert dann die Reihe dieser Gleichungen, so kommt

$$G_{n,s}^{(r)} - G_{n,s}^{\left(\left[\frac{s}{n}\right]\right)} = \binom{s-n\varrho+n-1}{n-1},$$

oder, da $s < n\cdot\left(\left[\frac{s}{n}\right]+1\right)$ und demnach das subtraktive Glied auf der linken Seite gleich Null ist, schließlich die Gleichung (38):

$$G_{n,s}^{(r)} = \binom{s-n\varrho+n-1}{n-1},$$

welche so für alle Werte von s bewiesen ist.

Da aber

$$\binom{s-n\varrho+n-1}{n-1} = \binom{s-n\varrho+n-2}{n-1} + \binom{s-n\varrho+n-2}{n-2}$$

und

$$s-n\varrho+n-2 = (s-\varrho)-(n-1)\varrho+(n-1)-1$$

ist, folgert man nunmehr weiter

$$G_{n,s}^{(r)} = G_{n,s-1}^{(r)} + G_{n-1,s-\varrho}^{(r)}$$

und, indem man n die Werte 1, 2, 3, ... s durchlaufen läßt und alsdann summiert, diese Gleichung:

$$(42) \qquad \sum_{n=1}^{s} G_{n,s}^{(r)} = \sum_{n=1}^{s} G_{n,s-1}^{(r)} + \sum_{n=1}^{s} G_{n-1,s-\varrho}^{(r)}.$$

Doch braucht man die erste Summation zur Rechten nur bis $n=s-1$ hin zu erstrecken, da die Zahl $s-1$ nicht in mehr als $s-1$ Summanden zerfällt werden kann. Schreibt man ferner bei der zweiten Summe n statt $n-1$, so braucht aus gleichem Grunde die Summation

$$\sum_{n=0}^{s-1} G_{n,s-\varrho}^{(r)}$$

nur bis $n=s-\varrho$ erstreckt zu werden, außerdem ist $G_{0,s-\varrho}^{(r)}$ als Null zu achten, und die vorige Gleichung nimmt also die Gestalt an:

$$(43)\qquad \sum_{n=1}^{s} G_{n,s}^{(r)} = \sum_{n=1}^{s-1} G_{n,s-1}^{(r)} + \sum_{n=1}^{s-\varrho} G_{n,s-\varrho}^{(r)}$$

oder diese andere:

$$(44)\qquad L_s = L_{s-1} + L_{s-r-1},$$

wenn zur Abkürzung

$$(45)\qquad L_s = \sum_{n=1}^{s} G_{n,s}^{(r)}$$

gesetzt wird. Zudem wird $L_s = 0$ sein, solange $s < r+1$, denn eine solche Zahl s kann nicht in Summanden zerfällt werden, welche größer sind als r; desgleichen wird $L_s = 1$, wenn $r + 1 \overline{\gtrless} s < 2r + 1$, da eine solche Zahl s nicht in mehr als einen Summanden $> r$ zerfällt werden kann. Man hat also in der Reihe der Zahlen

$$(46)\qquad L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4,\ \ldots$$

eine der Formel (44) gehorchende rekurrente Zahlenreihe, welche mit r Nullen und darauf folgenden r Einheiten beginnt, gerade so, wie die in Nr. 6 des vorigen Kapitels erwähnte *Lamé*sche Reihe der Rekursionsformel

$$(44')\qquad L_s = L_{s-1} + L_{s-2}$$

gehorcht und mit einer Null und einer darauf folgenden Eins beginnt. Die Zahlenreihe (46) ist also als eine Verallgemeinerung jener *Lamé*schen Reihe anzusehen und kann nach *Hermes* (Math. Ann. 45, S. 371) als *Lamé*sche Reihe r^{ter} Ordnung jener als der *Lamé*schen Reihe 1ter Ordnung gegenüber gestellt werden. Wir haben demnach in der Formel (45) einen allgemeinen Ausdruck für die Glieder der *Lamé*schen Reihe r^{ter} Ordnung gefunden.

8. Wenngleich wir in den Rekursionsformeln (34b), (35b), (36b) ein Mittel besitzen, um die mit $C_{n,s}$, $\Gamma_{n,s}$, $\gamma_{n,s}$ bezeichneten Anzahlen in jedem Falle zu berechnen, so ist doch das, was verlangt werden muß, ein allgemeiner Ausdruck, durch welchen jede dieser Anzahlen als eine Funktion der sie bestimmenden beiden Zahlen s, n gegeben wird. Da nach den Formeln (20a) und (24a) die ersteren beiden auf die dritte zurückgeführt werden können, genügt es, diese Aufgabe für die Größe $\gamma_{n,s}$, welche als die fundamentale angesehen werden darf, zu leisten.

Statt dessen versuchen wir zuvörderst allgemeiner die Bestimmung des Denumeranten

$$(47)\qquad \frac{s}{a,\ b,\ c,\ \ldots\ l},$$

nämlich der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$(48) \qquad s = ax + by + cz + \cdots + lu,$$

in welcher $a, b, c, \ldots l$ gleiche oder verschiedene positive ganze Zahlen bezeichnen, in nicht negativen ganzen Zahlen $x, y, z, \ldots u$. Wir beginnen mit der Betrachtung einiger besonders einfachen Fälle.

1) Die Gleichung $s = ax$ gestattet nur dann eine und zwar eine einzige derartige Lösung, wenn s ein Vielfaches von a ist; also ist

$$(49) \qquad \frac{s}{a} = 1 \text{ oder } 0,$$

je nachdem s durch a teilbar oder nicht teilbar ist.

2) Da nun unter a aufeinander folgenden Zahlen

$$s,\ s-1,\ s-2,\ \ldots\ s-(a-1)$$

nur eine einzige durch a teilbar ist, so folgt die Gleichung

$$(50) \qquad \frac{s}{a} + \frac{s-1}{a} + \frac{s-2}{a} + \cdots + \frac{s-(a-1)}{a} = 1.$$

Ist r der kleinste nicht negative Rest von s (mod. a), so daß $s = aq + r$, $q = \left[\frac{s}{a}\right]$ gesetzt werden kann, so folgt weiter

$$(50\text{a}) \quad \frac{s}{a} \cdot \frac{s}{a} + \frac{s-1}{a} \cdot \frac{s-1}{a} + \cdots + \frac{s-(a-1)}{a} \cdot \frac{s-(a-1)}{a} = \left[\frac{s}{a}\right],$$

wofür man auch schreiben kann

$$\left[\frac{s}{a}\right] = \frac{s}{a} - \frac{1}{a}\left(0 \cdot \frac{s}{a} + 1 \cdot \frac{s-1}{a} + \cdots + (a-1) \cdot \frac{s-(a-1)}{a}\right);$$

man gewinnt also für die Differenz

$$s - a \cdot \left[\frac{s}{a}\right],$$

d. h. für den kleinsten nicht negativen Rest von s (mod. a) folgenden Ausdruck:

$$(50\text{b}) \quad 0 \cdot \frac{s}{a} + 1 \cdot \frac{s-1}{a} + 2 \cdot \frac{s-2}{a} + \cdots + (a-1) \cdot \frac{s-(a-1)}{a}$$

(s. *J. F. W. Herschel,* London R. S. Trans. 140 II, S. 399).

Sind ferner a, α zwei relativ prime Zahlen, so ist unter den Zahlen

$$s,\ s-\alpha,\ s-2\alpha,\ \ldots\ s-(a-1)\alpha$$

eine einzige teilbar durch a, andererseits sind sie sämtlich teilbar durch α oder sämtlich nicht teilbar durch α, je nachdem s es ist oder nicht ist, und somit ist unter ihnen eine einzige oder keine durch $a\alpha$ teilbar, je nachdem s durch α aufgeht oder nicht. Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf (49) die Beziehung

$$(51)\qquad \frac{s}{a\alpha}+\frac{s-\alpha}{a\alpha}+\frac{s-2\alpha}{a\alpha}+\cdots+\frac{s-(a-1)\alpha}{a\alpha}=\frac{s}{\alpha},$$

welche als eine Verallgemeinerung von (50) anzusehen ist.

3) Nach (49) ist $\frac{s}{1}=1$. Die Gleichung:

$$s=x_1+x_2$$

gestattet die Auflösungen

$$x_1=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ s-1,\ s$$

$$x_2=s,\ s-1,\ s-2,\ldots 1,\ 0 \text{ resp.},$$

also ist

$$\frac{s}{1,\ 1}=s+1.$$

Schreibt man, um die Gleichung

$$s=x_1+x_2+x_3$$

aufzulösen, zunächst $s=x_1+s_1$, wo nun

$$x_1=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ s-1,\ s;\quad s_1=s,\ s-1,\ s-2,\ldots,\ 1,\ 0 \text{ resp.}$$

gewählt werden kann, und zerlegt nun jedesmal s_1 in x_2+x_3, so erhält man den Werten von s_1 entsprechend der Reihe nach

$$s+1,\quad s,\quad s-1,\ldots,\ 2,\ 1,$$

insgesamt also $\frac{(s+1)(s+2)}{2}$ Auflösungen, mithin ist:

$$\frac{s}{1,\ 1,\ 1}=\frac{(s+1)(s+2)}{1\ 2}.$$

Die Fortsetzung dieser Betrachtung liefert offenbar als Anzahl der Auflösungen der Gleichung

$$(52)\qquad s=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

den Denumerant

$$(53)\qquad \frac{s}{1,\ 1,\ 1,\ldots,\ 1}=\frac{(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}.$$

Die Gleichung $s=ax$ war nur dann lösbar, wenn s ein Vielfaches von a, und entsprechend diesem oder dem entgegengesetzten Falle $\frac{s}{a}=1$ oder 0. Gleiches gilt von der Gleichung

$$(54)\qquad s=ax_1+ax_2+\cdots+ax_n;$$

die Anzahl ihrer Lösungen ist demnach Null oder gleich derjenigen von

$$\frac{s}{a}=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

d. i. gleich

$$\frac{(s+a)(s+2a)\ldots[s+(n-1)a]}{1a\cdot 2a\ldots(n-1)a},$$

so daß allgemein gesetzt werden kann:

$$(55)\qquad \frac{s}{\overline{\overline{a, a, a, \ldots, a}}} = \frac{s}{\overline{\overline{a}}} \cdot \frac{(s+a)(s+2a)\ldots[s+(n-1)a]}{1a \cdot 2a \ldots (n-1)a}.$$

Beschränkt man sich bei Auflösung der Gleichungen (52) resp. (54) auf solche in positiven Zahlen x_i, so lehrt die gleiche Betrachtung, daß die Formeln (53) resp. (55) durch die folgenden:

$$(53\text{a})\qquad \frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)},$$

$$(55\text{a})\qquad \frac{s}{\overline{\overline{a}}} \cdot \frac{(s-a)(s-2a)\ldots[s-(n-1)a]}{1a \cdot 2a \ldots (n-1)a}$$

zu ersetzen sind. Die erste dieser Formeln stimmt mit der Formel (9′) in Nr. 3 überein, und in der Tat ist die Anzahl der positiven Auflösungen der Gleichung (52) nichts anderes als die Anzahl der Zergliederungen von s in n Summanden.

4) Nunmehr betrachten wir die Gleichung

$$(56)\qquad s = a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

Sei m das kleinste gemeinsame Vielfache von a_1, a_2. Setzt man dann

$$x_1 = \frac{m}{a_1} \cdot \zeta_1 + \alpha_1, \quad x_2 = \frac{m}{a_2} \cdot \zeta_2 + \alpha_2,$$

wo α_1, α_2 resp. Zahlen aus der Reihe

$$0, 1, 2, \ldots, \frac{m}{a_1} - 1; \quad 0, 1, 2, \ldots, \frac{m}{a_2} - 1$$

sind und ζ_1, ζ_2 nicht negative Zahlen bedeuten, so geht die Gleichung (56) in die folgende über:

$$(57)\qquad s - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) = m\zeta_1 + m\zeta_2,$$

wo nun für jede der Kombinationen α_1, α_2, für welche $s - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)$ nicht negativ ausfällt, die Anzahl der Lösungen in nicht negativen ganzen Zahlen ζ_1, ζ_2 zu finden ist, welche der Formel (55) zufolge gleich

$$\frac{s-(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)}{\overline{\overline{m}}} \cdot \frac{s-(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) + m}{m}$$

ist. Die Anzahl der Lösungen für die Gleichung (56) beträgt also

$$(58)\qquad \frac{s}{\overline{\overline{a_1, a_2}}} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{s - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2}{\overline{\overline{m}}} \cdot \left(\frac{s - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2}{m} + 1\right).$$

So findet sich z. B. für die Gleichung

$$(59)\qquad s = x + 2y,$$

in welcher $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $m = 2$, $\alpha_1 = 0{,}1$; $\alpha_2 = 0$ ist, aus (58) der Ausdruck:

$$\frac{s}{1,\,2} = \frac{s}{2}\cdot\left(\frac{s}{2}+1\right) + \frac{s-1}{2}\cdot\left(\frac{s-1}{2}+1\right);$$

da nun, je nachdem s gerade oder ungerade ist,

$$\frac{s}{2}=1,\quad \frac{s-1}{2}=0 \quad\text{oder}\quad \frac{s}{2}=0,\quad \frac{s-1}{2}=1$$

ist, wird je nach diesen beiden Fällen die Anzahl der Lösungen der Gleichung (59) gleich $\frac{s}{2}+1$ oder $\frac{s-1}{2}+1$ oder allgemein gleich

(60) $$\left[\frac{s}{2}\right]+1$$

sein, wofür auch

(60a) $$\frac{2s+3}{4}+(-1)^s\cdot\frac{1}{4}$$

geschrieben werden kann.

Sooft wie in diesem Beispiele a_1, a_2 relativ prim sind, also $m = a_1\cdot a_2$ ist, nimmt die Formel (58) die Gestalt an:

(58′) $$\frac{s}{a_1,\,a_2} = \sum_{\alpha_1,\,\alpha_2} \frac{s-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2}{a_1 a_2}\cdot\left(\frac{s-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2}{a_1 a_2}+1\right).$$

Hier verschwinden aber nur diejenigen Glieder der Summe nicht, in welchen $s-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2$ nicht negativ und durch a_1a_2 teilbar ist. Setzt man

$$s-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2 = a_1a_2\cdot z,$$

also

(61) $$s = a_1\alpha_1 + a_2(\alpha_2+a_1z),$$

so sieht man, daß $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2+a_1z$ diejenige stets vorhandene Lösung der Gleichung (56) bedeuten, bei welcher x_1 der Reihe 0, 1, 2, ..., a_2-1 angehört. Wäre für sie $s-a_1\alpha_1<0$, so würde α_2+a_1z, also, da α_2 eine Zahl der Reihe 0, 1, 2, ..., a_1-1 bedeutet, auch z negativ sein und kein von Null verschiedenes Glied der Summe (58′) vorhanden sein; alsdann ist also die Anzahl der Lösungen der Gleichung (56) gleich Null. Da, wenn $\alpha_2+a_1z=-\alpha_2'$ gesetzt wird, $s+a_2\alpha_2'=a_1\alpha_1<a_1a_2$ also $\alpha_2'<a_1$ mithin $\frac{\alpha_2'}{a_1}$ ein echter Bruch ist, so findet man

$$\left[\frac{s-a_1\alpha_1}{a_1a_2}\right] = \left[\frac{-\alpha_2'}{a_1}\right] = -1;$$

man darf also auch sagen, die Anzahl der Lösungen der Gleichung (56) sei in diesem Falle gleich

$$\left[\frac{s-a_1\alpha_1}{a_1a_2}\right]+1.$$

Im entgegengesetzten Falle liefert die Formel (61) einen nicht

negativen Wert von $\alpha_2 + a_1 z$ d. i. einen nicht negativen Wert von z, also ein Glied der Summe (58'), das nicht verschwindet, und die ganze Summe reduziert sich auf dies eine ganzzahlige Glied

$$\frac{s - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2}{a_1 a_2} + 1 = \frac{s - a_1\alpha_1}{a_1 a_2} + \left(1 - \frac{\alpha_2}{a_1}\right),$$

ein Ausdruck, welcher, da $1 - \frac{\alpha_2}{a_1}$ ein positiver echter Bruch ist, wieder mit $\left[\frac{s - a_1\alpha_1}{a_1 a_2}\right] + 1$ gleichwertig ist. Da ferner

$$\frac{s - a_1\alpha_1}{a_1 a_2} = \frac{s}{a_1 a_2} - \frac{\alpha_1}{a_2}$$

und $\frac{\alpha_1}{a_2}$ ein positiver echter Bruch ist, kann $\left[\frac{s - a_1\alpha_1}{a_1 a_2}\right]$ entweder nur mit $\left[\frac{s}{a_1 a_2}\right]$ oder mit $\left[\frac{s}{a_1 a_2}\right] - 1$ gleich sein. Somit findet sich schließlich, daß allgemein die Anzahl $\frac{s}{a_1 a_2}$ der Lösungen der Gleichung (56) im Falle relativ primer a_1, a_2 einer der beiden Zahlen

$$\left[\frac{s}{a_1 a_2}\right] \text{ oder } \left[\frac{s}{a_1 a_2}\right] + 1$$

gleich sein muß. Hiermit stimmt der besondere vorherbehandelte Fall und seine Formel (60) überein. (S. *V. A. Lebesgue,* exerc. d'analyse numérique, S. 52.)

Man erhält dies Resultat auch folgendermaßen. Setzt man in Gleichung (56), immer unter der Voraussetzung, daß a_1, a_2 relativ prim sind, $x_1 = a_2\xi_1 + \alpha_1$, $x_2 = a_1\xi_2 + \alpha_2$ und zugleich, unter r den kleinsten nicht negativen Rest von s (mod. $a_1 a_2$) verstehend, $s = q a_1 a_2 + r$, so nimmt sie die Gestalt an

$$(62) \qquad q \cdot a_1 a_2 + r = a_1 a_2 \cdot (\xi_1 + \xi_2) + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2.$$

Nun durchläuft $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$, wenn α_1, α_2 die oben angegebenen Werte annehmen, $a_1 a_2$ verschiedene und auch (mod. $a_1 a_2$) inkongruente Werte, welche kleiner als $2a_1 a_2$ also gleich r' oder $a_1 a_2 + r''$ sind, wo die r', r'' zusammen alle kleinsten nicht negativen Reste (mod. $a_1 a_2$) darstellen; entweder gibt es daher ein System α_1, α_2, für welches

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = r \text{ und dann } \xi_1 + \xi_2 = q,$$

oder ein solches, für welches

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = a_1 a_2 + r \text{ und dann } \xi_1 + \xi_2 = q - 1$$

ist. Mithin gestattet die Gleichung (62) je nach diesen Fällen $q + 1$ oder q Auflösungen, wo $q = \left[\frac{s}{a_1 a_2}\right]$.

Hiernach läßt sich der obige Satz auch so aussprechen: Ist r der kleinste nicht negative Rest von s (mod. $a_1 \cdot a_2$), so besteht die Beziehung:

$$\frac{s}{\overline{a_1, a_2}} = \frac{r}{\overline{a_1, a_2}} + \left[\frac{s}{a_1 \cdot a_2}\right]. \tag{63}$$

In dieser Form findet er sich bei *Weihrauch,* Ztschr. f. Math. u. Phys. 20, 1875, S. 97. Siehe dazu die sehr elegante Herleitung, welche *Hermite* in Quarterly Journ. of Math. 1, 1857, S. 370 gegeben hat.

Man kann der Formel (63) offenbar auch die folgende, wie wir sehen werden, geeignetere Form geben:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{s}{\overline{a_1, a_2}} = N(r = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) \cdot \left(\left[\frac{s}{a_1 \cdot a_2}\right] + 1\right) \\ + N(r + a_1 a_2 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) \cdot \left[\frac{s}{a_1 \cdot a_2}\right].\end{aligned}\right. \tag{63a}$$

$$0 \overline{\gtrless} \alpha_i < \frac{a_1\, a_2}{a_i}$$

9. Diese Betrachtungen lassen sich leicht verallgemeinern. Um die Gleichung

$$s = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \tag{64}$$

zu lösen, bezeichne man mit m das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ und setze für $i = 1, 2, 3, \ldots n$

$$x_i = \frac{m}{a_i} \cdot \xi_i + \alpha_i,$$

wobei α_i eine Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots \frac{m}{a_i} - 1$. Dann nimmt die Gleichung die Form an:

$$s - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n) = m\xi_1 + m\xi_2 + \cdots + m\xi_n, \tag{65}$$

wo nun für jede Kombination $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, für welche die linke Seite nicht negativ ausfällt, die Anzahl der Lösungen in nicht negativen ganzen Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ zu finden ist; der Formel (55) zufolge beträgt sie, wenn zur Abkürzung

$$s - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n) = s' \tag{66}$$

gesetzt wird,

$$\frac{s'}{\overline{m}} \cdot \frac{(s' + m)(s' + 2m) \ldots (s' + (n-1)m)}{1m \cdot 2m \cdot \ldots (n-1)m},$$

und somit die gesamte Anzahl Lösungen der Gleichung (64) in nicht negativen ganzen Zahlen

$$\frac{s}{\overline{a_1, a_2, \ldots a_n}} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n} \frac{s'}{\overline{m}} \cdot \frac{(s' + m)(s' + 2m) \ldots (s' + (n-1)m)}{1m \cdot 2m \cdot \ldots (n-1)m}, \tag{67}$$

wo die Summation auf alle eben bezeichneten Wertkombinationen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ zu erstrecken ist.

Liegt z. B. die Gleichung vor

$$s = x_1 + 2x_2 + 4x_3, \tag{68}$$

für welche $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $m = 4$ ist, so läßt α_1 die Werte 0, 1, 2, 3; α_2 die Werte 0, 1; α_3 nur den Wert 0 zu, demgemäß erhält

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3$$

die folgenden Werte:

$$\text{für } \alpha_2 = 0\text{: } 0,\ 1,\ 2,\ 3$$
$$\text{für } \alpha_2 = 1\text{: } 2,\ 3,\ 4,\ 5;$$

man findet demnach für s' einmal die Werte s, $s-1$, $s-4$, $s-5$ und zweimal die Werte $s-2$, $s-3$, mithin nach (67)

$$\frac{s}{1,\ 2,\ 4}$$
$$= \frac{s}{4} \cdot \frac{(s+4)(s+8)}{4 \cdot 8} + \frac{s-1}{4} \cdot \frac{(s+3)(s+7)}{4 \cdot 8} + 2 \cdot \frac{s-2}{4} \cdot \frac{(s+2)(s+6)}{4 \cdot 8}$$
$$+ 2 \cdot \frac{s-3}{4} \cdot \frac{(s+1)(s+5)}{4 \cdot 8} + \frac{s-4}{4} \cdot \frac{s(s+4)}{4 \cdot 8} + \frac{s-5}{4} \cdot \frac{(s-1)(s+3)}{4 \cdot 8}.$$

Da offenbar $\frac{s-4}{4} = \frac{s}{4}$, $\frac{s-5}{4} = \frac{s-1}{4}$ ist, kommt nach einfachen Reduktionen

$$\frac{s}{1,\ 2,\ 4}$$
$$= \frac{1}{16}\left[\frac{s}{4} \cdot (s^2 + 8s + 16) + \frac{s-1}{4} \cdot (s^2 + 6s + 9) + \frac{s-2}{4} \cdot (s^2 + 8s + 12) \right. \tag{69}$$
$$\left. + \frac{s-3}{4} \cdot (s^2 + 6s + 5)\right].$$

Je nachdem also $s \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ ist, wird die Anzahl der Lösungen der Gleichung (68) in nicht negativen ganzen Zahlen x_1, x_2, x_3 resp. gleich

$$\frac{s^2 + 8s + 16}{16},\quad \frac{s^2 + 6s + 9}{16},\quad \frac{s^2 + 8s + 12}{16},\quad \frac{s^2 + 6s + 5}{16}.$$

Man sieht, die Formel (67) gestattet, die Anzahl der Lösungen der Gleichung (64) bei bestimmt gegebenen Koeffizienten als eine Funktion von s zu berechnen, doch zeigt sie schwer die Abhängigkeit dieser Anzahl von den Koeffizienten der Gleichung an. Indem wir uns auf den Fall beschränken, wo diese letzteren zu je zweien relativ prim sind, wollen wir dem gedachten Übelstande durch nachfolgende Betrachtung abzuhelfen suchen.

Man nehme unter der gedachten Voraussetzung zunächst die Gleichung:

$$s = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \tag{70}$$

so daß das kleinste gemeinsame Vielfache der Koeffizienten $m = a_1a_2a_3$ ist. Setzt man

$$x_1 = a_2 a_3 \xi_1 + \alpha_1,\ x_2 = a_3 a_1 \xi_2 + \alpha_2,\ x_3 = a_1 a_2 \xi_3 + \alpha_3,$$

wo α_1, α_2, α_3 resp. Zahlen der Reihen

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, a_2 a_3 - 1;\ 0,\ 1,\ 2, \ldots, a_3 a_1 - 1;\ 0,\ 1,\ 2, \ldots, a_1 a_2 - 1$$

sind, und setzt ferner

$$s = q \cdot a_1 a_2 a_3 + r,$$

unter r den kleinsten nicht negativen Rest von s (mod. $a_1 a_2 a_3$) verstehend, so nimmt die Gleichung (70) die Gestalt an:

$$(71)\quad q \cdot a_1 a_2 a_3 + r = a_1 a_2 a_3 (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3.$$

Nun durchläuft der Ausdruck $a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3$, wenn man den α_1, α_2, α_3 die eben bezeichneten Werte beilegt,

$$a_2 a_3 \cdot a_3 a_1 \cdot a_1 a_2 = (a_1 a_2 a_3)^2$$

Werte, welche alle kleiner sind als $3 a_1 a_2 a_3$. Die Gleichung (71) wird aber nur erfüllt, wenn entweder

$$r = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3$$

ist, was $N(r = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)$ mal geschieht, während

$$0 \overline{\overline{<}} \alpha_i < \frac{a_1 a_2 a_3}{a_i}$$

ist, und dann $q = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, also $\frac{(q+1)(q+2)}{1 \cdot 2}$ Auflösungen gibt; oder wenn

$$r + a_1 a_2 a_3 = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3$$

ist, was $N(r + a_1 a_2 a_3 = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)$ mal geschieht und dann $q - 1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ also jedesmal $\frac{q(q+1)}{1 \cdot 2}$ Auflösungen liefert; oder endlich, wenn

$$r + 2 a_1 a_2 a_3 = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3$$

ist, was $N(r + 2 a_1 a_2 a_3 = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)$ mal geschieht und dann $q - 2 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ also jedesmal $\frac{(q-1)q}{1 \cdot 2}$ Auflösungen gibt. Somit wird die gesamte Anzahl der Auflösungen der Gleichung (70) in nicht negativen ganzen Zahlen x_i

$$\overline{\overline{\frac{s}{a_1,\ a_2,\ a_3}}}$$

$$(72)\quad \begin{aligned} &= N(r = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3) \cdot \frac{\left(\left[\frac{s}{a_1 a_2 a_3}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{s}{a_1 a_2 a_3}\right] + 2\right)}{1 \cdot 2} \\ &+ N(r + a_1 a_2 a_3 = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3) \cdot \frac{\left[\frac{s}{a_1 a_2 a_3}\right] \cdot \left(\left[\frac{s}{a_1 a_2 a_3}\right] + 1\right)}{1 \cdot 2} \\ &+ N(r + 2 a_1 a_2 a_3 = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3) \cdot \frac{\left(\left[\frac{s}{a_1 a_2 a_3}\right] - 1\right) \cdot \left[\frac{s}{a_1 a_2 a_3}\right]}{1 \cdot 2} \end{aligned}$$

$$\left(0 \overline{\overline{<}} \alpha_i < \frac{a_1 a_2 a_3}{a_i}\right)$$

sein. Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem Ausdrucke (63a) läßt das allgemeine hier herrschende Gesetz erkennen, so daß es nicht nötig ist, in dieser Richtung noch weiter zu gehen.

Sei z. B. zu lösen

$$35 = x_1 + 2x_2 + 3x_3.$$

Hier ist $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ und wegen $35 = 5 \cdot 6 + 5$ ist $q = 5$, $r = 5$; α_1 hat die Werte 0, 1, 2, 3, 4, 5; α_2 die Werte 0, 1, 2; α_3 die Werte 0, 1 zu durchlaufen, und man findet leicht, daß dabei der Ausdruck $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ fünfmal den Wert $r = 5$, einmal den Wert $5 + 6 = 11$, keinmal den Wert $5 + 12 = 17$ liefert, und somit nach (72)

$$\frac{35}{1,\, 2,\, 3} = 5 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 1 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} = 5 \cdot 21 + 5 \cdot 3 = 120$$

ist.

Nennt man N_0, N_1, N_2 die drei Anzahlen N, die in der Formel (72) auftreten und setzt

$$\frac{r}{a_1,\, a_2,\, a_3} = M_0, \quad \frac{r + a_1 a_2 a_3}{a_1,\, a_2,\, a_3} = M_1, \quad \frac{r + 2a_1 a_2 a_3}{a_1,\, a_2,\, a_3} = M_2,$$

so liefert die Formel die Beziehungen

$$M_0 = N_0, \quad M_1 = 3N_0 + N_1, \quad M_2 = 6N_0 + 3N_1 + N_2,$$

aus denen umgekehrt

$$N_0 = M_0, \quad N_1 = M_1 - 3M_0, \quad N_2 = M_2 - 3M_1 + 3M_0$$

hervorgehen. Dadurch nimmt die Formel (72) die Gestalt an:

$$(73) \qquad \frac{s}{a_1,\, a_2,\, a_3} = \frac{M_0 - 2M_1 + M_2}{2} \cdot q^2 - \frac{3M_0 - 4M_1 + M_2}{2} \cdot q + M_0.$$

10. Diese Formel löst aber eigentlich noch immer nicht die Aufgabe, den Denumeranten $\frac{s}{a_1,\, a_2,\, a_3}$ als Funktion seiner Elemente s, a_1, a_2, a_3 zu bestimmen, sondern führt seine Bestimmung nur auf den einfacheren Fall, in welchem $s < 3a_1 a_2 a_3$ ist, zurück. Bisher ist die gedachte allgemeinere Aufgabe für die Anzahl $\frac{s}{a,\, b,\, \ldots\, l}$ auch nur von analytischem Gesichtspunkte aus erledigt, nämlich diese Anzahl unter der Voraussetzung positiver Elemente $a, b, \ldots l$ nur als der Koeffizient von x^s in der Entwicklung der Funktion

$$(74) \qquad \frac{1}{(1 - x^a)(1 - x^b) \ldots (1 - x^l)}$$

nach steigenden Potenzen von x durch analytische Betrachtungen ermittelt worden.[1]) *Cayley* und *Sylvester*, denen beiden, besonders dem

1) S. die Anmerkung zu Nr. 15.

letzteren, die Theorie der Zerfällungen überhaupt erhebliche Fortschritte zu danken hat, haben Ausdrücke für den genannten Koeffizienten aufgestellt, deren Herleitung nun unsere nächste Sorge sein soll.

Wir beginnen sie mit einer einfachen Bemerkung über den Koeffizienten von x^s in der Entwicklung eines Ausdrucks von der Form

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{d-1} x^{d-1}}{1 - x^d}. \tag{75}$$

Ist r der kleinste nicht negative Rest von s (mod. d), d. h. $s = qd + r$, worin $0 \overline{\overline{<}} r < d$, so ist jener Koeffizient offenbar a_r. Bezeichnen wir nun mit d_i die Eins, wenn i durch d teilbar ist, entgegengesetztenfalls die Null:

$$\left.\begin{aligned} d_i &= 1, \text{ wenn } i \equiv 0 \\ d_i &= 0, \quad\;\; „ \quad\; i \not\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{(mod. } d), \tag{76}$$

so hat von den d Größen

$$d_s,\ d_{s-1},\ d_{s-2},\ \ldots,\ d_{s-(d-1)}$$

nur eine, nämlich d_{s-r} den Wert 1, die übrigen sind Null; demnach ist der Ausdruck

$$a_0 d_s + a_1 d_{s-1} + \cdots + a_{d-1} d_{s-(d-1)} \tag{77}$$

gleich a_r. Einen Ausdruck solcher Art hat *J. F. W. Herschel* eine function circulating, *Cayley* einen circulator genannt (*Herschel* in London R. Soc. Trans. 140 II (1850) S. 399; *Cayley* ebend. 146 I (1856) S. 127), weil er ersichtlich, wenn s alle ganzen Zahlen durchläuft, je nach dem Reste (mod. d), welchen s dabei läßt, in steter Wiederholung die Wertreihe $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ annehmen wird. Sind $1, \varrho, \varrho', \ldots$ die sämtlichen $d$ten Einheitswurzeln, so ist bekanntlich

$$1^i + \varrho^i + \varrho'^i + \cdots$$

gleich d oder gleich 0, je nachdem i durch d teilbar ist oder nicht, und somit könnte

$$d_i = \frac{1^i + \varrho^i + \varrho'^i + \cdots}{d} \tag{78}$$

angenommen werden. Noch einfacher wählt man

$$d_i = \frac{i}{d}, \tag{79}$$

da auch dieser Denumerant nach Anfang von Nr. 8 gleich 1 oder 0 ist, je nachdem i durch d aufgeht oder nicht. Der Zirkulator (77) schreibt sich dann

$$a_0 \cdot \frac{s}{d} + a_1 \cdot \frac{s-1}{d} + \cdots + a_{d-1} \cdot \frac{s-(d-1)}{d} \tag{80}$$

und stellt den Koeffizienten von x^s in der Entwicklung von (75) dar.

Um nun diesen Koeffizienten für den Ausdruck (74) zu ermitteln, müssen wir an die Zerlegung einer rational gebrochenen Funktion

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

in Partialbrüche erinnern. Ist ϱ eine Wurzel des Nenners $f(x)$ und bezeichnet k, wie oft dieselbe zu zählen ist, so daß $f(x)$ die genaue Potenz $(x-\varrho)^k$ als Faktor enthält, so entspricht dieser Wurzel bekanntlich in der Partialbruchzerlegung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ eine Reihe von Brüchen von der Form:

$$\frac{A}{(x-\varrho)^k}+\frac{A_1}{(x-\varrho)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_{k-1}}{x-\varrho}$$

mit von x unabhängigen Zählern; dieser Teil der Partialbruchzerlegung heiße $\left\{\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right\}_\varrho$. Man überzeugt sich leicht, daß er gleich dem Koeffizienten von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung der Funktion

$$\frac{1}{x-\varrho-z}\cdot\frac{\varphi(\varrho+z)}{f(\varrho+z)}$$

oder daß, wie wir schreiben wollen,

$$\left\{\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right\}_\varrho = K_{-1}\cdot\left(\frac{1}{x-\varrho-z}\cdot\frac{\varphi(\varrho+z)}{f(\varrho+z)}\right) \tag{81}$$

ist. Wird aber für die Veränderliche z eine andere Veränderliche t eingeführt durch die Substitution $z=\varphi(t)$, derzufolge t gleichzeitig mit z verschwindet, so ist nach einem allgemeinen Satze von *Cauchy*

$$K_{-1}\big(F(z)\big)=K_{-1}\Big(F\big(\varphi(t)\big)\cdot\psi'(t)\Big).$$

Setzen wir daher $\varrho+z=\varrho e^{-t}$, so läßt sich (81) schreiben, wie folgt:

$$\left\{\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right\}_\varrho = K_{-1}\left(\frac{1}{\varrho-xe^t}\cdot\frac{\varrho\,\varphi\left(\varrho e^{-t}\right)}{f\left(\varrho e^{-t}\right)}\right). \tag{82}$$

Schreibt man für einen Augenblick $x=\varrho e^\xi$ und bedenkt, daß

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varrho\left(1-e^{\xi+t}\right)}\right)_{t=0}=\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\varrho\left(1-e^{\xi}\right)}\right),$$

d. h. wegen $\frac{dF(x)}{d\xi}=\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{d\xi}=x\cdot\frac{dF(x)}{dx}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varrho\left(1-e^{\xi+t}\right)}\right)_{t=0}=x\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varrho-x}\right)$$

ist, so findet man, wenn zur Abkürzung die Operation $x\cdot\frac{d}{dx}$ durch Δ_x und ihre wiederholten Ausführungen durch $\Delta_x^{(2)}, \Delta_x^{(3)}, \ldots$ bezeichnet werden, mittels der *Maclaurin*schen Reihenentwicklung diese Gleichung:

$$\left\{\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right\}_\varrho$$

$$= K_{-1}\left(\left[\frac{1}{\varrho - x} + \frac{t}{1}\cdot\Delta_x\left(\frac{1}{\varrho - x}\right) + \frac{t^2}{1\cdot 2}\cdot\Delta_x^{(2)}\left(\frac{1}{\varrho - x}\right) + \cdots\right]\cdot\frac{\varrho\varphi(\varrho e^{-t})}{f(\varrho e^{-t})}\right),$$

also, wenn

$$\chi_i(\varrho) = K_{-1}\left(t^{i-1}\cdot\frac{\varrho\varphi(\varrho e^{-t})}{f(\varrho e^{-t})}\right) \tag{83}$$

gesetzt wird,

$$\left\{\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right\}_\varrho = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(i-1)!}\cdot\Delta_x^{(i-1)}\left(\frac{\chi_i(\varrho)}{\varrho - x}\right). \tag{84}$$

11. Diese *Cayley*sche Formel wenden wir nun auf den vorliegenden Fall an, in welchem $\varphi(x) = 1$ und

$$f(x) = (1 - x^a)(1 - x^b)\cdots(1 - x^l)$$

ist. Bedeutet $[1 - x^n]$ denjenigen irreduktibeln Faktor von $1 - x^n$, welcher die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln zu Wurzeln hat, so ist nach einem bekannten Satze der Kreisteilung (s. des Verfassers Vorlesungen über die Lehre von der Kreisteilung usw. S. 15)

$$1 - x^a = \prod_{d:a}[1 - x^d], \tag{85}$$

wenn die Multiplikation über alle Teiler d von a, die Zahlen 1 und a einschließlich, erstreckt wird. Nennt man daher d jeden Teiler der Elemente $a, b, \ldots, l$, und k die Anzahl der letzteren, in denen er aufgeht, so findet man für $f(x)$ diese andere Zerlegung:

$$f(x) = \prod_d [1 - x^d]^k, \tag{86}$$

wo nun die Multiplikation über die verschiedenen Teiler d der Elemente $a, b, \ldots, l$ auszudehnen ist. Indem also mit ϱ irgendeine Wurzel der Gleichung

$$[1 - x^d] = 0 \tag{87}$$

bezeichnet wird, folgt nach (84) für den ihr entsprechenden Teil der Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{f(x)}$ der Ausdruck

$$\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}_\varrho = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(i-1)!}\cdot\Delta_x^{(i-1)}\left(\frac{\chi_i(\varrho)}{\varrho - x}\right), \tag{88}$$

in welchem

$$\chi_i(\varrho) = K_{-1}\left(t^{i-1}\cdot\frac{\varrho}{f(\varrho e^{-t})}\right)$$

ist, und derjenige Teil der Partialbruchzerlegung für $\frac{1}{f(x)}$, welcher

den sämtlichen Wurzeln von (87) entspricht und welchen wir kurz $\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}_{[1-x^d]}$ nennen wollen, wird daher

$$\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}_{[1-x^d]} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(i-1)!}\ \Delta_x^{(i-1)}\left(\sum_{\varrho} \frac{\chi_i(\varrho)}{\varrho - x}\right) \tag{89}$$

sein. Hier kann aber

$$\sum_{\varrho} \frac{\chi_i(\varrho)}{\varrho - x} = \frac{\theta_i(x)}{[1-x^d]} \tag{90}$$

gesetzt werden, wo $\theta_i(x)$ eine ganze Funktion von x vom Grade $\delta - 1$ bezeichnet, die um 1 kleiner ist als der Grad $\delta = \varphi(d)$ des Nenners $[1 - x^d]$, unter $\varphi(d)$ die Anzahl der zu d primen Zahlen $\overline{\overline{<}}\, d$ verstanden.

Um diese Funktion zu bilden, verfährt *Cayley* folgendermaßen (London R. Soc. Trans. 148 I, (1858), S. 47). Seien $a, a', \ldots$ diejenigen der Elemente $a, b, \ldots, l$, welche den Teiler d nicht haben, und $dh, dh', \ldots$ die k Elemente, welchen er zukommt, so kann man

$$f(x) = \prod (1 - x^a) \cdot \prod (1 - x^{dh})$$

setzen, also, da $\varrho^d = 1$ ist,

$$\chi_i(\varrho) = K_{-1}\left(t^{i-1} \cdot \frac{\varrho}{\prod (1 - \varrho^a e^{-at}) \prod (1 - e^{-dht})}\right).$$

Da aber jeder Faktor $\frac{1}{1 - \varrho^a e^{-at}}$ sich in eine nach positiven Potenzen von t steigende Reihe entwickelt, dagegen wegen

$$1 - e^{-dht} = \frac{dht}{1} - \frac{d^2h^2t^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3h^3t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots$$

die Entwicklung eines jeden der Faktoren $\frac{1}{1 - e^{-dht}}$ mit der Potenz $\frac{1}{t}$ beginnt, so findet sich

$$\frac{1}{\prod (1 - \varrho^a e^{-at}) \prod (1 - e^{-dht})} = A_{-k} \cdot \frac{1}{t^k} + A_{-k+1} \cdot \frac{1}{t^{k-1}} + \cdots$$
$$+ A_{-1} \cdot \frac{1}{t} + A_0 + A_2 t + \cdots$$

und demnach

$$\chi_i(\varrho) = \varrho \cdot A_{-i}. \tag{91}$$

Aber aus (90) ergibt sich, wenn mit $\varrho - x$ multipliziert und dann $x = \varrho$ gesetzt wird,

$$\chi_i(\varrho) = \theta_i(\varrho) \cdot \left(\frac{\varrho - x}{[1 - x^d]}\right)_{x=\varrho}.$$

Bekanntlich kann aber

$$[1 - x^d] = (\varrho - x)(\varrho^{z_1} - x)(\varrho^{z_2} - x) \cdots (\varrho^{z_{\delta-1}} - x)$$

gesetzt werden, wo $1, z_1, z_2, \ldots, z_{\delta-1}$ die sämtlichen zu d teilerfremden Zahlen $< d$ bedeuten. Daraus folgt

$$\chi_i(\varrho) = \theta_i(\varrho) \cdot \frac{1}{\varrho^{\delta-1} \prod_{i=1}^{\delta-1} (\varrho^{z_i-1} - 1)},$$

also mit Beachtung von (91)

$$\theta_i(\varrho) = A_{-i} \cdot \varrho^{\delta} \cdot \prod_{i=1}^{\delta-1} (\varrho^{z_i-1} - 1). \tag{92}$$

Denkt man sich hier die rechte Seite mit Hilfe der Identität

$$[1 - \varrho^d] = 0$$

als eine ganze Funktion $F(\varrho)$ vom Grade $\delta - 1$ dargestellt, so erschließt man aus dem Bestehen der Gleichheit $\theta_i(\varrho) = F(\varrho)$ für jede Wurzel ϱ der irreduktibeln Gleichung (87) die identische Gleichheit beider Seiten und gewinnt also in der Funktion $F(x)$ den Ausdruck für die gesuchte Funktion $\theta_i(x)$.

Da nun jedem Faktor des Produkts (86) ein mit (89) entsprechender Teil der Partialbruchzerlegung für $\frac{1}{f(x)}$ zukommt, gelangen wir schließlich zu folgender, von *Cayley* angegebenen Zerlegung der Funktion $\frac{1}{f(x)}$:

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_d \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(i-1)!} \cdot \Delta_x^{(i-1)}\left(\frac{\theta_i(x)}{[1-x^d]}\right), \tag{93}$$

wo die erste Summation auf alle verschiedenen Teiler d der Elemente $a, b, \ldots l$ zu erstrecken ist, und k je die Anzahl dieser Elemente bedeutet, in denen d aufgeht.

12. Nach Herstellung dieser Formel ist es nun leicht, den gewünschten Koeffizienten von x^s in der Entwicklung von $\frac{1}{f(x)}$ nach den steigenden Potenzen von x zu ermitteln. Dem Satze (85) entsprechend darf man schreiben

$$\frac{\theta_i(x)}{[1-x^d]} = \frac{\theta_i(x) \cdot \prod [1-x^{d'}]}{1-x^d},$$

wenn die Multiplikation im Zähler über alle von d verschiedenen Teiler d' von d erstreckt wird. Man setze nun den Zähler, welcher eine ganze Funktion von x vom Grade $d - 1$ ist, da $[1 - x^{d'}]$ vom

Grade $\varphi(d')$, $\theta_i(x)$ vom Grade $\delta - 1 = \varphi(d) - 1$ und bekanntlich die auf alle Teiler d' von d, die Zahl d einschließlich, erstreckte Summe

$$\Sigma\varphi(d) = d$$

ist, gleich

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{d-1} x^{d-1},$$

also

$$\frac{\theta_i(x)}{[1-x^d]} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{d-1} x^{d-1}}{1-x^d}.$$

Der Vorbemerkung zufolge, mit welcher die Nr. 10 beginnt, wird der Koeffizient von x^s in der Entwicklung dieses Ausdrucks durch den Zirkulator (80) gegeben, den wir in der *Cayley*schen Schreibweise durch das Zeichen

$$(94) \qquad (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{d-1}) \text{ clr. } d_s$$

ausdrücken wollen. Wenn nun der entwickelte Ausdruck

$$\frac{\theta_i(x)}{[1-x^d]}$$

nach x differenziert wird, so geht das Glied Cx^s in $Cs \cdot x^{s-1}$, durch die Operation Δ_x also in $sC \cdot x^s$ und allgemeiner durch $\Delta_x^{(i-1)}$ in $s^{i-1} C x^s$ über, d. h. der Koeffizient von x^s wird mit s^{i-1} multipliziert. Demnach ist der Koeffizient von x^s in

$$\Delta_x^{(i-1)}\left(\frac{\theta_i(x)}{[1-x^d]}\right)$$

gleich

$$s^{i-1} \cdot (a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}) \text{ clr. } d_s$$

und somit ergibt sich aus (93) als der gesuchte Koeffizient von x^s in der Entwicklung von $\frac{1}{f(x)}$ d. h. als der Wert des Denumeranten $\frac{s}{\overline{a, b, \ldots, l}}$ folgender Ausdruck:

$$(95) \qquad \frac{s}{\overline{a, b, \ldots, l}} = \sum_d \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{s^{i-1}}{(i-1)!} \cdot (a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}) \text{ clr. } d_s \right).$$

Unter den Teilern d, auf welche diese Summation zu erstrecken ist, befindet sich stets der Teiler $d = 1$, der insofern vor den übrigen sich auszeichnet, als ihm nicht eigentlich ein Zirkulator entspricht, denn dieser hätte nach (94) die Form einer Konstanten:

$$(a_0) \text{ clr. } 1_s = a_0.$$

Scheidet man daher in der Formel (95) diesen Teiler von den übrigen, so nimmt sie, wenn man beachtet, daß der Teiler $d = 1$ so oft auftritt, als die Anzahl ε der Elemente $a, b, \ldots, l$ beträgt, die neue Gestalt an:

$$(96)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{s}{a,\, b, \ldots, l} \\ &= a_0^{(1)} s^{\varepsilon-1} + a_0^{(2)} s^{\varepsilon-2} + \cdots + a_0^{(\varepsilon)} + \sum_d \sum_{i=1}^{k} \frac{s^{i-1}}{(i-1)!} \cdot (a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}) \,\mathrm{clr}\, d_s, \end{aligned} \right.$$

wo nun d nur noch alle von 1 und untereinander verschiedenen Teiler der Elemente $a, b, \ldots, l$ zu durchlaufen hat, eine Formel, derzufolge der gesuchte Denumerant aus zwei wesentlich verschiedenen Teilen besteht: einer ganzen Funktion von s mit festen Koeffizienten und einem die Zirkulatoren enthaltenden Bestandteile mit periodisch wechselnden Koeffizienten.

Cayley hat nach dieser Formel für eine größere Reihe besonderer Fälle den numerischen Wert dieser Zirkulatoren und des Denumeranten berechnet und u. a. folgende Resultate gewonnen:

$$\frac{s}{1,\, 2} = \frac{1}{4}\left(2s + 3 + (1, -1)\,\mathrm{clr.}\, 2_s\right)$$

(vgl. hiermit 60a);

$$\frac{s}{1,\, 2,\, 3} = \frac{1}{72}\left[6s^2 + 36s + 47 + 9 \cdot (1, -1)\,\mathrm{clr.}\, 2_s + 8 \cdot (2, -1, -1)\,\mathrm{clr.}\, 3_s\right],$$

$$\begin{aligned} &\frac{s}{1,\, 2,\, 3,\, 4} \\ &= \frac{1}{288}\Big[2s^3 + 30s^2 + 135s + 175 + (9s + 45) \cdot (1, -1)\,\mathrm{clr.}\, 2_s \\ &\qquad + 32 \cdot (1, 0, -1)\,\mathrm{clr.}\, 3_s + 36 \cdot (1, 0, -1, 0)\,\mathrm{clr.}\, 4_s\Big]. \end{aligned}$$

13. Indem wir nun auch denjenigen Ausdruck für den Denumeranten herleiten wollen, welchen *Sylvester* gegeben hat (Outlines of seven lectures on the partitions of numbers, Proc. London Math. Soc. 28, S. 33; Quarterly Journ. of Math. 1 (1857) S. 81, 141), um ihn dann mit demjenigen von *Cayley* zu vergleichen, beginnen wir mit dem Beweise folgenden Hilfssatzes:

Der Denumerant $\dfrac{s}{a,\, b, \ldots l}$ ist gleich dem Ausdrucke

$$(97)\qquad \frac{1}{a \cdot b \cdots l} \cdot \sum S_s(\alpha, \beta, \ldots, \lambda),$$

in welchem $S_s(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ die Summe aller aus $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ gebildeten Produkte von der Dimension s bedeutet, während unter $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ eine Kombination aus je einer Wurzel der Gleichungen

$$(98)\qquad x^a = 1, \quad x^b = 1, \cdots x^l = 1$$

resp. zu verstehen und die Summation über alle $a \,.\, b \ldots l$ solche Kombinationen zu erstrecken ist. In der Tat bezeichnet

zunächst $S_s(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ den Koeffizienten von x^s in dem nach steigenden Potenzen von x entwickelten Quotienten

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)\cdots(1-\lambda x)},$$

so daß dieser letztere gleich

$$\sum_{s=0}^{\infty} S_s(\alpha, \beta, \cdots, \lambda)\cdot x^s$$

gesetzt werden kann. Werden mithin durch

$$\alpha,\ \alpha',\ \ldots;\quad \beta,\ \beta',\ \ldots;\quad \ldots;\quad \lambda,\ \lambda',\ \ldots$$

die sämtlichen Wurzeln der Gleichungen (98) bezeichnet, so wird offenbar der Ausdruck

$$(99)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{1-\alpha x}+\frac{1}{1-\alpha' x}+\cdots\right)\left(\frac{1}{1-\beta x}+\frac{1}{1-\beta' x}+\cdots\right)\cdots\\ &\cdots\left(\frac{1}{1-\lambda x}+\frac{1}{1-\lambda' x}+\cdots\right)=\sum_{s=0}^{\infty} x^s\cdot\sum S_s(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)\end{aligned}\right.$$

sein, wenn die zweite Summation über alle oben genannten Kombinationen erstreckt wird. Nun ist, wenn $x^{-1}=y$ gesetzt wird, der erste Faktor der linken Seite gleich

$$(100)\qquad y\left(\frac{1}{y-\alpha}+\frac{1}{y-\alpha'}+\cdots\right)=y\cdot\frac{a\,y^{a-1}}{y^a-1}=\frac{a}{1-x^a},$$

und da für die übrigen Faktoren Ähnliches gilt, findet sich die Gleichung

$$(101)\quad ab\ldots l\cdot\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)\cdots(1-x^l)}=\sum_{s=0}^{\infty} x^s\cdot\sum S_s(\alpha, \beta, \ldots, \lambda),$$

aus welcher der behauptete Satz erhellt, da der Denumerant $\frac{s}{\overline{a,\, b,\, \ldots,\, l}}$ der Koeffizient von x^s in der Entwicklung des links stehenden Quotienten ist.

Beschränken wir nun der Einfachheit wegen unsere Betrachtung auf den Fall dreier Elemente a, b, c, d. h. auf den Fall des Denumeranten $\frac{s}{\overline{a,\, b,\, c}}$. Seien wieder α, β, γ je eine Wurzel der Gleichungen

$$(102)\qquad x^a=1,\ x^b=1,\ x^c=1.$$

Dann ist $S_s(\alpha, \beta, \gamma)$ der Koeffizient von x^s in der Entwicklung des Quotienten

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)}$$

nach steigenden Potenzen von x oder, was dasselbe sagt, das konstante Glied in der entsprechenden Entwicklung des Ausdrucks

$$\psi_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = \frac{1}{x^s} \cdot \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)}. \tag{103}$$

Sind nun erstens α, β, γ voneinander verschieden, so besteht bekanntlich die Partialbruchzerlegung

$$\psi_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x} + \frac{C}{1-\gamma x} + \sum_{i=1}^{s} \frac{A_i}{x^i}, \tag{104}$$

derzufolge

$$S_s(\alpha, \beta, \gamma) = A + B + C \tag{105}$$

sich ergibt. Nun folgt aber aus (104), wenn $x = \alpha^{-1}e^{-t}$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\psi_{\alpha,\beta,\gamma}(\alpha^{-1}e^{-t}) = \frac{A}{1-e^{-t}} + \frac{B}{1-\frac{\beta}{\alpha}e^{-t}} + \frac{C}{1-\frac{\gamma}{\alpha}e^{-t}} + \sum_{i=1}^{s} A_i \alpha^i e^{it},$$

aus welcher man erkennt, daß

$$A = K_{-1}\left(\psi_{\alpha,\beta,\gamma}(\alpha^{-1}e^{-t})\right),$$

d. h. gleich dem Koeffizienten von $\frac{1}{t}$ in der Entwicklung der ψ-Funktion nach den steigenden Potenzen von t ist. Ähnlicherweise finden sich die Formeln

$$B = K_{-1}\left(\psi_{\alpha,\beta,\gamma}(\beta^{-1}e^{-t})\right), \quad C = K_{-1}\left(\psi_{\alpha,\beta,\gamma}(\gamma^{-1}e^{-t})\right),$$

mithin nach (105) der Wert

$$\begin{cases} S_s(\alpha, \beta, \gamma) = K_{-1}\left[\psi_{\alpha,\beta,\gamma}(\alpha^{-1}e^{-t}) + \psi_{\alpha,\beta,\gamma}(\beta^{-1}e^{-t}) \right. \\ \qquad\qquad\qquad \left. + \psi_{\alpha,\beta,\gamma}(\gamma^{-1}e^{-t})\right]. \end{cases} \tag{106a}$$

Sei jetzt zweitens α gleich β aber verschieden von γ. Dann ist

$$\psi_{\alpha,\alpha,\gamma}(x) = \frac{A}{(1-\alpha x)^2} + \frac{A'}{1-\alpha x} + \frac{C}{1-\gamma x} + \sum_{i=1}^{s} \frac{A_i}{x^i}, \tag{107}$$

demnach

$$S_s(\alpha, \alpha, \gamma) = A + A' + C. \tag{108}$$

Da nunmehr bei der Substitution $x = \alpha^{-1}e^{-t}$ resp. $x = \gamma^{-1}e^{-t}$

$$A + A' = K_{-1}\left(\psi_{\alpha,\alpha,\gamma}(\alpha^{-1}e^{-t})\right), \quad C = K_{-1}\left(\psi_{\alpha,\alpha,\gamma}(\gamma^{-1}e^{-t})\right)$$

gefunden wird, so ergibt sich

$$S_s(\alpha, \alpha, \gamma) = K_{-1}\left[\psi_{\alpha, \alpha, \gamma}(\alpha^{-1}e^{-t}) + \psi_{\alpha, \alpha, \gamma}(\gamma^{-1}e^{-t})\right],$$

wofür jedoch mit Rücksicht auf $\alpha = \beta$ auch geschrieben werden kann

$$\text{(106b)} \quad \begin{cases} S_s(\alpha, \alpha, \gamma) = K_{-1}\Big[\frac{1}{2}\psi_{\alpha, \alpha, \gamma}(\alpha^{-1}e^{-t}) + \frac{1}{2}\psi_{\alpha, \alpha, \gamma}(\beta^{-1}e^{-t}) \\ \qquad\qquad + \psi_{\alpha, \alpha, \gamma}(\gamma^{-1}e^{-t})\Big]. \end{cases}$$

Ist endlich drittens $\alpha = \beta = \gamma$, so ist

$$\psi_{\alpha, \alpha, \alpha}(x) = \frac{A}{(1-\alpha x)^3} + \frac{A'}{(1-\alpha x)^2} + \frac{A''}{1-\alpha x} + \sum_{i=1}^{s}\frac{A_i}{x^i},$$

woraus

$$\text{(109)} \qquad S_s(\alpha, \alpha, \alpha) = A + A' + A''.$$

Andererseits geht bei Substitution von $x = \alpha^{-1}e^{-t}$ in die vorige Gleichung die Summe $A + A' + A''$ als Koeffizient von $\frac{1}{t}$, und daher die Gleichung

$$S_s(\alpha, \alpha, \alpha) = K_{-1}\left(\psi_{\alpha, \alpha, \alpha}(\alpha^{-1}e^{-t})\right)$$

hervor, der man aber mit Rücksicht auf $\alpha = \beta = \gamma$ auch die Form geben kann:

$$\text{(106c)} \quad \begin{cases} S_s(\alpha, \alpha, \alpha) = K_{-1}\Big[\frac{1}{3}\psi_{\alpha, \alpha, \alpha}(\alpha^{-1}e^{-t}) + \frac{1}{3}\psi_{\alpha, \alpha, \alpha}(\beta^{-1}e^{-t}) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{3}\psi_{\alpha, \alpha, \alpha}(\gamma^{-1}e^{-t})\Big]. \end{cases}$$

Um nun gemäß den Formeln (106a, b, c) die Summe

$$\text{(110)} \qquad \sum S_s(\alpha, \beta, \gamma)$$

zu finden, verteile man die Wurzeln α der Gleichung $x^a = 1$ in vier Gruppen: die Wurzeln α_1, welche von den drei Gleichungen (102) nur der ersten genügen; die Wurzeln α_2, welche der ersten und zweiten, aber nicht der dritten; die Wurzeln α_3, welche der ersten und dritten, aber nicht der zweiten; endlich die Wurzeln α_4, welche allen drei Gleichungen genügen. Es seien ebenso $\beta_1, \beta_3, \beta_2, \beta_4$ diejenigen Wurzeln β, welche resp. nur der Gleichung $x^b = 1$, nur der ersten und zweiten, nur der zweiten und dritten, endlich allen drei Gleichungen genügen; desgleichen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ diejenigen Wurzeln γ, welche resp. nur der Gleichung $x^c = 1$, nur der ersten und dritten, nur der zweiten und dritten, endlich allen drei Gleichungen genügen. Man bemerke, daß dann die Wurzeln α_2 mit den Wurzeln β_3, die Wurzeln α_3 mit den Wurzeln γ_2, die Wurzeln β_2 mit den Wurzeln γ_3, endlich die Wurzeln α_4 mit den Wurzeln β_4 wie γ_4 übereinstimmen werden.

Wir suchen nun zunächst denjenigen Bestandteil der Summe (110), welcher die ψ-Funktionen mit den Argumenten $\alpha^{-1}e^{-t}$ umfaßt. — Ist erstens α ein α_1, also von jedem β, γ verschieden, so lehrt die Formel (106a) sowie die analog mit (106b) für $S_s(\alpha, \gamma, \gamma)$ gebildete Formel, daß, gleichviel ob β, γ verschieden voneinander sind oder nicht, einem solchen α_1 sämtliche Funktionen $\psi_{\alpha_1, \beta, \gamma}(\alpha_1^{-1}e^{-t})$ zukommen, ihm also der Bestandteil

$$\text{(a)} \qquad K_{-1}\left(\sum_{\beta, \gamma}\psi_{\alpha_1, \beta, \gamma}(\alpha_1^{-1}e^{-t})\right)$$

entspricht. — Ist α ein α_2, also von jedem γ verschieden, so kommt einem solchen α_2 nach (106a) sowie nach der Formel für $S_s(\alpha, \gamma, \gamma)$ jede Funktion $\psi_{\alpha_2, \beta, \gamma}(\alpha_2^{-1}e^{-t})$ zu, in welcher β von α_2 verschieden ist, dagegen nach (106b) nur jede Funktion $\frac{1}{2}\psi_{\alpha_2, \beta, \gamma}(\alpha_2^{-1}e^{-t})$, wenn $\beta = \alpha_2$. Demnach entspricht dieser Wurzel α_2 der Bestandteil

$$\text{(b)} \quad K_{-1}\left[\sum_{\beta, \gamma}\psi_{\alpha_2, \beta, \gamma}(\alpha_2^{-1}e^{-t}) - \frac{1}{2}\sum_{\gamma}\psi_{\alpha_2, \alpha_2, \gamma}(\alpha_2^{-1}e^{-t})\right]$$

der Summe (110). In gleicher Weise entspricht jeder Wurzel α_3 der Bestandteil

$$\text{(c)} \quad K_{-1}\left[\sum_{\beta, \gamma}\psi_{\alpha_3, \beta, \gamma}(\alpha_3^{-1}e^{-t}) - \frac{1}{2}\sum_{\beta}\psi_{\alpha_3, \beta, \alpha_3}(\alpha_3^{-1}e^{-t})\right].$$

Ist endlich α ein α_4, so kommt einem solchen α_4 jede Funktion $\psi_{\alpha_4, \beta, \gamma}(\alpha_4^{-1}e^{-t})$ zu, gleichviel ob β, γ gleich oder verschieden sind, wenn nur keins von beiden gleich α_4 ist, ferner nach (106b) jede Funktion $\frac{1}{2}\psi_{\alpha_4, \alpha_4, \gamma}(\alpha_4^{-1}e^{-t})$, wenn nur γ von α_4 verschieden ist, sowie jede Funktion $\frac{1}{2}\psi_{\alpha_4, \beta, \alpha_4}(\alpha_4^{-1}e^{-t})$, wenn nur β von α_4 verschieden ist, endlich die Funktion $\frac{1}{3}\psi_{\alpha_4, \alpha_4, \alpha_4}(\alpha_4^{-1}e^{-t})$. Im ganzen ist also der α_4 entsprechende Bestandteil der Summe (110) gleich dem Koeffizienten von $\frac{1}{t}$ im Ausdrucke

$$\text{(d)} \quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\beta, \gamma}\psi_{\alpha_4, \beta, \gamma}(\alpha_4^{-1}e^{-t}) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\sum_{\gamma}\psi_{\alpha_4, \alpha_4, \gamma}(\alpha_4^{-1}e^{-t}) + \frac{1}{2}\psi_{\alpha_4, \alpha_4, \alpha_4}(\alpha_4^{-1}e^{-t}) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\sum_{\beta}\psi_{\alpha_4, \beta, \alpha_4}(\alpha_4^{-1}e^{-t}) + \frac{1}{2}\psi_{\alpha_4, \alpha_4, \alpha_4}(\alpha_4^{-1}e^{-t}) \\ &\qquad\qquad - \frac{2}{3}\psi_{\alpha_4, \alpha_4, \alpha_4}(\alpha_4^{-1}e^{-t}) \\ = &\sum_{\beta, \gamma}\psi_{\alpha_4, \beta, \gamma}(\alpha_4^{-1}e^{-t}) - \frac{1}{2}\sum_{\beta}{}_{\alpha_4, \beta, \alpha_4}(\alpha_4^{-1}e^{-t}) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\sum_{\gamma}\psi_{\alpha_4, \alpha_4, \gamma}(\alpha_4^{-1}e^{-t}) + \frac{1}{3}\psi_{\alpha_4, \alpha_4, \alpha_4}(\alpha_4^{-1}e^{-t}). \end{aligned}\right.$$

Entsprechende vier Bestandteile der Summe ergeben sich, wenn man die auf die Argumente $\beta^{-1}e^{-t}$ und $\gamma^{-1}e^{-t}$ bezüglichen ψ-Funktionen zusammenfaßt.

14. Wir drücken nun diese einzelnen Bestandteile passender aus. Da nach dem Ausdrucke (103) für die Funktion $\psi_{\alpha,\beta,\gamma}(x)$ allgemein

$$\psi_{\alpha,\beta,\gamma}(\alpha^{-1}e^{-t}) = \frac{\alpha^s e^{st}}{(1-e^{-t})\left(1-\frac{\beta}{\alpha}e^{-t}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}e^{-t}\right)}$$

geschrieben werden darf, findet sich mit Hilfe der Beziehung (100) zunächst der Bestandteil (a)

$$K_{-1} \cdot \sum_{\beta,\gamma} \psi_{\alpha_1,\beta,\gamma}(\alpha_1^{-1}e^{-t}) = K_{-1} \cdot \frac{\alpha_1^s e^{st} \cdot bc}{1-e^{-t} \cdot 1-(\alpha_1 e^t)^{-b} \cdot 1-(\alpha_1 e^t)^{-c}},$$

wofür offenbar auch geschrieben werden kann

$$K_{-1} \cdot \frac{\alpha_1^s e^{st} \cdot abc}{1-(\alpha_1 e^t)^{-a} \cdot 1-(\alpha_1 e^t)^{-b} \cdot 1-(\alpha_1 e^t)^{-c}}.$$

Die sämtlichen Wurzeln α_1 liefern also zusammen zur Summe (110) einen Bestandteil gleich der über alle diese Wurzeln bezogenen Summe

$$(\alpha_1) \qquad K_{-1} \cdot \sum_{\alpha_1} \frac{\alpha_1^s e^{st} \cdot abc}{1-(\alpha_1 e^t)^{-a} \cdot 1-(\alpha_1 e^t)^{-b} \cdot 1-(\alpha_1 e^t)^{-c}}.$$

Aus gleicher Erwägung aber erhält man aus den Wurzeln β_1, γ_1 resp. die beiden Bestandteile:

$$(\beta_1) \qquad K_{-1} \cdot \sum_{\beta_1} \frac{\beta_1^s \cdot e^{st} \cdot abc}{1-(\beta_1 e^t)^{-a} \cdot 1-(\beta_1 e^t)^{-b} \cdot 1-(\beta_1 e^t)^{-c}}$$

$$(\gamma_1) \qquad K_{-1} \cdot \sum_{\gamma_1} \frac{\gamma_1^s e^{st} \cdot abc}{1-(\gamma_1 e^t)^{-a} \cdot 1-(\gamma_1 e^t)^{-b} \cdot 1-(\gamma_1 e^t)^{-c}}.$$

Ferner aber findet sich

$$K_{-1} \cdot \sum_{\beta,\gamma} \psi_{\alpha_2,\beta,\gamma}(\alpha_2^{-1}e^{-t}) = K_{-1} \cdot \frac{\alpha_2^s e^{st} \cdot bc}{1-e^{-t} \cdot 1-e^{-bt} \cdot 1-(\alpha_2 e^t)^{-c}}$$

und

$$\frac{1}{2} \cdot K_{-1} \cdot \sum_{\gamma} \psi_{\alpha_2,\alpha_2,\gamma}(\alpha_2^{-1}e^{-t}) = \frac{1}{2} \cdot K_{-1} \cdot \frac{\alpha_2^s e^{st} \cdot c}{(1-e^{-t})^2 \cdot 1-(\alpha_2 e^t)^{-c}},$$

also der Bestandteil (b) gleich

$$K_{-1}\left(\frac{\alpha_2^s e^{st}}{1-(\alpha_2 e^t)^{-c}} \cdot c\left(\frac{b}{1-e^{-t} \cdot 1-e^{-bt}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-e^{-t})^2}\right)\right).$$

Denkt man sich hier den ersten Faktor in eine Potenzreihe entwickelt gleich

$$(1 + Ct + \cdots)\alpha_2^s,$$

so findet sich leicht der gedachte Koeffizient von $\frac{1}{t}$ gleich

$$\frac{\alpha_2^s(C+b)c}{2}.$$

Nun entspricht aber jeder Wurzel α_2 eine ihr gleiche Wurzel β_3 und dieser in analoger Weise der Bestandteil

$$\frac{\beta_3^s(C+a)c}{2},$$

ihnen beiden zusammengenommen also der Bestandteil

$$\alpha_2^s\left(C + \frac{a+b}{2}\right)c,$$

der, wie einfach zu übersehen ist, gleich

$$K_{-1} \cdot \frac{\alpha_2^s e^{st} \cdot abc}{1-(\alpha_2 \cdot e^t)^{-a} \cdot 1-(\alpha_2 \cdot e^t)^{-b} \cdot 1-(\alpha_2 \cdot e^t)^{-c}}$$

ist. Alle Wurzeln α_2 oder β_3 zusammen liefern daher für die Summe (110) den Bestandteil

$$(\alpha_2) \qquad K_{-1} \cdot \sum_{\alpha_2} \frac{\alpha_2^s e^{st} \cdot abc}{1-(\alpha_2 e^t)^{-a} \cdot 1-(\alpha_2 e^t)^{-b} \cdot 1-(\alpha_2 e^t)^{-c}}.$$

Nunmehr geben ebenso die Wurzeln α_3 oder γ_2 zusammen den Ausdruck

$$(\alpha_3) \qquad K_{-1} \cdot \sum_{\alpha_3} \frac{\alpha_3^s e^{st} \cdot abc}{1-(\alpha_3 e^t)^{-a} \cdot 1-(\alpha_3 e^t)^{-b} \cdot 1-(\alpha_3 e^t)^{-c}},$$

desgleichen alle Wurzeln β_2 oder γ_3 zusammen den Bestandteil

$$(\beta_2) \qquad K_{-1} \cdot \sum_{\beta_2} \frac{\beta_2^s e^{st} \cdot abc}{1-(\beta_2 e^t)^{-a} \cdot 1-(\beta_2 e^t)^{-b} \cdot 1-(\beta_2 e^t)^{-c}}.$$

Betrachten wir endlich die Bestandteile, welche den Wurzeln α_4 oder β_4 oder γ_4 entsprechen. Der auf eine solche α_4 bezügliche Teil (d) nimmt zunächst die Form an:

$$(111) \qquad K_{-1}\left[\frac{\alpha_4^s e^{st} \cdot bc}{1-e^{-t} \cdot 1-e^{-bt} \cdot 1-e^{-ct}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_4^s e^{st} \cdot b}{(1-e^{-t})^2 \cdot 1-e^{-bt}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_4^s e^{st} \cdot c}{(1-e^{-t})^2 \cdot 1-e^{-ct}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha_4^s e^{st}}{(1-e^{-t})^3}\right].$$

Man beachte nun die allgemeine Formel

$$(112) \qquad K_{-1}\left(\frac{e^{st}}{1-e^{-at} \cdot 1-e^{-bt} \cdot 1-e^{-ct}}\right) = \frac{1}{abc}\left(\frac{s^2}{2} + \frac{s(a+b+c)}{2} + \frac{ab+bc+ca}{4} + \frac{a^2+b^2+c^2}{12}\right),$$

welche leicht durch Entwicklung der Funktion nach Potenzen von t sich herausstellt. Werden hiernach die einzelnen Glieder des vorigen Ausdrucks gebildet, so geht nach Zusammenziehung derselben für den Ausdruck (111) folgender Wert hervor:

$$\alpha_4^s\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{s^2}{2}+s\cdot\frac{b+c}{4}+\frac{bc}{4}+\frac{b^2+c^2}{24}\right).$$

Vereinigt man diesen Bestandteil mit den auf die gleiche Wurzel β_4 oder γ_4 bezüglichen Bestandteilen

$$\beta_4^s\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{s^2}{2}+s\cdot\frac{c+a}{4}+\frac{ca}{4}+\frac{c^2+a^2}{24}\right)$$

$$\gamma_4^s\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{s^2}{2}+s\cdot\frac{a+b}{4}+\frac{ab}{4}+\frac{a^2+b^2}{24}\right),$$

so erhält man zusammengenommen

$$\alpha_4^s\left(\frac{s^2}{2}+s\cdot\frac{a+b+c}{2}+\frac{ab+bc+ca}{4}+\frac{a^2+b^2+c^2}{12}\right),$$

d. i. nach (112)

$$K_{-1}\left(\frac{\alpha_4^s e^{st}\cdot abc}{1-e^{-at}\cdot 1-e^{-bt}\cdot 1-e^{-ct}}\right)$$

$$=K_{-1}\left(\frac{\alpha_4^s e^{st}\cdot abc}{1-(\alpha_4 e^t)^{-a}\cdot 1-(\alpha_4 e^t)^{-b}\cdot 1-(\alpha_4 e^t)^{-c}}\right).$$

Der Bestandteil der Summe (110), welcher von den Wurzeln α_4 oder β_4 oder γ_4 herrührt, ist also die auf alle diese Wurzeln bezogene Summe

$$(\alpha_4) \qquad K_{-1}\cdot\sum_{\alpha_4}\frac{\alpha_4^s e^{st}\cdot abc}{1-(\alpha_4 e^t)^{-a}\cdot 1-(\alpha_4 e^t)^{-b}\cdot 1-(\alpha_4 e^t)^{-c}}.$$

Demnach ist endlich die Summe (110) gleich der Summe der Ausdrücke (α_1), (β_1), (γ_1), (α_2), (α_3), (β_2), (α_4), sämtlich von übereinstimmender Form. Man beachte aber, daß die Wurzeln α_1, β_1, γ_1, α_2, α_3, β_2, α_4 die sämtlichen untereinander verschiedenen Wurzeln der Gleichungen (102) sind. Bezeichnet also ω jede dieser voneinander verschiedenen Wurzeln, so kann man einfach setzen

$$(113) \quad \sum S_s(\alpha,\beta,\gamma) = K_{-1}\sum_{\omega}\frac{\omega^s e^{st}\cdot abc}{1-(\omega e^t)^{-a}\cdot 1-(\omega e^t)^{-b}\cdot 1-(\omega e^t)^{-c}}.$$

Bekanntlich sind jedoch die sämtlichen Wurzeln einer Gleichung $x^a=1$ identisch mit den p r i m i t i v e n Wurzeln aller Gleichungen $x^d=1$, deren Grad ein Teiler von a ist; wenn daher d', d'', d''', ... alle verschiedenen in den Elementen a, b, c aufgehenden Teiler be-

deuten, so ist die Gesamtheit der Wurzeln ω identisch mit der Gesamtheit der primitiven Wurzeln aller Gleichungen

$$x^{d'} = 1, \quad x^{d''} = 1, \quad x^{d'''} = 1, \ldots$$

Faßt man dann in (113) immer diejenigen Glieder zusammen, welche den primitiven Wurzeln ϱ_d je einer dieser Gleichungen

$$x^d = 1$$

entsprechen, so gewinnt man als Schlußresultat der ganzen Untersuchung die Formel:

(114) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{s}{\overline{\overline{a, b, c}}} = \sum_d W_d, \\ &\text{worin} \\ &W_d = K_{-1} \cdot \sum_{\varrho_d} \frac{(\varrho_d)^s e^{st}}{1-(\varrho_d e^t)^{-a} \cdot 1-(\varrho_d e^t)^{-b} \cdot 1-(\varrho_d e^t)^{-c}}. \end{aligned}\right.$$

Diese für den Fall von drei Elementen a, b, c durchgeführte Untersuchung kann offenbar entsprechend nicht nur auch für zwei Elemente a, b, sondern auch für den Fall einer beliebigen Anzahl von Elementen $a, b, \ldots, l$ angestellt werden und führt dann zu dem allgemeinen von *Sylvester* ausgesprochenen Satze:

Der Denumerant $\frac{s}{\overline{\overline{a, b, \ldots, l}}}$ ist gleich einer Summe:

(115) $$\frac{s}{\overline{\overline{a, b, \ldots, l}}} = \sum_d W_d,$$

welche sich auf alle verschiedenen in den Elementen $a, b, \ldots, l$ aufgehenden Zahlen d erstreckt, und in welcher das allgemeine Glied

(115a) $$W_d = K_{-1} \cdot \sum_{\varrho_d} \frac{(\varrho_d)^s e^{st}}{1-(\varrho_d e^t)^{-a} \cdot 1-(\varrho_d e^t)^{-b} \cdots 1-(\varrho_d e^t)^{-l}}$$

zu setzen und die hierin auftretende Summation auf alle primitiven Wurzeln ϱ_d der Gleichung $x^d = 1$ zu beziehen ist.

Sylvester nennt jeden dieser Ausdrücke W_d eine „Welle (Wave)" des Denumeranten.

Wählt man in diesen Formeln für die Elemente $a, b, \ldots, l$ insbesondere die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$, so liefern sie den allgemeinen, in Nr. 8 verlangten Ausdruck für die Anzahl

$$\gamma_{n,s} = \frac{s}{\overline{\overline{1, 2, 3, \ldots, n}}}.$$

In diesem Falle nimmt das Zeichen d gleichfalls die sämtlichen Werte

1, 2, 3, ..., n an und die Anzahl der Wellen des Denumeranten $\gamma_{n,s}$ ist daher gleich n.[1])

15. Die Vergleichung der Formel (115) mit der nach *Cayley* hergeleiteten Gleichung (95) legt die Vermutung nahe, daß jede *Sylvester*sche Welle mit dem auf den entsprechenden Zirkulator bezüglichen Bestandteile der dortigen Summe identisch ist. Dies bestätigt sich in der Tat, wenn man die einzelnen Wellen wirklich berechnet. Zu diesem Zwecke ist die Entwicklung von $(\varrho_d)^s \cdot e^{st}$, nämlich

$$(116) \qquad (\varrho_d)^s \cdot e^{st} = (\varrho_d)^s \cdot \left[1 + \frac{st}{1} + \frac{s^2t^2}{1\cdot 2} + \frac{s^3t^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right]$$

mit den Entwicklungen der einzelnen Faktoren

$$\frac{1}{1-\varrho_d^{-a}\cdot e^{-at}},$$

soweit zur Ermittlung des Koeffizienten von $\frac{1}{t}$ erforderlich ist, zu multiplizieren. Ist in einem solchen Faktor ϱ_d^{-a} verschieden von 1, so bleibt der Faktor für $t = 0$ endlich und gestattet eine Entwicklung nach den positiven Potenzen von t von der Form

$$(117) \qquad \frac{1}{1-\varrho_d^{-a}\cdot e^{-at}} = c_0 + c_1 at + c_2\cdot a^2t^2 + c_3\cdot a^3t^3 + \cdots$$

Ist dagegen $\varrho_d^{-a} = 1$, so wird der Faktor

$$(118) \qquad \frac{1}{1-e^{-at}} = \frac{1}{at} + \frac{1}{2} + \frac{B_1}{1\cdot 2}at + \frac{B_2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^3t^3 + \cdots,$$

worin die B_i die *Bernoulli*schen Zahlen bedeuten. Hat man diese verschiedenen Entwicklungen aufgestellt, so findet sich durch ihre Multiplikation der gesuchte Koeffizient von $\frac{1}{t}$.

In dem besonderen Falle des stets auftretenden Teilers $d = 1$, d. h. zur Auffindung der Welle W_1 schreibe man das dann einzig vorhandene Glied der Summe in der Form:

$$(119) \qquad e^{st - \Sigma \log(1-e^{-at})}.$$

Da

$$\frac{d}{dt}\log(1-e^{-at}) = a\left(\frac{1}{1-e^{-at}} - 1\right)$$

---

1) Eine einfache Herleitung der *Sylvester*schen Formel (115) mittels des Residuenkalküls von *Cauchy* s. bei *Brioschi*, Ann. di scienze mat. e fisiche 8, 1857, S. 5. Vgl. auch *S. Roberts*, Quart. Journ. 4, 1861, S. 155. Einen andern Ausdruck für den Denumeranten $\dfrac{s}{1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n}$, welcher von *Faà di Bruno* herrührt, bringen wir im folgenden Kapitel Nr. 7, (47).

ist, so ergibt sich durch Einsetzen des Ausdrucks (118) und nachfolgende Integration die Gleichung

$$\log(1-e^{-at}) = C + \log t - \frac{at}{2} + \frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{a^2t^2}{2} + \frac{B_2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{a^4t^4}{4} + \cdots,$$

also, da für $t=0$

$$\log\left(\frac{1-e^{-at}}{t}\right)_{t=0} = \log a$$

wird,

$$\log(1-e^{-at}) = \log at - \frac{at}{2} + \frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{a^2t^2}{2} + \frac{B_2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{a^4t^4}{4} + \cdots$$

Hiernach wird, wenn man die Anzahl der Elemente $a, b, \ldots, l$ wieder ε nennt und zur Abkürzung

$$s_i = a^i + b^i + \cdots + l^i \tag{120}$$

setzt,

$$\sum\log(1-e^{-at}) = \log ab\cdots l + \varepsilon\cdot\log t - \frac{t}{2}\cdot s_1$$
$$+ \frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{s_2}{2}t^2 + \frac{B_2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{s_4}{4}t^4 + \cdots,$$

also der Ausdruck (119) gleich

$$\frac{1}{ab\ldots l}\cdot t^{-\varepsilon}\cdot e^{\left(s+\frac{1}{2}s_1\right)t-\frac{B_1}{2.2!}s_2t^2-\frac{B_2}{4\cdot 4!}s_4t^4\cdots}.$$

Demzufolge ist W_1 der Koeffizient von t^{-1} in der Entwicklung dieses Ausdrucks oder, was dasselbe sagt,

$$W_1 = \text{Koeff. von } t^{\varepsilon-1} \text{ in}$$

$$\frac{1}{a.\,b.\,\ldots.\,l}\cdot e^{s_0t-\frac{B_1}{2\cdot 2!}s_2t^2-\frac{B_2}{4\cdot 4!}s_4t^4-\cdots}, \tag{121}$$

wo zur Vereinfachung $s+\frac{1}{2}s_1 = s_0$ gesetzt worden ist. Denkt man sich hier für die Exponentialgröße ihre Entwicklung gesetzt, so leuchtet unschwer ein, daß der Koeffizient von $t^{\varepsilon-1}$ die Zahl s_0 und folglich auch die Zahl s nur in der $\varepsilon-1^{\text{ten}}$ Potenz höchstens enthalten kann, daß also W_1 einer ganzen Funktion von s vom Grade $\varepsilon-1$ mit festen Koeffizienten gleich sein wird, wie nach der Formel von *Cayley* auch das von den Zirkulatoren freie Glied derselben es ist.

Sind nicht alle Elemente $a, b, \ldots, l$ ungerade, so tritt der Divisor $d=2$ auf; sind dann $g, g', \ldots$ die geraden Elemente und η ihre Anzahl, $u, u', \ldots$ die ungeraden Elemente, so nimmt die Welle W_2, da nur eine primitive Wurzel $\varrho_2 = -1$ vorhanden ist, die Gestalt an:

$$W_2 = K_{-1}\left(\frac{(-1)^s e^{st}}{\prod(1-e^{-gt})\cdot\prod(1+e^{-ut})}\right). \tag{122}$$

Schreibt man also

$$\prod \frac{1}{1+e^{-ut}} = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \cdots$$

und bedenkt, daß — analog wie bei W_1 —

$$(123) \qquad \frac{e^{st}}{\prod\left(1-e^{-gt}\right)} = \frac{1}{gg'\ldots} \cdot t^{-\eta} \cdot e^{\left(s+\frac{1}{2}\sigma_1\right)t - \frac{B_1}{2\cdot 2!}\sigma_2 t^2 - \cdots}$$

gesetzt werden kann, wenn man unter σ_i die Summe $g^i + g'^i + \cdots$ versteht, so ergibt sich schließlich

$$(124) \qquad \begin{cases} W_2 = \text{Koeff. von } t^{\eta-1} \text{ in} \\ \dfrac{(-1)^s}{gg'\ldots} \cdot e^{\sigma_0 t - \frac{B_1}{2\cdot 2!}\sigma_2 t^2 - \cdots} \cdot (C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots), \end{cases}$$

wo wieder zur Abkürzung σ_0 für $s + \frac{1}{2}\sigma_1$ eingeführt worden ist.

Suchen wir hiernach z. B. den Denumeranten

$$\frac{s}{1,\ 2,\ 3,\ 4}.$$

Hier erhält der Teiler d die Werte 1, 2, 3, 4 und demnach sind vier Wellen W_1, W_2, W_3, W_4 zu berechnen. Zunächst ist

$$\varepsilon = 4, \quad \eta = 2; \quad s_1 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \quad s_2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30,$$
$$\sigma_1 = 2 + 4 = 6.$$

Also wird nach (121) W_1 gleich dem Koeffizienten von t^3 im Ausdrucke

$$\frac{1}{24} \cdot e^{(s+5)t - \frac{30}{24}t^2 - \cdots}$$

$$= \frac{1}{24}\left[1 + \left((s+5)t - \frac{30}{24}t^2 + \cdots\right) + \frac{1}{2}\left((s+5)t - \frac{30}{24}t^2\right)^2 + \frac{1}{6}(s+5)^3 t^3 \cdots\right],$$

d. i.

$$(125) \qquad \begin{cases} W_1 = \dfrac{1}{24}\left(-(s+5)\dfrac{30}{24} + \dfrac{1}{6}(s+5)^3\right) \\ \quad\; = \dfrac{1}{288}(2s^3 + 30s^2 + 135s + 175). \end{cases}$$

Ferner ist nach (124) W_2 gleich dem Koeffizienten von t im Ausdrucke

$$\frac{(-1)^s}{8} \cdot e^{(s+3)t} \cdot (C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots),$$

wo die Klammer die Entwicklung des Quotienten

$$\frac{1}{\left(1+e^{-t}\right)\left(1+e^{-3t}\right)}$$

vorstellt, welche leicht gleich

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-1}\cdot\left(1-\frac{3t}{2}\right)^{-1}\cdots$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{t}{2}+\cdots\right)\left(1+\frac{3t}{2}+\cdots\right)=\frac{1}{4}(1+2t+\cdots)\cdots$$

gefunden wird. Da nun

$$e^{(s+3)t}=1+(s+3)t+\cdots$$

ist, ergibt sich schließlich

$$W_2=\frac{(-1)^s}{32}(s+5)=\frac{(-1)^s}{288}(9s+45),$$

oder, da $(-1)^s$ gleich $+1$ oder -1, je nachdem s durch 2 teilbar ist oder nicht ist,

(126) $$W_2=\frac{1}{288}(9s+45)\cdot(1,\ -1)\,\mathrm{clr}\cdot 2_s.$$

Nunmehr ist, unter ϱ jede der beiden primitiven dritten Einheitswurzeln d. i. jede Wurzel der Gleichung

(127) $$\varrho^2+\varrho+1=0$$

verstanden, die auch die Gleichung $\varrho^3=1$ erfüllt,

$$W_3=K_{-1}\cdot\sum_{\varrho}\frac{\varrho^s e^{st}}{1-\varrho^2 e^{-t}\cdot 1-\varrho e^{-2t}\cdot 1-e^{-3t}\cdot 1-\varrho^2 e^{-4t}}.$$

Der unter dem Summenzeichen stehende Ausdruck gibt, nach Potenzen von t entwickelt, den folgenden:

$$\frac{\varrho^s}{3t(1-\varrho^2)^2(1-\varrho)}\cdot(1+st+\cdots)\left(1-\frac{\varrho^2}{1-\varrho^2}t+\cdots\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1-\frac{\varrho}{1-\varrho}\cdot 2t+\cdots\right)\left(1+\frac{3t}{2}+\cdots\right)\left(1-\frac{\varrho^2}{1-\varrho^2}\cdot 4t+\cdots\right)$$
$$=\frac{\varrho^s}{3t(1-\varrho^2)^2(1-\varrho)}\cdot(1+c_1t+c_2t^2+\cdots),$$

für welchen der Koeffizient von $\frac{1}{t}$ gleich $\frac{\varrho^s}{3(1-\varrho^2)^2\cdot(1-\varrho)}$ ist. Bezeichnet also ϱ' die zweite Wurzel der Gleichung (127), so kommt

$$W_3=\frac{1}{3}\left(\frac{\varrho^s}{(1-\varrho)(1-\varrho^2)^2}+\frac{\varrho'^s}{(1-\varrho')(1-\varrho'^2)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\varrho^s-\varrho^{s+1}}{(1-\varrho)^2(1-\varrho^2)^2}+\frac{\varrho'^s-\varrho'^{s+1}}{(1-\varrho')^2\cdot(1-\varrho'^2)^2}\right)$$

oder, da

$$(1-\varrho)(1-\varrho^2)=(1-\varrho')(1-\varrho'^2)=3$$

ist, einfacher

$$W_3=\frac{1}{9}\left(\frac{1+\varrho^s+\varrho'^s}{3}-\frac{1+\varrho^{s+1}+\varrho'^{s+1}}{3}\right).$$

Nach Anfang von Nr. 10 kann aber der Ausdruck

$$\frac{1+\varrho^i+\varrho'^i}{3}$$

für den im Zirkulator auftretenden Wert $\mathfrak{Z}_i$ gewählt werden, so daß zunächst

$$W_3 = \frac{1}{9}(\mathfrak{Z}_s - \mathfrak{Z}_{s+1})$$

oder, da, wenn $s \equiv 0$ (mod. 3) ist, $\mathfrak{Z}_s = 1,\ \mathfrak{Z}_{s+1} = 0$

„ $s \equiv 1$ „ „ $\mathfrak{Z}_s = 0,\ \mathfrak{Z}_{s+1} = 0$

„ $s \equiv 2$ „ „ $\mathfrak{Z}_s = 0,\ \mathfrak{Z}_{s+1} = 1$

zu setzen ist,

$$(128)\quad W_3 = \frac{1}{9}\cdot(1,\ 0,\ -1)\,\mathrm{clr}\cdot\mathfrak{Z}_s = \frac{1}{288}\cdot 32\cdot(1,\ 0,\ -1)\,\mathrm{clr}\cdot\mathfrak{Z}_s.$$

Endlich sind für $d = 4$ unter ϱ_d die beiden primitiven vierten Einheitswurzeln $i,\ -i$ zu verstehen, also W_4 gleich der Summe aus

$$K_{-1}\cdot\frac{i^s e^{st}}{(1+ie^{-t})(1+e^{-2t})(1-ie^{-3t})(1-e^{-4t})}$$

und dem konjugiert imaginären Werte. Hier geht durch die Entwicklung nach Potenzen von t ähnlich wie bei W_3 der Wert

$$W_4 = \frac{i^s}{4\cdot 2(1+i)(1-i)} + \frac{(-i)^s}{4\cdot 2(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{i^s(1+(-1)^s)}{16}$$

hervor. Da aber für $s \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3$ (mod. 4) sich

$$i^s(1+(-1)^s) = 2,\ 0,\ -2,\ 0$$

resp. findet, darf man auch schreiben

$$(129)\quad W_4 = \frac{1}{8}\cdot(1,\ 0,\ -1,\ 0)\ \mathrm{clr}\cdot 4_s = \frac{1}{288}\cdot 36\cdot(1,\ 0,\ -1,\ 0)\ \mathrm{clr}\cdot 4_s.$$

Addiert man nun die vier in (125), (126), (128), (129) gefundenen Werte der Wellen W_1, W_2, W_3, W_4, so erhält man genau denselben Ausdruck des Denumeranten $\frac{s}{1,\ 2,\ 3,\ 4}$, wie wir ihn als von *Cayley* aus seiner Formel gewonnen am Schlusse von Nr. 12 mitgeteilt haben.[1])

1) Eigentlich lösen auch die Formeln von *Cayley* und *Sylvester* noch nicht in erwünschter Weise die Aufgabe, den Denumeranten $\frac{s}{a,\ b,\ \ldots\ l}$ zu bestimmen, sondern geben nur eine allgemeine Regel, um ihn für irgend gegebene Elemente $a,\ b,\ \ldots\ l$ als Funktion von s ausdrücken zu können. Die so gefundenen Ausdrücke für den Denumeranten lassen erkennen, daß er eine ganze Funktion von s ist, in deren Koeffizienten die Zirkulatoren, d. h. gewisse Divisionsreste (mod. s) eingehen. In neuerer Zeit hat *H. Wolf* (Inaug.-Dissert., Halle 1899) versucht, rein arithmetisch, nämlich von einem allgemeinen Zerfällungssatze aus, den er mittels n-dimensionaler Raumbetrachtungen begründet, für den Denumeranten $\gamma_{n,s}$ den allgemeinen Ausdruck als eine Funktion der angegebenen Art zu finden. Er gibt für die Fälle $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ Ausdrücke, welche leicht auf die von *Cayley* gegebenen zurückkommen (vgl. dazu übrigens *Sylvester*, Amer. Journ. of

16. Wir schließen diese Untersuchungen mit einer sehr interessanten Folgerung ab, welche *Sylvester* aus seiner Formel gezogen hat (s. Phil. Magaz. 16 (1858), S. 369).

Zur Abkürzung bezeichnen wir dabei den Denumeranten

$$=\frac{s}{a,\ b,\ c,\ \ldots\ l},$$

d. i. die Anzahl der Auflösungen der Gleichung

$$ax + by + cz + \cdots + lu = s \tag{130}$$

in nicht negativen ganzen Zahlen $x, y, z, \ldots u$ einfach mit N, und $(\omega e^t)^{-n}$ mit $\lambda(n)$. Dann ist nach *Sylvesters* Formeln (115), (115a)

$$N = K_{-1} \cdot \sum \frac{\lambda(-s)}{1-\lambda(a) \cdot 1-\lambda(b) \cdot 1-\lambda(c) \ldots}, \tag{131}$$

diese Summe auf alle untereinander verschiedenen Wurzeln ω der Gleichungen

$$x^a = 1,\ x^b = 1,\ x^c = 1,\ \ldots$$

erstreckt. Schreibt man aber statt der Gleichung (130) diese andere:

$$ax' + ax'' + by + cz + \cdots + lu = s, \tag{132}$$

für welche der zugehörige Denumerant

$$N' = K_{-1} \cdot \sum \frac{\lambda(-s)}{(1-\lambda(a))^2 \cdot 1-\lambda(b) \cdot 1-\lambda(c) \ldots} \tag{133}$$

sein wird, so entsprechen jedem der in den N Auflösungen der ersteren Gleichung auftretenden Werte von x genau $x+1$ Systeme x', x'', da die Gleichung $x = x' + x''$ ebensoviele Auflösungen zuläßt. Demnach muß

$$N' = \sum x + N \tag{134}$$

sein, wo die Summation über alle jene Werte x zu beziehen ist.

Math. 5, S. 79; *Zuchristian,* Monatsh. f. Math. u. Phys. 4, S. 185; *Glösel,* ebend. 7, S. 132 u. 290), zeigt aber weiter nur, wie die Koeffizienten des Ausdrucks $\gamma_{n,s}$ als lineare Funktionen derjenigen des Ausdrucks $\gamma_{n-1,s}$ bestimmbar sind, so daß in rekurrenter Weise aus $\gamma_{n-1,s}$ auch $\gamma_{n,s}$ gefunden werden kann. So gewinnt er schließlich $\gamma_{n,s}$ auch für $n=6$ (vgl. dazu *Cayley,* London Roy. Soc. Trans. 146 I, S. 127; 148, S. 47, sowie *v. Sterneck,* Arch. f. Math. u. Phys. 3. Reihe 3, S. 195), der allgemeine Funktionsausdruck des Denumeranten fehlt aber auch hier. Andererseits hat schon *K. Weihrauch* (Ztschr. f. Math. u. Phys. 20, S. 97 und 112; 22, S. 234) rein arithmetisch einen allgemeinen Ausdruck für die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$ax + by + \cdots + lu = s$$

in positiven ganzen Zahlen aufgesucht, welcher von der Art der Formel (73) ist und trotz seiner natürlichen Kompliziertheit der Eleganz nicht entbehrt. Aber er schließt ihn nur durch Induktion aus den beiden einfachsten Fällen von 2 und 3 Elementen, ohne dieselbe als für beliebig viel Elemente zutreffend zu bestätigen.

Aus (131) und (133) ergibt sich daher die Gleichung:

$$\sum x = K_{-1} \cdot \sum \frac{\lambda(a) \cdot \lambda(-s)}{(1-\lambda(a))^2 \cdot 1-\lambda(b) \cdot 1-\lambda(c) \ldots}. \tag{135}$$

Wird dagegen statt der Gleichung (130) die folgende betrachtet:

$$ax' + ax'' + ax''' + by + \cdots + lu = s,$$

deren Denumerant

$$N'' = K_{-1} \cdot \sum \frac{\lambda(-s)}{(1-\lambda(a))^3 \cdot 1-\lambda(b) \cdot 1-\lambda(c) \ldots} \tag{136}$$

ist, so entsprechen jedem der gedachten Werte von x genau

$$\frac{(x+1)(x+2)}{2} = \frac{x^2+3x+2}{2}$$

Systeme von Werten x', x'', x''', da die Gleichung $x = x' + x'' + x'''$ ebensoviele Lösungen verstattet. Man findet demnach

$$N'' = \sum \frac{x^2+3x+2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum x^2 + \frac{3}{2} \cdot \sum x + N,$$

also mit Beachtung der Gleichungen (131), (135), (136) ohne Mühe die folgende:

$$\sum x^2 = K_{-1} \cdot \sum \frac{\lambda(a) \cdot \big(1+\lambda(a)\big) \cdot \lambda(-s)}{(1-\lambda(a))^3 \cdot 1-\lambda(b) \cdot 1-\lambda(c) \ldots}. \tag{137}$$

So fortfahrend erlangt man die allgemeine Formel:

$$\sum x^\alpha = K_{-1} \cdot \sum \frac{F_\alpha\big(\lambda(a)\big) \cdot \lambda(-s)}{(1-\lambda(a))^{\alpha+1} \cdot 1-\lambda(b) \cdot 1-\lambda(c) \ldots}, \tag{138}$$

worin $F_\alpha\big(\lambda(a)\big)$ eine ganze Funktion von $\lambda(a)$ vom Grade α bedeutet.

Nunmehr betrachten wir neben der Gleichung (130) die andere:

$$ax + by' + by'' + cz + \cdots + lu = s.$$

Da jeder der Werte von x jetzt nicht einer Lösung y von (130), sondern $y+1$ Lösungen y', y'' der neuen Gleichung zugeordnet ist, so wird die mit (138) korrespondierende Summe jetzt

$$\sum x^\alpha \cdot (y+1) = K_{-1} \cdot \sum \frac{F_\alpha\big(\lambda(a)\big) \cdot \lambda(-s)}{(1-\lambda(a))^{\alpha+1} \cdot (1-\lambda(b))^2 \cdot 1-\lambda(c) \ldots}$$

sein und durch Verbindung dieser Gleichung mit (138) sich

$$\sum x^\alpha \cdot y = K_{-1} \cdot \sum \frac{F_\alpha\big(\lambda(a)\big) \cdot \lambda(b) \cdot \lambda(-s)}{(1-\lambda(a))^{\alpha+1} \cdot (1-\lambda(b))^2 \cdot 1-\lambda(c) \ldots} \tag{139}$$

ergeben. In gleicher Weise ginge aus (138) für die Gleichung

$$ax + by' + by'' + by''' + cz + \cdots + lu = s$$

die Formel

$$\sum x^{\alpha} \cdot \frac{y^2 + 3y + 2}{2} = K_{-1} \cdot \sum \frac{F_{\alpha}(\lambda(a)) \cdot \lambda(-s)}{(1-\lambda(a))^{\alpha+1} \cdot (1-\lambda(b))^3 \cdot 1-\lambda(c) \ldots}$$

und nun durch Verbindung mit (138), (139) diese weitere:

$$\sum x^{\alpha} \cdot y^2 = K_{-1} \cdot \sum \frac{F_{\alpha}(\lambda(a)) \cdot \lambda(b)(1+\lambda(b)) \cdot \lambda(-s)}{(1-\lambda(a))^{\alpha+1} \, (1-\lambda(b))^3 \cdot 1-\lambda(c) \ldots}$$

hervor, und man findet allgemeiner

$$(140) \quad \sum x^{\alpha} \cdot y^{\beta} = K_{-1} \cdot \sum \frac{F_{\alpha}(\lambda(a)) \cdot F_{\beta}(\lambda(b)) \cdot \lambda(-s)}{(1-\lambda(a))^{\alpha+1} \cdot (1-\lambda(b))^{\beta+1} \cdot 1-\lambda(c) \ldots}.$$

So fortfahrend gewinnt man als schließliches Resultat die ganz allgemeine Formel:

$$(141) \quad \sum x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \ldots u^{\nu} = K_{-1}\left(\sum_{\omega} \lambda(-s) \cdot \prod_{a} \frac{F_{\alpha}(\lambda(a))}{(1-\lambda(a))^{\alpha+1}}\right),$$

in welcher die Summation zur Linken über alle Lösungen $x, y, z, \ldots u$ der Gleichung (130), diejenige zur Rechten über alle voneinander verschiedenen Wurzeln ω der Gleichungen

$$x^a = 1, \quad x^b = 1, \quad x^c = 1 \ldots$$

auszudehnen ist, während das Produkt im allgemeinen Gliede dieser Summe aus so viel analog gebildeten Faktoren besteht, als die Anzahl dieser Gleichungen, d. i. der Elemente $a, b, c, \ldots, l$ beträgt.

Nachdem diese Formeln gefunden worden sind, bezeichne man jetzt mit $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ die N gleichen oder verschiedenen Werte von x, welche in den N Auflösungen der Gleichung (130) auftreten. Da man nach (138) die Summen gleicher Potenzen dieser N Werte bilden kann, so lassen sich bekanntlich auch die Koeffizienten einer algebraischen Gleichung bilden, als deren Wurzeln jene N Werte bestimmt sind und durch deren Auflösung sie gefunden werden können; die gedachten Koeffizienten sind der Formel (138) zufolge bestimmte Funktionen der Elemente $a, b, c, \ldots$ Seien nun etwa N_1 unter jenen Werten gleich x_1, N_2 gleich $x_2, \ldots, N_{\mu}$ gleich x_{μ}, so stellt (140) eine lineare Gleichung vor, welche zwischen den Summen für die β^{ten} Potenzen je derjenigen Werte von y, die jenen Werten $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu}$ resp. in den Lösungen von (130) zugeordnet sind, stattfindet. Aus den μ für $\alpha = 1, 2, \ldots, \mu$ gebildeten linearen Gleichungen dieser Art können daher jene Summen gleicher Potenzen von beliebigem Grade berechnet werden, demnach auch die Koeffizienten der algebraischen Gleichungen, denen jene $N_1, N_2, \ldots, N_{\mu}$ Werte von y resp. genügen;

aus der Auflösung dieser Gleichungen werden sie selbst bekannt. Nachdem aber so die N Systeme x, y ermittelt sind, die in den Auflösungen der Gleichung (130) auftreten, gewährt nun die allgemeine Formel (141) die Möglichkeit, die algebraischen Gleichungen aufzustellen, denen die zu jedem Systeme x, y zugeordneten Werte von z genügen, und durch deren Auflösung sie zu finden, usw.

So stellt sich die sehr beachtenswerte Tatsache heraus, daß die Auflösung der **unbestimmten** Gleichung (130) in nicht negativen ganzen Zahlen auf die Auflösung einer Reihe **bestimmter algebraischer** Gleichungen zurückgeführt werden kann, deren Koeffizienten als Funktionen der Elemente $a, b, c, \ldots, l$ angebbar sind.

Zudem haben wir in der Formel (141) den aus den sämtlichen Lösungen $x, y, z, \ldots, u$ der Gleichung (130) gebildeten Ausdruck:

$$\sum x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots u^\nu,$$

welcher, wenn $\alpha = \beta = \gamma \ldots = \nu = 0$ gesetzt wird, in die Anzahl dieser Lösungen übergeht, als Funktion der Elemente $a, b, c, \ldots, l$ dargestellt; so führt uns diese Formel gewissermaßen vom bloßen Schatten zum Ding an sich, from the shadow to the substance, wie in seiner feinsinnigen Weise *Sylvester* sich ausgedrückt hat.

17. Wir wenden uns nun wieder insbesondere zur Betrachtung des Denumeranten

$$\gamma_{n,s} = \frac{s}{1, 2, 3, \ldots, n}$$

zurück. Mit ihm ist die Anzahl

$$\Gamma_{n,s} = N(s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$
$$0 < a_1 \overline{\overline{<}} a_2 \cdots \overline{\overline{<}} a_n$$

der Zerfällungen von s in n gleiche oder verschiedene positive Summanden durch die Formel

$$\Gamma_{n,s} = \gamma_{n,s-n} \tag{24a}$$

verbunden. Da aber aus jeder Zerfällung:

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

eine Zerfällung

$$s - n = (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \cdots + (a_n - 1)$$

in n nicht negative, d. i. in höchstens n positive Summanden hervorgeht und umgekehrt aus jeder Zerfällung der letzteren Art eine Zerfällung der ersteren, so ergibt sich (für $s \overline{\overline{>}} n$) die neue Gleichung:

$$\Gamma_{n,s} = \Gamma_{1,s-n} + \Gamma_{2,s-n} + \cdots + \Gamma_{n,s-n}. \tag{142}$$

Schreibt man sie in der Form

(142 a) $$\Gamma_{n,\,s+n} = \Gamma_{1,\,s} + \Gamma_{2,\,s} + \cdots + \Gamma_{n,\,s},$$

was mit der Gleichung

(142 b) $$\gamma_{n,\,s} = \gamma_{1,\,s-1} + \gamma_{2,\,s-2} + \cdots + \gamma_{n,\,s-n}$$

identisch ist, so lehrt sie den Satz [s. (28)]: Die Zahl $s+n$ ist so oft in n gleiche oder verschiedene positive Summanden zerfällbar, als die Zahl s in ein, zwei, drei, ... oder n solche Summanden zerfällt. Für $n=s$ insbesondere erkennt man so, daß die Zahl $2s$ so oft in s solche positive Summanden zerfällbar ist, als die Zahl s überhaupt in solche Summanden zerfällt.

Analog mit (142) ist

$$\Gamma_{n-1,\,s-1} = \Gamma_{1,\,s-n} + \Gamma_{2,\,s-n} + \cdots + \Gamma_{n-1,\,s-n},$$

also findet sich wieder die Gleichung (35 a) für $s \gtreqless n$:

$$\Gamma_{n,\,s} = \Gamma_{n-1,\,s-1} + \Gamma_{n,\,s-n},$$

aus welcher für $s \gtreqless 2n$ die Formel

$$\gamma_{n,\,s-n} = \gamma_{n-1,\,s-n} + \gamma_{n,\,s-2n}$$

oder für $s \gtreqless n$ die Formel

(36 a) $$\gamma_{n,\,s} = \gamma_{n-1,\,s} + \gamma_{n,\,s-n}$$

hervorgeht. Dagegen ist für $s < n$

(36 a′) $$\gamma_{n,\,s} = \gamma_{n-1,\,s},$$

denn die Gleichung

$$s = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \cdots + (n-1) \cdot a_{n-1} + n \cdot a_n$$

hat alsdann nur Lösungen, in denen $a_n = 0$ ist, d. h. die Lösungen der Gleichung $$s = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \cdots + (n-1) \cdot a_{n-1}.$$

Außerdem ist für jedes n

(143) $$\gamma_{n,\,0} = 1.$$

Hiernach ordnen sich die $\gamma_{n,\,s}$ für sämtliche Werte der Indices n, s in folgendes Schema von Reihen:

(144) $$\left\{\begin{array}{lccccccc} \gamma_{0,\,s}: & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots \\ \gamma_{1,\,s}: & 1, & \gamma_{11}, & \gamma_{12}, & \gamma_{13}, & \gamma_{14}, & \gamma_{15}, & \cdots \\ \gamma_{2,\,s}: & 1, & \gamma_{21}, & \gamma_{22}, & \gamma_{23}, & \gamma_{24}, & \gamma_{25}, & \cdots \\ \gamma_{3,\,s}: & 1, & \gamma_{31}, & \gamma_{32}, & \gamma_{33}, & \gamma_{34}, & \gamma_{35}, & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array}\right.$$

dem wir noch eine Reihe $\gamma_{0,\,s}$ vorgesetzt haben von der Beschaffenheit, daß auch für die erste Reihe der $\gamma_{1,\,s}$ die mit (36 a) und (36 a′) entsprechenden Gleichungen

$$(36\,a'') \qquad \begin{cases} s \overline{\overline{>}} 1: & \gamma_{1,s} = \gamma_{0,s} + \gamma_{1,s-1} \\ s = 0: & \gamma_{1,0} = \gamma_{0,0} \end{cases}$$

Bestand haben.

Statt dessen betrachten wir im Verfolg einer mir von Herrn *J. Hermes* (s. hierzu übrigens auch dessen Abh. Math. Annal. 47, S. 281) mitgeteilten Idee allgemeiner die Reihen

$$(145) \qquad \begin{cases} R_0: & \alpha_{00}, & \alpha_{01}, & \alpha_{02}, & \alpha_{03}, & \alpha_{04}, & \ldots \\ R_1: & \alpha_{10}, & \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \alpha_{14}, & \ldots \\ R_2: & \alpha_{20}, & \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23}, & \alpha_{24}, & \ldots \\ R_3: & \alpha_{30}, & \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33}, & \alpha_{34}, & \ldots \end{cases}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

deren Zahlen aus denjenigen der Grundreihe R_0 nach den mit (36 a), (36 a'), (36 a'') analogen Formeln

$$(146) \qquad \begin{cases} s \overline{\overline{>}} n: & \alpha_{n,s} = \alpha_{n-1,s} + \alpha_{n,s-n} \\ s < n: & \alpha_{n,s} = \alpha_{n-1,s} \end{cases}$$

entstehen, also folgende Bildung aufweisen:

$$(147) \begin{cases} \alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03}, \alpha_{04}, \cdots \\ \alpha_{00}, \alpha_{00}+\alpha_{01}, \alpha_{00}+\alpha_{01}+\alpha_{02}, \alpha_{00}+\alpha_{01}+\alpha_{02}+\alpha_{03}, \alpha_{00}+\alpha_{01}+\alpha_{02}+\alpha_{03}+\alpha_{04}, \cdots \\ \alpha_{00}, \alpha_{00}+\alpha_{01}, 2\alpha_{00}+\alpha_{01}+\alpha_{02}, 2\alpha_{00}+2\alpha_{01}+\alpha_{02}+\alpha_{03}, 3\alpha_{00}+2\alpha_{01}+2\alpha_{02}+\alpha_{03}+\alpha_{04}, \cdots \end{cases}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Offenbar hat jedes Glied der Reihe R_n die Form

$$(148) \qquad \alpha_{n,s} = c_{0,0}^{n,s} \cdot \alpha_{00} + c_{0,1}^{n,s} \cdot \alpha_{01} + c_{0,2}^{n,s} \cdot \alpha_{02} + \cdots + c_{0,s}^{n,s} \cdot \alpha_{0,s},$$

wo die Koeffizienten zu bestimmen bleiben. Wählt man hierzu statt der Grundreihe R_0 die Reihe der $\gamma_{0,s}$, so leuchtet ein, daß die dieser Wahl entsprechenden $\alpha_{n,s}$ einerseits mit den $\gamma_{n,s}$, andererseits wegen (148) mit den $c_{0,0}^{n,s}$ identisch werden müssen, also findet sich zunächst

$$c_{0,0}^{n,s} = \gamma_{n,s}.$$

Wählt man dagegen die Grundreihe

$$0, 1, 0, 0, 0, \ldots,$$

so reduziert sich das Schema (145) oder (147) offenbar auf das Schema (144), dem noch eine aus Nullen bestehende Vertikalreihe vorgesetzt ist; demnach wird $\alpha_{n,s}$ einerseits mit $\gamma_{n,s-1}$, andererseits wegen (148) mit $c_{0,1}^{n,s}$ identisch, man findet also

$$c_{0,1}^{n,s} = \gamma_{n,s-1}$$

und auf ähnliche Weise

$$c_{0,2}^{n,s} = \gamma_{n,s-2}, \ldots, c_{0,s}^{n} = \gamma_{n,0}.$$

Demnach nimmt die Gleichung (148) die Gestalt an

$$\text{(149)} \qquad \alpha_{ns} = \gamma_{n,s} \cdot \alpha_{00} + \gamma_{n,s-1} \cdot \alpha_{01} + \cdots + \gamma_{n,0} \cdot \alpha_{0s}.$$

Insbesondere wird also

$$\alpha_{ss} = \gamma_{s,s} \cdot \alpha_{00} + \gamma_{s,s-1} \cdot \alpha_{01} + \cdots + \gamma_{s,0} \cdot \alpha_{0s},$$

d. i. mit Rücksicht auf (36a′)

$$\text{(150)} \qquad \alpha_{ss} = \gamma_{s,s} \cdot \alpha_{00} + \gamma_{s-1,s-1} \cdot \alpha_{01} + \cdots + \gamma_{0,0} \cdot \alpha_{0s}.$$

Nun bildet sich ersichtlich der Anfang der aufeinander folgenden Reihen $R_0, R_1, R_2, R_3, \ldots$, indem zu den ersten n Gliedern der Reihe R_{n-1} in der folgenden Reihe R_n das Glied α_{nn} hinzutritt, um dann in allen folgenden zu verbleiben; geht man so ins Unendliche fort, so erhält man eine gewisse „Schlußreihe“ R_∞, die aus den sämtlichen Gliedern

$$R_\infty\colon \quad \alpha_{00}, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots, \alpha_{ss}, \ldots$$

besteht. Ihr allgemeines Glied α_{ss} bildet sich aus den Gliedern der beiden Reihen

$$R_0\colon \quad \alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03}, \ldots$$

$$\Gamma\colon \quad \gamma_{0,0}, \gamma_{1,1}, \gamma_{2,2}, \gamma_{3,3}, \ldots,$$

d. i. aus der Grundreihe R_0 und aus der Schlußreihe des Schemas (144) nach dem in (150) ausgesprochenen Gesetze, indem man nämlich die ersten $s+1$ Glieder der ersteren mit den in umgekehrter Reihenfolge genommenen $s+1$ ersten Gliedern der letzteren multipliziert und dann addiert. Nennt man diese Operation eine Zusammensetzung beider Reihen und bezeichnet sie als das Produkt $R_0 \cdot \Gamma$, so darf man sagen: die Schlußreihe R_∞ sei dies Produkt, in Zeichen:

$$\text{(151)} \qquad R_\infty = R_0 \cdot \Gamma.$$

Ist $s \gtreqless n$, so folgt durch wiederholte Anwendung der ersten der Formeln (146)

$$\text{(152)} \qquad \alpha_{ns} = \alpha_{0s} + \alpha_{1,s-1} + \alpha_{2,s-2} + \cdots + \alpha_{n,s-n},$$

insbesondere also

$$\text{(153)} \qquad \alpha_{ss} = \alpha_{0s} + \alpha_{1,s-1} + \alpha_{2,s-2} + \cdots + \alpha_{s0},$$

d. h. man findet α_{ss}, wenn man die Reihen (145), jede gegen die vorhergehende um eine Stelle nach rechts verschoben, untereinander schreibt und dann die $s+1^{\text{te}}$ Kolonne addiert. In gleicher Weise ergibt sich (vgl. (142b))

$$\text{(154)} \qquad \gamma_{ss} = \gamma_{0s} + \gamma_{1,s-1} + \gamma_{2,s-2} + \cdots + \gamma_{s0}.$$

Die Anzahl γ_{ss} der Zerfällungen der Zahl s in gleiche oder verschiedene der Zahlen 1, 2, 3, ..., s ist aber (s. (7a)) die Anzahl Γ_s

ihrer Zerfällungen in positive Summanden überhaupt; die vorige Formel nimmt daher auch die Gestalt an:

(155) $$\Gamma_s = \gamma_{0s} + \gamma_{1,s-1} + \gamma_{2,s-2} + \cdots + \gamma_{s0}$$

und die Schlußreihe Γ des Schema (144) läßt sich schreiben wie folgt:

(156) $$\Gamma: \quad \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s, \ldots;$$

ihre Anfangsglieder sind, wie leicht festzustellen (s. *Euler*, Introductio in Analysin I, Kap. 16, S. 270; Lausanne 1748), die Zahlen

(157) $$\Gamma: \quad 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, \ldots$$

18. Wird diese Reihe selbst zur Grundreihe R_0 des Schema (145) genommen, so wird die Schlußreihe desselben durch Zusammensetzung von Γ mit sich selbst erhalten, also durch die Formel

$$R_\infty = \Gamma \cdot \Gamma$$

auszudrücken sein oder als Quadrat von Γ gedacht werden dürfen, und ebenso lassen sich höhere Potenzen von Γ bilden. Für alle diese Reihen gelten dann die gleichen, insbesondere die durch die Formeln (146), (152), (153) zum Ausdruck gebrachten Grundgesetze, wie für die Reihen der $\gamma_{n,s}$. Man findet so aus der Reihe (157) die Reihen

$$\Gamma^2: \quad 1, 2, 5, 10, 20, 36, \ldots$$
$$\Gamma^3: \quad 1, 3, 9, 22, 51, 108, \ldots$$

usw. Die Grundreihe des Schemas (144) darf als die nullte Potenz Γ^0 aufgefaßt und mit Γ^{-1} diejenige Grundreihe bezeichnet werden, aus welcher durch Zusammensetzung mit (157) jene als Schlußreihe hervorgeht. Nimmt man sie also als die Reihe R_0:

(158) $$\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03}, \ldots,$$

so sind die Zahlen

(159) $$\alpha_{00}, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots$$

mit der Grundreihe 1, 0, 0, 0, ... identisch, und nach (150) bestehen die Gleichungen

(160) $$\begin{cases} 1 = \gamma_{00} \cdot \alpha_{00} \\ 0 = \gamma_{11} \cdot \alpha_{00} + \gamma_{00} \cdot \alpha_{01} \\ 0 = \gamma_{22} \cdot \alpha_{00} + \gamma_{11} \cdot \alpha_{01} + \gamma_{00} \cdot \alpha_{02} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

aus denen die Zahlen (158), da $\gamma_{00} = 1$ ist, allmählich berechnet werden können. Nun ist das in (150) ausgesprochene Gesetz zur Bildung der Zahlen (159) offenbar genau das gleiche, wie dasjenige, nach welchem die Koeffizienten des entwickelten Produkts der beiden Reihen

$$(161)\quad \begin{cases} \alpha_{00} + \alpha_{01}x + \alpha_{02}x^2 + \alpha_{03}x^3 + \cdots \\ \gamma_{00} + \gamma_{11}x + \gamma_{22}x^2 + \gamma_{33}x^3 + \cdots \end{cases}$$

aus den Koeffizienten der Reihen selbst entstehen. Den Gleichungen (160) zufolge erhielte man also die Beziehungen:

$$(162)\quad 1 = (\alpha_{00} + \alpha_{01}x + \alpha_{02}x^2 + \cdots) \cdot (\gamma_{00} + \gamma_{11}x + \gamma_{22}x^2 + \cdots).$$

Nach Formel (7) in Nr. 2 ist aber der zweite Faktor mit der Entwicklung des Produktes

$$\prod_{h=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^h}$$

identisch, und so geht aus (162) die Gleichung

$$(163)\quad \prod_{h=1}^{\infty}(1-x^h) = \alpha_{00} + \alpha_{01}x + \alpha_{02}x^2 + \cdots$$

hervor. Denkt man sich hier das Produkt entwickelt, so wird ersichtlich die Potenz $+x^s$ so oft entstehen, als s aus einer geraden, und die Potenz $-x^s$ so oft, als s aus einer ungeraden Anzahl positiver voneinander verschiedener Summanden gebildet werden kann. Bedeutet daher wieder $C_{n,s}$ die Anzahl, wie oft s in n positive ungleiche Summanden zerfällt werden kann, und setzt man

$$(164)\quad \Delta_s = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot C_{n,s},$$

so erhält x^s zur Linken von (163) den Koeffizienten Δ_s und somit ist

$$\alpha_{0s} = \Delta_s$$

und Γ^{-1} identisch mit der Reihe

$$(165)\quad \Gamma^{-1}\colon\ \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$$

Nach Formel (20a) ist

$$C_{n,s} = \gamma_{n,s-\frac{n(n+1)}{2}},$$

also

$$(166)\quad \Delta_s = -\gamma_{1,s-\frac{1\cdot 2}{2}} + \gamma_{2,s-\frac{2\cdot 3}{1}} - \gamma_{3,s-\frac{3\cdot 4}{2}} + \cdots,$$

eine Reihe, die so weit fortzusetzen ist, als $s - \frac{n(n+1)}{2} \gtreqless 0$ bleibt. Es kommt nun darauf an, den Wert dieses Ausdrucks zu finden.

19. Ein Satz, welchen man *Euler* verdankt und der unter dem Namen *Legendre-Euler*scher Pentagonalzahlensatz geführt

wird, liefert jenen Wert unmittelbar. Nach diesem Satze besteht die Gleichheit

$$\prod_{h=1}^{\infty}(1-x^h)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\cdot x^{\frac{3n^2+n}{2}}. \tag{167}$$

Sie ward von *Euler* zunächst auf dem Wege der Induktion aus der Entwicklung des linksstehenden Produktes entdeckt und findet sich zuerst in einem Briefe an *D. Bernoulli* (28./1. 1741) von ihm erwähnt, demnächst ohne Beweis mitgeteilt in der Abhandlung Observationes analyticae variae de combinationibus, Comment. Petrop. 1741/43, in der Introductio in Analysin I (1748), S. 270, sowie in den Abhandlungen De partitione numerorum, Nov. Comment. Petr. 3, 1750/51, S. 125 (comment. arith. coll. 1, S. 73 [91]) und Observ. de summis divisorum, Nov. Comment. Petrop. 5, 1754/55, S. 59 (comment. arithm. coll. I, S. 146 [151]). Doch gab er dann auch mittels einer eigentümlichen Umformung des Produktes einen Beweis des Satzes (Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum, Nov. Comment. Petrop. 5, 1754/55, S. 75; comment. arithm. coll. I, S. 234), welchen er 25 Jahre später in etwas veränderter Form erneute (evolutio producti infiniti etc., Acta Petrop. 4, I, 1780; vgl. dazu de mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium, ebendas. S. 56, comment. arithm. coll. II, S. 105). Auf andere Art bewies die Gleichheit (167) in seiner théorie des nombres (3. éd.) II, S. 128 *Legendre*, welcher *Euler*s Beweis nicht gekannt zu haben scheint, da er zwar auf die Abhandlung de partitione numerorum und die Introductio hinweist, der späteren *Euler*schen Arbeiten jedoch keine Erwähnung tut. Während aber bei *Euler* der Satz wesentlich die analytische Tatsache der Gleichheit (167) zum Ausdrucke bringt, gab ihm *Legendre* zugleich seine arithmetische Fassung, so daß die Doppelbenennung desselben als *Legendre-Euler*scher Satz ihre Berechtigung hat. Offenbar folgt nämlich aus der Gleichung (167), wenn man die Koeffizienten gleicher Potenzen von x zur Rechten und in der Entwicklung des Produktes zur Linken miteinander vergleicht, der folgende Satz:

Im allgemeinen ist der Unterschied Δ_s zwischen der Anzahl der Zerfällungen von s in eine gerade, und der Anzahl ihrer Zerfällungen in eine ungerade Anzahl voneinander verschiedener positiver Summanden Null, d. h. die Anzahl der — wie wir abkürzend sagen wollen — „geraden" Zerfällungen gleich der Anzahl der „ungeraden"; nur, wenn s die Form hat

$$s=\frac{3n^2+n}{2}, \quad \left(n \gtreqless 0\right), \tag{168}$$

wenn also s eine sogenannte Pentagonalzahl ist, ist $\Delta_s=(-1)^n$,

d. h. die Anzahl der geraden Zerfällungen, je nachdem n gerade oder ungerade ist, um eine Einheit größer oder kleiner als die der ungeraden.

Um diesen Satz in eine einfache Formel zu fassen, bezeichnen wir mit $\sum_1^n a_k$ eine Summe von n verschiedenen positiven Elementen a_k und nach *Vahlen* mit

$$N\left(s = \sum_1^n a_k;\ (-1)^n\right)$$

die Anzahl der Zerfällungen von der Form $s = \sum_1^n a_k$, jede von ihnen positiv oder negativ gezählt, je nachdem n gerade oder ungerade ist; dies ist ersichtlich der Unterschied zwischen der Anzahl gerader und derjenigen ungerader Zerfällungen in verschiedene positive Summanden, welchen wir Δ_s genannt haben. Bei entsprechender Deutung des Zeichens

$$N\left(s = \frac{3n^2+n}{2};\ (-1)^n\right)$$

ist dann der Pentagonalzahlensatz der Inhalt der Formel

$$(169)\qquad N\left(s = \sum_1^n a_k;\ (-1)^n\right) = N\left(s = \frac{3n^2+n}{2};\ (-1)^n\right).$$

Den ersten rein arithmetischen Beweis dieses Satzes gab *Jacobi* (Beweis des Satzes, daß jede fünfeckige Zahl usw., Journ. f. reine u. angew. Math. 32, 1846, S. 164), indem er allgemeiner für beliebig gegebene Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ den Unterschied

$$\Delta(s;\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

zwischen der Anzahl der aus einer geraden und der aus einer ungeraden Anzahl derselben gebildeten Zerfällungen von s aufsuchte. Sehr viel einfacher aber ist ein Beweis von *J. Franklin* (C. R. der Ac. Paris 92 (1881), S. 448), mit welchem ein später von *L. Goldschmidt* (Programm der höheren Handelsschule, Gotha 1892 oder Ztschr. f. Math. u. Phys. 38 (1893), S. 121) gegebener wesentlich identisch ist. Diesen Beweis wollen wir hier mitteilen.

Man denke sich alle Zerfällungen s von der angegebenen Art je nach der Anzahl ihrer Elemente in Klassen verteilt, so daß die Zahl s selbst die erste Klasse K_1, die Zerfällungen

$$1 + (s-1),\ 2 + (s-2),\ 3 + (s-3),\ \ldots$$

die zweite Klasse K_2 und allgemein die Zerfällungen von der Art

$$(170) \qquad s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

die n^{te} Klasse K_n ausmachen, und denke in diesen Zerfällungen die Elemente stets der Größe nach geordnet, also

$$a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_n.$$

Man zähle ferner in jeder dieser Zerfällungen, wieviel der letzten Elemente aufeinanderfolgende Zahlen sind; sei in der Zerfällung (170) die Anzahl dieser Elemente gleich k; diese Zahl ist mindestens 1, da man das letzte Element für sich als ein solches auffassen kann. Dann lassen sich die Zerfällungen der Klasse K_n in zwei Arten unterscheiden, in die erste Art, bei der das anfängliche Element a_1 nicht größer ist als diese der Zerfällung zukommende Zahl k, und in die zweite Art, bei welcher $a_1 > k$ ist.

Sei die Zerfällung (170), die kurz Z heiße, zunächst von der ersten Art:

$$(171) \qquad s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-k} + a_{n-k+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

wo $a_1 \overline{\overline{<}} k$ und $a_{n-k+1}, \ldots a_{n-1}, a_n$ aufeinanderfolgende Zahlen bedeuten, a_{n-k} aber um mindestens zwei Einheiten kleiner ist als a_{n-k+1}. Dann kann man, das Element a_1 unterdrückend und die Einheiten, aus welchen es besteht, auf die letzten a_1 Elemente verteilend, aus Z eine andere Zerlegung Z' ableiten:

$$(171') \qquad s = a_2 + \cdots + a_{n-a_1} + (1 + a_{n-a_1+1}) + \cdots + (1 + a_{n-1}) + (1 + a_n),$$

welche offenbar zur Klasse K_{n-1} und, da ihr Anfangsglied $a_2 > a_1$ d. h. größer als die Anzahl der letzten Elemente ist, welche jetzt aufeinanderfolgende Zahlen sind, zur zweiten Art der Zerfällungen dieser Klasse gehört. Nur in einem Falle wäre solche zu Z entsprechende Zerfällung Z' nicht vorhanden, wenn nämlich $k = n$ d. h. sämtliche Elemente aufeinanderfolgende Zahlen und zugleich $a_1 = k$ wären, denn in diesem Falle ließen sich die n Einheiten des Anfangsgliedes nicht in der angegebenen Weise auf die übrigen $n - 1$ Elemente verteilen.

Ist zweitens die Zerfällung Z von der zweiten Art also in (171) $a_1 > k$, so kann man, von den letzten k Elementen je eine Einheit abhebend und deren Summe k als Anfangsglied voranstellend, aus ihr eine andere Zerfällung Z'' ableiten:

$$(171'') \qquad s = k + a_1 + \cdots + a_{n-k} + (a_{n-k+1} - 1) + \cdots + (a_{n-1} - 1) + (a_n - 1),$$

welche ersichtlich zur Klasse K_{n+1} und, da jetzt die Anzahl der letzten Glieder, welche aufeinanderfolgende Zahlen sind, mindestens gleich k, also mindestens gleich dem Anfangsgliede ist, zur ersten

Art der Zerfällungen dieser Klasse gehört. Nur in einem Falle wäre wieder solche zu Z entsprechende Zerfällung Z'' nicht vorhanden, wenn nämlich wieder $k = n$ d. h. sämtliche Elemente aufeinanderfolgende Zahlen und zugleich $a_1 = k + 1$ wären, denn in dieser Voraussetzung würde auch das Element a_1 um eine Einheit verringert werden müssen und dann dem Anfangsgliede gleich werden, während nur Zerfällungen von s in verschiedene Elemente zulässig sind.

Sucht man nun umgekehrt zur Zerfällung Z' der Klasse K_{n-1}, welche von der zweiten Art ist, die ihr nach der letzten Regel entsprechende Zerfällung der Klasse K_n, so findet man dafür offenbar die Zerfällung Z, welcher Z' selbst entsprach. Desgleichen entspricht der Zerfällung Z'' erster Art der Klasse K_{n+1} nach der ersten Regel ersichtlich die Zerfällung Z der Klasse K_n, welcher Z'' selber entsprach. Demnach darf man sagen: Abgesehen von den erwähnten besonderen Zerfällungen lassen sich sämtliche übrigen Zerfällungen von s derartig in Paare verteilen, daß von den Zerfällungen desselben Paares jede der anderen in der zuvor angegebenen Weise entspricht. Da aber von den Zerfällungen eines jeden Paares die eine gerade, die andere ungerade ist, so wird der Beitrag, welchen sie zur Bestimmung des Unterschieds Δ_s zwischen der Anzahl der geraden und der ungeraden Zerfällungen liefern, stets gleich Null, und somit, falls es keine Zerfällung der erwähnten besonderen Arten gibt, auch dieser Unterschied Δ_s selbst gleich Null sein.

Wäre aber eine Zerfällung Z der Klasse K_n vorhanden, bei welcher $a_1 = k = n$ ist, so hätte man

$$s = n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + n - 1),$$

also

$$s = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2},$$

d. h. s wäre eine Pentagonalzahl. Gäbe es eine Zerfällung von s, in welcher $k = n$ und $a_1 = k + 1$, so würde

$$s = (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \cdots + (n + n),$$

also

$$s = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n^2 + n}{2},$$

d. h. s wieder einer Pentagonalzahl gleich. Andererseits kann eine Zahl stets nur auf eine Weise Pentagonalzahl sein, da aus der Gleichung

$$\frac{3k^2 + k}{2} = \frac{3k'^2 + k'}{2}$$

sich

$$(k - k')(3(k + k') + 1) = 0$$

und, da $3(k + k') + 1$ nicht Null sein kann, sich $k = k'$ ergibt. Man schließt aus diesen Bemerkungen, daß, falls s keine Pentagonal-

zahl ist, keine der erwähnten besonderen Zerfällungen möglich und dann also $\Delta_s = 0$ ist; daß aber, falls s eine Pentagonalzahl, $s = \frac{3n^2 \pm n}{2}$ ist, nur eine solche Zerfällung und zwar in der Klasse K_n vorhanden ist; ihr entspricht aber in der Bestimmung des Unterschieds Δ_s eine positive oder negative Einheit, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und folglich ist alsdann $\Delta_s = (-1)^n$.

Dadurch ist der Pentagonalzahlensatz bewiesen.[1])

20. Aus einer allgemeineren analytischen Gleichheit, welche aus der Theorie der elliptischen Funktionen gewonnen wird, läßt sich ein Satz ablesen, den man als engeren Pentagonalzahlensatz kennzeichnen darf und für welchen *K. Th. Vahlen* (Journ. f. r. u. a. Math. 112, S. 10) einen arithmetischen Beweis aufgestellt hat. Die Gleichung lautet wie folgt:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^{3n-2} \cdot z)(1 - x^{3n-1} \cdot z^{-1})(1 - x^{3n}) = \sum_{h=-\infty}^{\infty}(-z)^h \cdot x^{\frac{3h^2-h}{2}},$$

wofür, wenn $r(s)$ den absolut kleinsten Rest einer Zahl s (mod. 3) bezeichnet, auch

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n \cdot z^{r(n)}) = \sum_{h=-\infty}^{\infty}(-z)^h \cdot x^{\frac{3h^2-h}{2}}$$

geschrieben werden kann. Durch Vergleichung der Koeffizienten gleicher Potenzen von x zur Rechten und in der Entwicklung des Produktes zur Linken geht, wie man leicht sieht, daraus folgender Satz hervor: Unter denjenigen Zerfällungen einer Zahl s in verschiedene positive Elemente, bei welchen die Summe der absolut kleinsten Reste (mod. 3) der Elemente einer gegebenen positiven oder negativen Zahl h gleich ist, gibt es im allgemeinen ebensoviel gerade als ungerade Zerfällungen; nur in dem Falle, daß s die Pentagonalzahl $s = \frac{3h^2 - h}{2}$ ist, ist die Anzahl der ersteren, je nachdem h gerade oder ungerade ist, um eine Einheit größer oder kleiner als die Anzahl der letzteren.

Der *Vahlen*sche Beweis dieses Satzes verläuft in ähnlicher Weise wie der soeben für den *Legendre-Euler*schen Satz gegebene. Man bezeichne, wie üblich, mit $|h|$ den absoluten Wert der Zahl h und in *Kronecker*scher Weise mit $sgn \cdot h$ den Quotienten $\frac{h}{|h|}$ d. h., je nachdem $h \gtrless 0$ ist, die positive oder negative Einheit. Jede der gedachten Zerfällungen von s hat dann die Form

1) Nach Hrn. *D. von Sterneck*s Aussage (s. Wien. Sitzgsber. 106 II, S. 116) hat auch *L. Gegenbauer* diesen Beweis in seinen Vorlesungen mitgeteilt, ob als von ihm gefunden oder nicht, ist mir unbekannt.

$$(172) \qquad s = \sum_1^\lambda a_k + \sum_1^\mu b_k + 3 \sum_1^\nu \gamma_k,$$

worin die Elemente a_k den Rest $sgn \cdot h$, die Elemente b_k den Rest $-sgn \cdot h$ (mod. 3) lassen, während die Elemente $3\gamma_k$ die durch 3 teilbaren Elemente darstellen; zwischen λ, μ besteht die Beziehung

$$(\lambda - \mu) \cdot sgnh = h$$

oder

$$(173) \qquad \lambda - \mu = |h|;$$

ihr zufolge ist $\lambda > 0$, also stets ein Element a_k in der Zerfällung vorhanden; sollte kein b_k oder kein γ_k darin auftreten, so fiele die bezügliche Summe in (172) aus. In den einzelnen Summen denken wir die Elemente stets nach der Größe geordnet. Nun lassen sich sämtliche Zerfällungen (172) in zwei Arten unterscheiden nach folgendem Prinzip.

Die Elemente a_k sind einander (mod. 3) kongruent, ihre Differenzen also teilbar durch 3. Man zähle nun, wieviele der Differenzen

$$a_\lambda - a_{\lambda-1}, \quad a_{\lambda-1} - a_{\lambda-2}, \quad a_{\lambda-2} - a_{\lambda-3}, \cdots$$

gleich 3 sind; ist $i - 1$ deren Anzahl, so daß $a_{\lambda-i+1} - a_{\lambda-i}$ die erste Differenz ist, welche ein Vielfaches von 3 ist, so soll i der Index der Zerfällung heißen. Zur ersten Art rechnen wir dann alle Zerfällungen (172), bei denen entweder kein γ_k auftritt oder entgegengesetztenfalls $i < \gamma_1$ ist, zur zweiten Art diejenigen, bei welchen $i \geqq \gamma_1$ ist. Ist zuerst die Zerfällung (172) von der zweiten Art, so kann man, die Einheiten, aus denen $3\gamma_1$ besteht, zu je dreien auf die letzten a_k verteilend, ihr stets eine andere Zerfällung

$$(172'') \qquad s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\lambda-\gamma_1} + (3 + a_{\lambda-\gamma_1+1}) + \cdots + (3 + a_\lambda) + \sum_1^\mu b_k + 3 \sum_2^\nu \gamma_k$$

zuordnen, welche ein Element weniger enthält und der ersten Art angehört, da entweder kein γ_k mehr vorhanden oder entgegengesetztenfalls der Index der Zerfällung, welcher offenbar γ_1 ist, kleiner als das erste Element γ_2 ist. — Gehört dagegen die Zerfällung (172) der ersten Art an, so ordne man ihr die andere Zerfällung

$$(172') \qquad s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\lambda-i} + (a_{\lambda-i+1} - 3) + \cdots + (a_\lambda - 3) + \sum_1^\mu b_k + 3(i + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\nu)$$

zu, welche ein Element $3i$ mehr enthält und zur zweiten Art gehört, da wenigstens das eine durch 3 teilbare Element $3i$ vorhanden ist und der Index der Zerfällung, weil nach Voraussetzung

$$(a_\lambda - 3) - (a_{\lambda-1} - 3) = (a_{\lambda-1} - 3) - (a_{\lambda-2} - 3) \cdots = (a_{\lambda-i+2} - 3) - (a_{\lambda-i+1} - 3)$$

gleich 3, die Differenz $(a_{\lambda-i+1} - 3) - a_{\lambda-i}$ jetzt aber $\overline{\gtrless} 3$ ist, mindestens i beträgt. Indessen ist diese neue Zuordnung dann, aber auch nur dann nicht möglich, wenn $i = \lambda$ und zugleich $a_1 < 3$ ist, da alsdann die Subtraktion einer Drei auch vom Gliede a_1 nötig würde, also kein positives Element der Zerfällung mehr ergäbe.

Läßt man einstweilen die Zerfällungen dieser Ausnahmeart beiseite, so sieht man leicht ein, daß umgekehrt die der Zerfällung (172′) resp. (172″) nach denselben Regeln zugeordnete Zerfällung eben die Zerfällung (172) ist, der resp. sie selbst zugeordnet waren, und man erkennt so, daß alle übrigen Zerfällungen der gedachten Art sich wieder in Paare verteilen, solcherweise, daß jede Zerfällung eines Paares der anderen Zerfällung dieses Paares zugeordnet ist. Da aber von ihnen die eine gerade, die andere ungerade ist, heben sich die Beiträge, welche sie für den gesuchten Unterschied $\Delta_{s,h}$ der Anzahl gerader und derjenigen ungerader Zerfällungen liefern, gegenseitig auf. Es bleiben demnach zur Bestimmung dieses Unterschiedes nur die vorher ausgeschlossenen Zerfällungen zu berücksichtigen.

Diese Zerfällungen, welche zur ersten Art gehören, so daß in ihnen, falls ein γ_k auftritt, $i < \gamma_1$ ist, verteilen wir in drei mögliche Kategorien:

erstens in diejenigen, bei welchen weder ein b_k noch ein γ_k vorhanden ist;

zweitens in solche, bei welchen kein b_k, wohl aber mindestens ein γ_k vorhanden ist;

drittens in solche, bei welchen mindestens ein b_k auftritt, und diese Kategorie von Zerfällungen bietet wieder zwei kleinere Gruppen;

in der ersten ist entweder kein γ_k vorhanden oder entgegengesetztenfalls $a_\lambda + b_1 < 3\gamma_1$; in der zweiten ist $a_\lambda + b_1 \overline{\gtrless} 3\gamma_1$.

Ist

$$s = \sum_1^\lambda a_k + b_1 + 3\sum \gamma_k$$

eine Zerfällung der ersten dieser Gruppen, in welcher nur ein b_k auftritt, so ordnet sich ihr eine Zerfällung

$$s = \sum_1^{\lambda-1} a_k + 3\left(\frac{a_\lambda + b_1}{3} + \sum \gamma_k\right)$$

zu, welche ein Element weniger enthält und zur zweiten Kategorie zählt; aber auch umgekehrt folgt aus jeder Zerfällung der letzteren Kategorie

$$s = \sum_1^\lambda a_k + 3\sum_1^\nu \gamma_k,$$

weil $a_1 < 3$ und $\lambda = i < \gamma_1$ vorausgesetzt, also

$$a_\lambda = 3(\lambda - 1) + a_1 \overline{\overline{<}}\, 3(\gamma_1 - 2) + a_1$$

und

$$3\gamma_1 - a_\lambda - 3 > 0$$

ist, eine Zerfällung

$$s = \sum_1^{\lambda+1} a_k + b_1 + 3\sum_2^\nu \gamma_k,$$

in welcher $a_{\lambda+1} = a_\lambda + 3$, $b_1 = 3\gamma_1 - a_\lambda - 3$ gedacht ist, die also ein Element mehr enthält und eine nur ein b_k enthaltende Zerfällung der ersten Gruppe ist, da, falls noch ein γ_k darin auftritt, $a_{\lambda+1} + b_1 = 3\gamma_1 < 3\gamma_2$ ist. Hiernach heben also, da auch hier die Zuordnung je zweier Zerfällungen, wie leicht einzusehen, eine gegenseitige ist, die Zerfällungen der zweiten Kategorie und die bezeichneten Zerfällungen der ersten Gruppe der dritten Kategorie, was ihre Beiträge zu dem gesuchten Unterschiede $\Delta_{s,h}$ anbelangt, gegenseitig sich auf.

Die übrigen Zerfällungen dieser Gruppe tilgen aber den Beitrag der Zerfällungen der zweiten Gruppe. Denn, ist

$$(174) \qquad s = \sum_1^\lambda a_k + \sum_1^\mu b_k + 3\sum_1^\nu \gamma_k$$

eine Zerfällung derselben, welche mehr als ein b_k enthält, so ordnet sich ihr eine Zerfällung

$$s = \sum_1^{\lambda-1} a_k + \sum_2^\mu b_k + 3\left(\frac{a_\lambda + b_1}{3} + \sum_1^\nu \gamma_k\right)$$

zu, welche ein Element weniger enthält und der zweiten Gruppe zugehört, denn a_1 ist kleiner als 3, der Index i ist gleich der Anzahl $\lambda - 1$ der Elemente a_k, und $a_{\lambda-1} + b_2$ ist

$$a_\lambda + b_2 - 3 \overline{\overline{>}}\, a_\lambda + b_1,$$

d. h. größer oder gleich dem kleinsten der durch 3 teilbaren Elemente. Gehört umgekehrt die Zerfällung (174) der zweiten Gruppe an, so ordnet sich ihr eine andere Zerfällung

$$s = \left(\sum_1^\lambda a_k + (a_\lambda + 3)\right) + \left((3\gamma_1 - a_\lambda - 3) + \sum_1^\mu b_k\right) + 3\cdot\sum_2^\nu \gamma_k$$

zu, welche ein Element mehr enthält und eine Zerfällung der ersten

Gruppe mit mehr als einem b_k ist, da $a_1 < 3$ und ihr Index i gleich der Anzahl der a_k ist, während entweder kein γ_k mehr auftritt oder entgegengesetztenfalls

$$(a_\lambda + 3) + (3\gamma_1 - a_\lambda - 3) = 3\gamma_1 < 3\gamma_2$$

ist; auch sind diese Zuordnungen wieder gegenseitig.

Nach alle diesem handelt es sich also nur noch um die Beiträge der Zerfällungen der ersten Kategorie:

$$s = \sum_1^\lambda a_k.$$

Da in ihnen $\mu = 0$ und $a_1 < 3$ ist, so wird, je nachdem h positiv oder negativ ist, $a_1 = 1$ oder 2 und λ wegen (173) gleich $+h$ oder $-h$ sein, und demnach die Zerfällung, weil die $i = \lambda$ Elemente a_k um je drei Einheiten wachsen, entsprechend die erste oder die zweite der folgenden sein:

$$s = 1 + (3+1) + (2\cdot 3 + 1) + \cdots + \big((\lambda - 1)\cdot 3 + 1\big)$$
$$= \lambda + 3\cdot\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} = \frac{3h^2 - h}{2}$$

oder

$$s = 2 + (3+2) + (2\cdot 3 + 2) + \cdots + \big((\lambda - 1)\cdot 3 + 2\big)$$
$$= 2\lambda + 3\cdot\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} = \frac{3h^2 - h}{2}.$$

Also ist nur dann eine Zerfällung der ersten Kategorie vorhanden, wenn $s = \frac{3h^2 - h}{2}$ ist, und in diesem Falle nur eine solche Zerfällung, welche zugleich mit h gerade oder ungerade ist, folglich ist der Beitrag dieser Kategorie zum Werte von $\Delta_{s,\,h}$ gleich $(-1)^h$ oder Null, je nachdem $s = \frac{3h^2 - h}{2}$ ist oder nicht ist.

Somit ist der Satz von *Vahlen* bewiesen.

21. Diesen Betrachtungen entzieht sich der Fall $h = 0$. Um auch ihn zu erledigen, kann man folgende Erwägung anstellen. Schreibt man jede Zerfällung von s in Elemente, für welche die Summe der absolut kleinsten Reste der Elemente (mod. 3) gleich h ist, in der Form

$$(175) \qquad s = \sum_1^\lambda (3\alpha_k + 1) + \sum_1^\mu (3\beta_k - 1) + \sum_1^\nu 3\gamma_k,$$

so daß $\lambda - \mu = h$ zu denken ist, so lassen sie sich in solche unterscheiden, in denen das Element 1 auftritt, d. h. in welchen die kleinste der Zahlen α_k gleich 0 ist, und in die übrigen, in denen alle $\alpha_k > 0$ sind; die β_k müssen stets > 0 sein. Aus jeder dieser letzteren 1-freien Zerfällungen von s ergibt sich eine 1-freie Zerfällung

$$(176) \qquad s - 2h = \sum_1^\mu (3\beta_k + 1) + \sum_1^\lambda (3\alpha_k - 1) + \sum_1^\nu 3\gamma_k$$

der Zahl $s - 2h$, für welche die Summe der absolut kleinsten Reste der Elemente (mod. 3) gleich $\mu - \lambda = -h$ ist, und offenbar auch umgekehrt. Bezeichnet man also für die 1-freien Zerfällungen von s mit der Summe h der absolut kleinsten Reste der Elemente (mod. 3) den Unterschied der Anzahl gerader und derjenigen ungerader Zerfällungen mit $\Delta^{(1)}_{s,h}$, so findet sich die allgemeine Beziehung

$$(177) \qquad \Delta^{(1)}_{s,h} = \Delta^{(1)}_{s-2h,-h}.$$

Andererseits ergibt sich aus jeder Zerfällung (175) von s, welche das Element 1 enthält, für welche also $\alpha_1 = 0$ ist, eine 1-freie Zerfällung

$$(178) \qquad s - 1 = \sum_2^\lambda (3\alpha_k + 1) + \sum_1^\mu (3\beta_k - 1) + \sum_1^\nu 3\gamma_k$$

der Zahl $s - 1$, welche ein Element weniger enthält und für welche die Summe der absolut kleinsten Reste der Elemente (mod. 3) gleich $\lambda - 1 - \mu = h - 1$ ist, und offenbar auch umgekehrt. Der Unterschied $\Delta^{(1)}_{s-1,h-1}$ ist also, negativ genommen, der für die nicht 1-freien Zerfällungen von s mit der Summe h der Reste gebildete Unterschied zwischen der Anzahl gerader und ungerader Zerfällungen. Demnach findet sich der für sämtliche Zerfällungen von s mit der Restsumme h der Elemente gebildete Unterschied $\Delta_{s,h}$ durch die Formel

$$(179) \qquad \Delta_{s,h} = \Delta^{(1)}_{s,h} - \Delta^{(1)}_{s-1,h-1}.$$

In Anwendung von (177) geht daraus die Gleichung hervor:

$$\Delta_{s,h} = \Delta^{(1)}_{s-2h,-h} - \Delta^{(1)}_{s-2h+1,-h+1},$$

während (179) durch Vertauschung von s, h resp. mit $s - 2h + 1$, $-h + 1$ die Gleichung

$$\Delta_{s-2h+1,-h+1} = \Delta^{(1)}_{s-2h+1,-h+1} - \Delta^{(1)}_{s-2h,-h}$$

liefert, deren Vergleichung mit der vorigen zur folgenden führt:

$$(180) \qquad \Delta_{s,h} = -\Delta_{s-2h+1,-h+1}.$$

Diese für jedes h gültige Beziehung gibt insbesondere für $h = 0$

$$\Delta_{s,0} = -\Delta_{s+1,+1}.$$

Dem *Vahlen*schen Satze zufolge ist die rechte Seite dieser Formel gleich Null, den einzigen Fall ausgenommen, in welchem $s + 1 = \frac{3 \cdot 1^2 - 1}{2} = 1$ also $s = 0$, und in welchem sie gleich $+1$ wird. Demnach ist im allgemeinen $\Delta_{s,0} = 0$, nur, wenn $s = 0 = \frac{3 \cdot 0^2 - 0}{2}$ ist, wird $\Delta_{s,0} = 1 = (-1)^0$. Man erkennt hieraus die Gültigkeit des *Vahlen*schen Satzes auch für den Fall $h = 0$.

Aus dem engeren Pentagonalzahlensatze gewinnt man dann aber auch sogleich den *Legendre-Euler*schen Pentagonalzahlensatz wieder, wenn man sämtliche Zerfällungen einer Zahl s in verschiedene posi-

tive Summanden nach den Werten, welche die Summe h der absolut kleinsten Reste der Summanden (mod. 3) darbietet und die ersichtlich nur mit s (mod. 3) kongruent sein können, in Gruppen G_n verteilt. Da der Unterschied $\Delta_{s,h}$ für jede dieser Gruppen Null ist bis auf die eine etwa vorhandene Gruppe $G_{\pm n}$, für deren Index $s = \frac{3n^2 \pm n}{2}$ ist, für welche dann $\Delta_{s,h}$ gleich $(-1)^n$ wird, so nimmt der gesamte Unterschied $\Delta_s = \sum\limits_h \Delta_{s,h}$ auch nur in diesem Falle den Wert $(-1)^n$ an, während er sonst Null ist — wie der genannte Satz es aussagt.

Durch Betrachtungen, welche den eben angestellten ähnlich sind, hat *R. Daublebsky v. Sterneck* (Sitzungsber. Wien. Akad. 106, II, S. 115) einen einfacheren Beweis des *Vahlen*schen Satzes gegeben, der jedoch den *Legendre-Euler*schen Pentagonalzahlensatz, statt ihn aus jenem zu folgern, im Gegenteil zu Hilfe nimmt. Seine Betrachtungen gestatten dann *v. Sterneck*, dem Satze von *Vahlen* einen noch enger gefaßten ähnlichen Charakters anzugliedern.

Er hat ferner in einer in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie 109 II, 1900, S. 28 enthaltenen Arbeit auch für diejenigen Zerfällungen einer Zahl, bei welchen die Summe der absolut kleinsten Reste der Summanden (mod. 5) gleich h ist, den Unterschied $\Delta_{s,h}$ zwischen der Anzahl der geraden und derjenigen der ungeraden Zerfällungen aufgesucht. Es gelingt ihm mittels des *Legendre-Euler*schen Satzes Rekursionsformeln aufzustellen, durch welche unschwer der Wert jenes Unterschiedes berechnet werden kann.

22. Aus jeder Zerfällung (175) der Zahl s, in welcher $\lambda - \mu = h$ ist, geht eine Zerfällung der Zahl $s_1 = \frac{s-h}{3}$:

$$(181) \qquad s_1 = {\sum_1^\lambda}' \alpha_k + \sum_1^\mu \beta_k + \sum_1^\nu \gamma_k$$

hervor, wo ${\sum\limits_1^\lambda}' \alpha_k$ eine Summe von λ verschiedenen Zahlen ist, die bis auf die erste eventuell der Null gleiche positiv sind; und umgekehrt. Demnach folgt aus dem *Vahlen*schen Satze, da, wenn $s = \frac{3h^2 - h}{2}$ ist, $s_1 = \frac{h^2 - h}{2}$ wird und umgekehrt, daß der Ausdruck

$$(182) \qquad N\left(s_1 = {\sum_1^\lambda}' \alpha_k + \sum_1^\mu \beta_k + \sum_1^\nu \gamma_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right),\ (\lambda - \mu = h)$$

dessen Bedeutung als Anzahldifferenz nach dem zur Formel (169) Gesagten verständlich ist, im allgemeinen gleich Null, nur, wenn $s_1 = \frac{h^2 - h}{2}$ ist, gleich $(-1)^h$ ist. Dies spricht sich, wenn $\lambda = h + \mu$ eingesetzt und für s_1 wieder s geschrieben wird, in der für ein bestimmtes h gedachten Gleichung

$$(183)\qquad N\left(s = {\sum_1^{h+\mu}}' \alpha_k + \sum_1^{\mu} \beta_k + \sum_1^{\nu} \gamma_k;\ (-1)^{\nu}\right) = N\left(s = \frac{h^2 - h}{2}\right)$$

aus. Man setze nun in dieser Gleichung für h die aufeinanderfolgenden positiven Zahlen 1, 2, 3, ... ein und addiere die entsprechenden Gleichungen. Unterscheidet man bezüglich der Summe ${\sum_1^{h+\mu}}' \alpha_k$, in welcher das erste Element Null sein darf, die Fälle, in denen dies eintritt, von den übrigen, derart, daß sie sowohl eine Summe $\sum_1^{\mu+h-1} \alpha_k$ als auch eine Summe $\sum_1^{\mu+h} \alpha_k$ bezeichnen kann, deren Summanden nun sämtlich positiv sind, so geht offenbar bei der Addition zur Linken von (183) der Ausdruck

$$N\left(s = \sum_1^{\mu} \alpha_k + \sum_1^{\mu} \beta_k + \sum_1^{\nu} \gamma_k;\ (-1)^{\nu}\right)$$
$$+ 2 \cdot N\left(s = \sum_1^{\mu+h} \alpha_k + \sum_1^{\mu} \beta_k + \sum_1^{\nu} \gamma_k;\ (-1)^{\nu}\right),$$

worin $h > 0$ gedacht ist, hervor, ein Ausdruck, welcher dem folgenden einfacheren:

$$N\left(s = \sum_1^{\lambda} \alpha_k + \sum_1^{\mu} \beta_k + \sum_1^{\nu} \gamma_k;\ (-1)^{\nu}\right),$$

worin $\lambda \gtreqless \mu$ zu denken ist, gleichkommt. Andererseits geht durch Addition auf der rechten Seite der Gleichung (183) die für irgendein positives n gedachte Anzahl $N\left(s = \frac{n^2 - n}{2}\right)$ hervor, und es entsteht demnach die Formel

$$(184)\qquad N\left(s = \sum_1^{\lambda} \alpha_k + \sum_1^{\mu} \beta_k + \sum_1^{\nu} \gamma_k;\ (-1)^{\nu}\right) = N\left(s = \frac{n^2 - n}{2}\right),$$
$$\left(\lambda \gtreqless \mu,\ n > 0\right)$$

der man auch, wenn s durch $\frac{s-1}{8}$ ersetzt wird, die folgende Gestalt geben kann:

$$(184\text{a})\qquad N\left(s = 1 + 8\sum_1^{\lambda} \alpha_k + 8\sum_1^{\mu} \beta_k + 8\sum_1^{\nu} \gamma_k;\ (-1)^{\nu}\right)$$
$$= N(s = (2n-1)^2 = u^2).$$
$$\left(\lambda \gtreqless \mu,\ u \text{ pos. ungerade}\right)$$

Ferner folgt aus jeder Zerfällung

$$s_1 = \sum_1^{'\lambda} \alpha_k + \sum_1^{\mu} \beta_k + \sum_1^{\nu} \gamma_k$$

von s_1, in welcher $\lambda - \mu = h$ ist, wenn q, r positive ganze Zahlen bezeichnen, deren erstere größer ist als die zweite, eine Zerfällung

$$q s_1 + r h = \sum_1^{'\lambda} (q\alpha_k + r) + \sum_1^{\mu} (q\beta_k - r) + \sum_1^{\nu} q\gamma_k$$

oder

$$q s_1 + r h = \sum_1^{\lambda+\mu+\nu} a_k$$

der Zahl $qs_1 + rh$ in positive Elemente a_k, die (mod. q) kongruent r, $-r$ oder 0 sind, bei welcher die Summe der absolut kleinsten Reste der Elemente (mod. q) gleich rh ist, und offenbar auch umgekehrt. Demnach ist, wenn zur Abkürzung $qs_1 + rh = s'$ gesetzt wird, der unter den angegebenen Voraussetzungen gebildete Ausdruck

$$N\left(s' = \sum_1^{\lambda+\mu+\nu} a_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right)$$

dem Ausdrucke (182) gleich, d. h. im allgemeinen Null, nur wenn $s_1 = \frac{h^2 - h}{2}$ d. i. $s' = \frac{qh^2 - (q-2r)h}{2}$ ist, gleich $(-1)^h$. Schreibt man daher wieder s für s', so findet man die Gleichung

$$(185) \quad N\left(s = \sum_1^{\lambda} a_k;\ (-1)^{\lambda}\right) = N\left(s = \frac{qh^2 - (q-2r)h}{2};\ (-1)^h\right),$$

falls $a_k \equiv r, -r, 0$ (mod. q) und die Summe der absolut kleinsten Reste der a_k (mod. q) gleich hr ist. Durch Summierung über die zulässigen Werte von h, wie sie durch die Beziehung $s = qs_1 + rh$ oder $s \equiv rh$ (mod. q) sich ergeben, folgt weiter

$$(186) \quad N\left(s = \sum_1^{\lambda} a_k;\ (-1)^{\lambda}\right) = N\left(s = \frac{qn^2 - (q-2r)n}{2};\ (-1)^n\right).$$

$$\left(a_k \equiv r,\ -r,\ 0;\ rn \equiv s \pmod{q}\right)$$

Insbesondere finden sich, wenn $r = 1$ gewählt wird, die beiden Sätze: Es ist

$$(185\text{a}) \quad N\left(s = \sum_1^{\lambda} a_k;\ (-1)^{\lambda}\right) = N\left(s = \frac{qh^2 - (q-2)h}{2};\ (-1)^h\right),$$

wenn $a_k \equiv \pm 1, 0 \pmod{q}$ und die Summe der absolut kleinsten Reste der Elemente (mod. q) gleich h ist, und

$$(186\text{a}) \quad N\left(s = \sum_1^\lambda a_k;\ (-1)^\lambda\right) = N\left(s = \frac{qn^2 - (q-2)n}{2};\ (-1)^n\right)$$
$$\left(a_k \equiv \pm 1, 0;\ n \equiv s \pmod{q}\right).$$

Die Zahlen $\frac{qn^2 - (q-2)n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot q$ sind aber (s. Kap. 1, Nr. 1) die Polygonalzahlen; die Formeln (185a), (186a) stellen also eine Ausdehnung des *Vahlen*schen bzw. *Legendre-Euler*schen Satzes von den Pentagonalzahlen auf alle Polygonalzahlen höherer Ordnung dar.

Für $q = 2$ geben sie, wenn die Elemente a_k je nach ihrem absolut kleinsten Reste in besondere Summen zusammengefaßt werden, die zwei folgenden:

$$(185\text{b}) \quad N\left(s = \sum_1^\lambda g_k + \sum_1^\mu u'_k + \sum_1^\nu u''_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right) = N(s = h^2;\ (-1)^h),$$

worin $\mu - \nu = h$, die Elemente g_k gerade, die Elemente u'_k, u''_k ungerade gedacht sind, und

$$(186\text{b}) \quad N\left(s = \sum_1^\lambda g_k + \sum_1^\mu u'_k + \sum_1^\nu u''_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right) = N(s = n^2;\ (-1)^n),$$

worin n, wenn von Null verschieden, positiv oder negativ gedacht werden muß, die rechte Seite dann also Null oder $2 \cdot (-1)^n$ ist, je nachdem s keine Quadratzahl oder eine Quadratzahl ist. Die Formel (185b) nimmt, wenn $\mu = \nu + h$ eingesetzt wird, die Gestalt an:

$$(185\text{c}) \quad N\left(s = \sum_1^\lambda g_k + \sum_1^{\nu+h} u'_k + \sum_1^\nu u''_k;\ (-1)^\lambda\right) = N(s = h^2),$$

woraus durch Summierung über alle zulässigen d. i. mit s gleichartigen Zahlen h

$$(186\text{c}) \quad N\left(s = \sum_1^\lambda g_k + \sum u'_k + \sum u''_k;\ (-1)^\lambda\right) = N(s = n^2)$$
$$(n \gtreqless 0)$$

hervorgeht. Bedenkt man, daß offenbar

$$N\left(s = \sum_1^\lambda g_k + \sum_1^\mu u'_k + \sum_1^\nu u''_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right)$$
$$= N\left(4s = 4\sum_1^\lambda g_k + 4\sum_1^\mu u'_k + 4\sum_1^\nu u''_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right)$$

und, wenn $2n = g$ gesetzt wird,

$$N\left(s = n^2;\ (-1)^n\right) = N\left(4s = g^2;\ (-1)^{\frac{g}{2}}\right)$$

ist, so läßt sich die Gleichung (186 b) auch schreiben, wie folgt:

$$\text{(186 bb)} \quad N\left(s = 4\sum_1^\lambda g_k + 4\sum_1^\mu u_k' + 4\sum_1^\nu u_k'';\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right)$$
$$= N\left(s = g^2;\ (-1)^{\frac{g}{2}}\right)$$
$$(g \gtreqless 0)$$

und ebenso (186 c) folgendermaßen:

$$\text{(186 cc)} \quad N\left(s = 4\sum_1^\lambda g_k + 4\sum u_k' + 4\sum u_k'';\ (-1)^\lambda\right) = N(s = g^2).$$
$$(g \gtreqless 0)$$

Die in dieser Nummer abgeleiteten Formeln sind der schon genannten Abhandlung von *Vahlen* entnommen, die wir auch ferner uns noch mehrfach zunutze machen müssen.

23. Bilden $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ eine endliche oder unendliche Menge gegebener positiver ganzer Zahlen, so sollen jetzt Zerfällungen

$$\text{(187)} \qquad s = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots$$

der Zahl s in Betracht gezogen werden, deren Elemente Zahlen jener Menge sind, die auch wiederholt auftreten dürfen, aber jedes Element a_i höchstens eine vorgeschriebene Anzahl k_i mal. Die Anzahl

$$\text{(188)} \qquad \underset{0 \overline{\gtrless} x_i \overline{\gtrless} k_i}{N(s = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots)}$$

solcher Zerfällungen von s heiße kurz N_s; die Anzahl derjenigen von ihnen, in welchen das Element a_i auftritt, also $0 < x_i \overline{\gtrless} k_i$ ist, werde mit $N_s^{a_i}$, die Anzahl der übrigen, in denen a_i nicht auftritt, also $x_i = 0$ ist, mit $N_s^{(a_i)}$ bezeichnet, so daß also

$$\text{(189)} \qquad N_s = N_s^{a_i} + N_s^{(a_i)}$$

oder

$$\text{(190)} \qquad N_s^{(a_i)} = N_s - N_s^{a_i}$$

ist. Nun folgt aus der Gleichung

$$s = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_ix_i + \cdots,$$

wenn $0 < x_i \overline{\gtrless} k_i$ ist, die andere:

$$s - a_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_i x_i' + \cdots, \tag{191}$$

worin $0 \overline{\gtrless} x_i' \overline{\gtrless} k_i - 1$, und umgekehrt; für $x_i' = k_i$ aber folgt aus letzterer Gleichung eine Zerfällung der Zahl $s - (k_i + 1) a_i$:

$$s - (k_i + 1) a_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots,$$

welche das Element a_i nicht enthält, und umgekehrt aus jeder solchen Zerfällung eine Lösung der Gleichung (191) mit $x_i' = k_i$. Die Anzahl N_{s-a_i} der Zerfällungen von $s - a_i$, in denen $0 \overline{\gtrless} x_i' \overline{\gtrless} k_i$ ist, beträgt daher die Summe der Anzahlen $N_s^{a_i}$ und $N_{s-(k_i+1)a_i}^{(a_i)}$, was in der Rekursionsformel

$$N_{s-a_i} = N_s^{a_i} + N_{s-(k_i+1)a_i}^{(a_i)}$$

oder

$$N_s^{a_i} = N_{s-a_i} - N_{s-(k_i+1)a_i}^{(a_i)} \tag{192}$$

zum Ausdrucke kommt. Verbindet man sie mit (190) und setzt k_i' zur Abkürzung für $k_i + 1$, so entsteht die Gleichung

$$N_s^{a_i} = N_{s-a_i} - N_{s-k_i'a_i} + N_{s-k_i'a_i}^{a_i},$$

woraus nun durch wiederholte Verwendung der Formeln (190) und (192) die allgemeinere Beziehung hervorgeht:

$$N_s^{a_i} = \sum_h N_{s-(hk_i'+1)a_i} - \sum_h N_{s-hk_i'a_i}, \tag{193}$$

in welcher die erste Summation auf alle Werte h von 0, die zweite von 1 ab auszudehnen ist, die den Index des Zeichens N nicht negativ machen; offenbar ist dabei $N_0 = 1$ zu setzen.

Nunmehr denke man aus den gegebenen Elementen irgendeinen Inbegriff J von Elementen ausgeschieden, für welche einzeln die Gleichung (193) aufgestellt werde. Wenn die so gebildeten Gleichungen alle summiert werden, so wird links offenbar jede Zerfällung von s von der anfangs betrachteten Art so oft gezählt, als darin verschiedene der Elemente des Inbegriffs J auftreten; die so erhaltene Anzahl heiße N_s. Ist andererseits n eine Zahl $\overline{\gtrless} s$, so wird in der Summe der Gleichungen (193) zur Rechten die Anzahl N_{s-n} so oft positiv gezählt, als n durch irgendein Element a_i des Inbegriffs J teilbar und der komplementäre Teiler von der Form $hk_i' + 1$ ist, dagegen so oft negativ, als dieser Teiler von der Form hk_i' ist. Heißt demnach δ_n der Überschuß der Anzahl der Teiler von n der ersten Art über die Anzahl der Teiler von n der zweiten Art, so geht auf die angegebene Weise aus der Gleichung (193) die folgende hervor:

(194) $$\mathsf{N}_s = \sum_{n=1}^{s} \delta_n \cdot N_{s-n}.$$

In N_s aber wird jede Zerfällung von s von der betrachteten Art eine gerade oder ungerade Anzahl mal gezählt, je nachdem sie eine gerade oder ungerade Anzahl verschiedener Elemente des Inbegriffs J aufweist; daher wird N_s (mod. 2) mit der Anzahl derjenigen Zerfällungen von s, die eine ungerade Anzahl verschiedener solcher Elemente aufweisen, kongruent sein. Nennt man $N_{u,s}$ diese letztere Anzahl, so ist also

(195) $$N_{u,s} \equiv \mathsf{N}_s \pmod{2}.$$

Wird daher die Gleichung (194) als eine Kongruenz (mod. 2) aufgefaßt, so bietet sie die Möglichkeit, Bedingungen aufzustellen, unter denen die Anzahl $N_{u,s}$ gerade oder ungerade ist. Von diesem Gesichtspunkte aus hat *Daublebsky von Sterneck* (Wien, Sitzungsberichte 105 II, 1896, S. 875) eine Reihe interessanter Ergebnisse gefunden, von denen hier ein paar charakteristische mitgeteilt werden sollen.

Wir beschränken uns dabei auf den einfachsten Fall, in welchem die Elemente a_i in der Zerfällung von s höchstens einmal auftreten dürfen, alle Zahlen k_i also gleich 1, alle k_i' gleich 2 sind. Dann bedeutet δ_n den Überschuß der Anzahl derjenigen ungeraden über die Anzahl derjenigen geraden Teiler von n, deren komplementäre Teiler Elemente des Inbegriffs J sind; δ_n ist also Null, wenn n durch keins dieser Elemente teilbar ist. Nach dem Modul 2 wird δ_n der Gesamtanzahl aller Teiler von n, deren komplementäre Teiler Elemente von J sind, oder der Anzahl solcher Elemente, welche in n aufgehen, kongruent sein.

24. Zunächst sei nun die Menge der gegebenen Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die aller positiven ganzen Zahlen, also N_s die Anzahl der Zerfällungen von s, desgleichen N_{s-n} die Anzahl der Zerfällungen von $s - n$ in lauter verschiedene positive Summanden. Da diese Gesamtzahl N_{s-n} (mod. 2) dem Unterschied zwischen der Anzahl der geraden und der der ungeraden Zerfällungen von $s - n$ kongruent ist, wird sie nach dem Pentagonalzahlensatze im allgemeinen gerade und nur in dem einen Falle ungerade sein, wenn $s - n$ eine Pentagonalzahl ist.

Dies vorausgeschickt, sei jetzt J der Inbegriff aller durch eine gegebene Zahl m teilbaren positiven Zahlen. Es kommen dann bei der Summation in (194) nur solche Zahlen $n = m\nu$ in Betracht, die ebenfalls durch m teilbar sind, und δ_n wird (mod. 2) der Gesamtanzahl aller Teiler von ν kongruent, und daher dann und nur dann ungerade sein, wenn ν ein Quadrat, also $n = mz^2$ ist. Mit

Rücksicht auf die letzte der Vorbemerkungen werden also nur diejenigen Glieder der Summe in (194) ungerade, in welchen zugleich $n = mz^2$ und $s - n$ eine Pentagonalzahl, d. h. für welche

$$s = mz^2 + \frac{3x^2 \pm x}{2} \quad (z > 0,\ x \gtreqless 0) \tag{196}$$

ist. Demnach wird N_s oder $N_{u,s}$ dann und nur dann ungerade sein, wenn die Anzahl Lösungen dieser Gleichung eine ungerade ist. Sie ist aber ebenso groß, wie die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichung:

$$24s + 1 = 24mz^2 + (6x \pm 1)^2, \quad (z > 0,\ x \gtreqless 0)$$

oder auch dieser:

$$24s + 1 = 24mz^2 + y^2, \quad (z > 0,\ y > 0)$$

denn in jeder Lösung der letzten muß offenbar y von der Form $6x \pm 1$ sein. Ist m nicht teilbar durch 4, so darf man sogar die letzte Gleichung noch durch die einfachere

$$24s + 1 = 6mu^2 + y^2 \quad (u > 0,\ y > 0) \tag{197}$$

ersetzen; in der Tat gibt jede Lösung z, y der früheren Gleichung eine Lösung $u = 2z, y$ der neuen, die ihrerseits nur Lösungen zuläßt, in denen u gerade ist, wie man sogleich sieht, wenn man bemerkt, daß y ungerade sein muß, sich also die Kongruenz $6mu^2 \equiv 0 \pmod{8}$, d. h. u gerade ergibt, und welche also zu jeder ihrer Lösungen $u = 2z, y$ eine Lösung z, y der früheren Gleichung liefert. Gesetzt nun den Fall, von den Klassen binärer quadratischer Formen mit der Determinante $-6m$ sei die Hauptklasse die einzige, durch welche Zahlen von der Form $24s + 1$ darstellbar sind, so kann bekanntlich[1]) die Anzahl ihrer Darstellungen aus der Primzahlzerlegung von $24s + 1$ entnommen werden. Dieser Fall trifft, wie *v. Sterneck* anmerkt, zu, wenn m einen der Werte 1, 2, 3, 5, 7 hat; für den ersten soll seine Betrachtung hier ausgeführt werden.

Es handelt sich dann einerseits, weil J zum Inbegriff aller positiven Zahlen wird, um die Anzahl $N_{u,s}$ der Zerfällungen von s in eine ungerade Anzahl verschiedener Zahlen, andererseits um die Anzahl der Darstellungen von $24s + 1$ mittels positiver Werte u, y durch die Form $6u^2 + y^2$. Sei

$$24s + 1 = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \cdots p_h^{\pi_h} \cdot q_1^{\varkappa_1} \cdot q_2^{\varkappa_2} \cdots \tag{198}$$

die Primzahlzerlegung von $24s + 1$, wo die p_i diejenigen Primfaktoren bezeichnen, von denen -6 quadratischer Rest, die q_i diejenigen, von welchen -6 quadratischer Nichtrest ist, und sei d^2 irgendein quadratischer Teiler von $24s + 1$. Dann setzt sich die Anzahl aller

1) S. zur folgenden Betrachtung die Lehre von den quadratischen Formen, etwa in des Verfassers Zahlentheorie, Bd. 1.

der gedachten Darstellungen von $24s+1$ aus den Anzahlen der sämtlichen eigentlichen Darstellungen der Zahlen $\frac{24s+1}{d^2}$, d. i. der Darstellungen dieser Zahlen mittels teilerfremder positiver u, y zusammen. Nun beträgt die Anzahl solcher Darstellungen einer Zahl $\frac{24s+1}{d^2}$ Null, sobald auch nur noch ein Primfaktor q_i in ihr aufgeht, was gewiß der Fall sein wird, wenn auch nur einer der Exponenten $\varkappa_i$ ungerade ist. Sind aber alle Exponenten $\varkappa_i$ gerade, so unterscheidet sich die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer Zahl $\frac{24s+1}{d^2}$ von Null nur dann, wenn diese ein Teiler von $p_1^{\pi_1}\cdot p_2^{\pi_2}\ldots p_h^{\pi_h}$ ist und beträgt dann $2^{\lambda-1}$, wenn die Zahl genau λ Primfaktoren p_i enthält, ist also gerade, sobald $\lambda>1$, ungerade, wenn $\lambda=1$ ist. Der erstere Fall wird stets eintreten, wenn mindestens zwei der Exponenten π_i ungerade sind, denn die ungeraden Exponenten in $24s+1$ bleiben ungerade auch in den Primzahlzerlegungen aller Zahlen $\frac{24s+1}{d^2}$. In den bisherigen Fällen ist mithin für jede der Zahlen $\frac{24s+1}{d^2}$ die Anzahl ihrer eigentlichen Darstellungen und daher auch die Gesamtzahl der Darstellungen von $24s+1$ gerade. — Ist aber, während die $\varkappa_i$ sämtlich gerade sind, nur ein einziger der Exponenten π_i, etwa π_1 ungerade, so gibt es auch Zahlen $\frac{24s+1}{d^2}$, welche nur einen Primfaktor haben, nämlich die Zahlen

$$p_1,\ p_1^3,\ p_1^5,\ \ldots\ p_1^{\pi_1},$$

deren jede eine eigentliche Darstellung zuläßt, und welche folglich insgesamt eine gerade oder ungerade Anzahl von Darstellungen für $24s+1$ liefern, je nachdem $\pi_1\equiv 3$ oder $\equiv 1 \pmod 4$ ist. In diesem Falle ist also auch die Gesamtzahl aller Darstellungen von $24s+1$ entsprechend gerade oder ungerade. — Wenn endlich sämtliche $\varkappa_i$ gerade und keiner der Exponenten π_i ungerade, d. h. wenn $24s+1$ eine Quadratzahl ist, so gibt es folgende Zahlen $\frac{24s+1}{d^2}$:

$$\begin{array}{l} p_1^2,\ p_1^4,\ \ldots\ p_1^{\pi_1} \\ p_2^2,\ p_2^4,\ \ldots\ p_2^{\pi_2} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ p_h^2,\ p_h^4,\ \ldots\ p_h^{\pi_h}, \end{array}$$

welche nur einen Primfaktor enthalten, also je eine eigentliche Darstellung gestatten, und demnach für $24s+1$ eine Anzahl

$$(199)\qquad \frac{1}{2}(\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_h)$$

von Darstellungen ergeben; alsdann wird also, da die Zahl $\frac{24s+1}{d^2}=1$

keine Darstellung in positiven Zahlen zuläßt, die Gesamtzahl aller Darstellungen von $24s+1$ zugleich mit dem Ausdrucke (199) gerade oder ungerade sein. Somit gelangt man schließlich zu folgendem Ausspruche:

Die Anzahl $N_{u,s}$ aller Zerfällungen von s in eine ungerade Anzahl verschiedener Summanden ist dann und nur dann ungerade, wenn in der Primzahlzerlegung (198) der Zahl $24s+1$ sämtliche $\varkappa_i$ gerade sind und zudem entweder nur ein einziger Exponent π_i ungerade und zwar $\equiv 1 \pmod{4}$, oder aber auch sämtliche Exponenten π_i gerade und zugleich der Ausdruck (199) ungerade ist.

Bei der ersteren Alternative hat $24s+1$ die Form pz^2, wo p eine Primzahl, von welcher -6 quadratischer Rest ist. Man erkennt aber leicht, daß, sooft $24s+1$ diese Form hat, p notwendig von der gleichen Form $24t+1$, mithin -6 quadratischer Rest von p sein muß. Demnach kann der Satz auch formuliert werden, wie es *v. Sterneck* getan hat, und lautet dann:

Die Anzahl aller Zerfällungen von s in eine ungerade Anzahl verschiedener Summanden ist dann und nur dann ungerade, wenn bei der Primzahlzerlegung von $24s+1$ entweder nur ein einziger Exponent ungerade und zwar $\equiv 1 \pmod{4}$, oder aber, wenn die Zahl $24s+1$ ein Quadrat ist, dabei aber die halbe Summe der Exponenten derjenigen ihrer Primfaktoren, für welche -6 quadratischer Rest ist, d. h. welche von einer der Formen $24k+1, 5, 7, 11$ sind, ungerade ist.

25. Ähnliche Sätze gelten für $m = 2, 3, 5, 7$; z. B. ist für $m = 2$ die vorige Aussage nur dahin zu ändern, daß die Anzahl aller Zerfällungen von s in lauter verschiedene Summanden, unter denen sich eine **ungerade** Anzahl **gerader** Summanden befindet, dann und nur dann ungerade ist, wenn bei der Primzahlzerlegung von $24s+1$ entweder nur ein einziger Exponent ungerade und zwar $\equiv 1 \pmod{4}$, oder aber, wenn die Zahl $24s+1$ ein Quadrat, dabei aber die halbe Summe der Exponenten derjenigen ihrer Primfaktoren, von denen -3 quadratischer Rest ist, d. h. welche von einer der Formen $24k+1, 7, 13, 19$ sind, ungerade ist.

Sei M die letztgedachte Anzahl, N dagegen die Anzahl der Zerfällungen von s in lauter verschiedene Summanden, unter denen sich eine ungerade Anzahl ungerader Summanden befindet. Betrachtet man alsdann eine Zerfällung von s in eine gerade Anzahl verschiedener Summanden, so wird sie, je nachdem unter den letzteren eine gerade oder ungerade Anzahl gerader, mithin auch eine gerade resp. ungerade Anzahl ungerader Summanden befindlich ist, resp.

weder zu den M ersteren, noch zu den N letzteren Zerfällungen gehören, oder sowohl der ersteren als der letzteren Anzahl zuzurechnen sein; in der Summe $M + N$ wird sie also entweder kein- oder zweimal gezählt werden. Eine Zerfällung von s in eine ungerade Anzahl verschiedener Summanden gehört aber entweder zu den M ersteren oder zu den N letzteren Zerfällungen und wird also in der Summe $M + N$ einmal und nur einmal gezählt. Demnach ist die Anzahl der Zerfällungen von s in eine ungerade Anzahl verschiedener Summanden der Summe $M + N$ (mod. 2) kongruent. Hieraus folgt, daß N dann und nur dann ungerade ist, wenn M und jene Anzahl weder zugleich gerade, noch zugleich ungerade sind. Aus den beiden voraufgehenden Sätzen erschließt man daher den folgenden:

Die Anzahl der Zerfällungen von s in verschiedene Summanden, unter denen eine **ungerade** Anzahl **ungerader** befindlich ist, ist dann und nur dann ungerade, wenn die Zahl $24s + 1$ ein Quadrat und zudem in ihrer Primzahlzerlegung die halbe Summe der Exponenten derjenigen ihrer Primfaktoren, welche von einer der Formen $24k + 5$, 11, 13, 19 sind, ungerade ist.

Bei der Herleitung dieser Sätze bildete der Pentagonalzahlensatz eine wesentliche Grundlage. Man kann nun, wie *v. Sterneck* a. a. O. weiter gezeigt hat, auch auf Grund des engeren Pentagonalzahlensatzes von *Vahlen* Sätze ähnlichen Charakters erhalten, von denen hier nur einer hervorgehoben und ohne Beweis kurz angeführt sei:

Die Anzahl Zerfällungen von s in eine ungerade Anzahl verschiedener Summanden, bei welchen die Summe der (mod. 3) gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden gleich h ist, ist dann und nur dann ungerade, wenn entweder $\frac{s-\varpi_h}{3}$ eine positive Quadratzahl oder $s = \varpi_h$ und h ungerade ist; dabei bedeutet ϖ_h die Pentagonalzahl $\frac{3h^2-h}{2}$.

26. Noch eine andere interessante Anwendung der Formel (194) machen wir mit *v. Sterneck*, indem wir mit $p_1, p_2, \ldots p_k$ die ersten k Primzahlen bezeichnen und nunmehr unter den gegebenen Elementen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die 2^k Glieder des entwickelten Produktes

$$(1 + p_1)(1 + p_2) \ldots (1 + p_k)$$

verstehen, den Inbegriff J aber mit der Gesamtheit dieser gegebenen Elemente zusammenfallen lassen. Die Zahl $n = 1$ ist nur durch das Element 1 des Inbegriffs J teilbar, mithin findet sich $\delta_1 = 1$. Ist $n > 1$ eine nur aus Primzahlen der Reihe $p_1, p_2, \ldots p_k$ zusammengesetzte Zahl und durch genau r derselben teilbar, so ist sie es durch genau 2^r Elemente des Inbegriffs J, daher ist die Gesamtzahl

der Teiler von n, deren komplementäre Teiler Elemente von J sind, ebenso groß, also gerade, und demnach ist auch δ_n eine gerade Zahl. Hieraus ergibt sich zunächst leicht ein neuer Beweis für die Tatsache, daß die Menge der Primzahlen unendlich ist. Gäbe es nämlich nur eine endliche Anzahl k solcher Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$, so wäre jede Zahl s sowie auch jede Zahl $n \overline{\gtrless} s$ nur aus ihnen zusammengesetzt und die Gleichung (194) nähme als Kongruenz (mod. 2) aufgefaßt die Form an:

$$\mathsf{N}_s \equiv N_{s-1}$$

oder wegen (195)

$$N_{u,\,s} \equiv N_{s-1} \pmod{2}. \tag{200}$$

Nun läßt die Zahl

$$s = (1 + p_1)(1 + p_2) \cdots (1 + p_k) - 2 \tag{201}$$

nur eine einzige Zerfällung in die gegebenen Elemente, unter denen eins gleich 2 ist, zu, und es tritt in ihr eine ungerade Anzahl $2^k - 1$ derselben, d. h. von Elementen des Inbegriffs J auf, mithin ist $N_{u,\,s} = 1$; die Zahl

$$s - 1 = (1 + p_1)(1 + p_2) \cdots (1 + p_k) - 3$$

aber läßt zwei Zerfällungen zu, je nachdem in der Summe aller gegebenen Elemente entweder die eine Zahl 3 oder die beiden Zahlen 1 und 2 unterdrückt werden; also ist $N_{s-1} = 2$; für die Zahl (201) fände also die Kongruenz (200) nicht statt, und demnach ist die Annahme einer nur endlichen Menge von Primzahlen unzulässig.

Bezeichnet nun p_{k+1} die nächstgrößere $k + 1^{\text{te}}$ Primzahl, so findet man für jede Zahl $s < p_{k+1}$, da sie nur aus Primzahlen der Reihe $p_1, p_2, \ldots, p_k$ zusammengesetzt werden kann, wieder die Kongruenz (200) oder

$$N_{u,\,s} + N_{s-1} \equiv 0 \pmod{2}. \qquad (s < p_{k+1}) \tag{202a}$$

Die Zahl $s = p_{k+1}$ aber ist nur durch das eine Element 1 des Inbegriffs J teilbar, folglich ist $\delta_{p_{k+1}} = 1$, während bis auf $\delta_1 = 1$ jedes δ_n, dessen Index $n < p_{k+1}$ ist, eine gerade Zahl ist. Aus (194) geht mithin für $s = p_{k+1}$ die Kongruenz hervor

$$\mathsf{N}_s \equiv N_{s-1} + N_0 \pmod{2},$$

d. h.

$$N_{u,\,s} + N_{s-1} \equiv 1 \pmod{2}. \qquad (s = p_{k+1}) \tag{202b}$$

Man erhält auf solche Weise ein additives Kriterium, um für jede der auf die k^{te} Primzahl folgenden Zahlen s der Reihe nach festzustellen, ob sie die nächstgrößere Primzahl sei oder nicht. In der Tat folgt aus dem Vorstehenden der Satz:

Die Anzahl der Zerfällungen von s in eine **ungerade** Anzahl verschiedener der gegebenen Elemente vermehrt um die Anzahl der Zerfällungen von $s-1$ in jede **beliebige** Anzahl derselben ist gerade oder ungerade, je nachdem s noch nicht die folgende Primzahl oder aber diese Primzahl ist.

Mannigfache Kriterien ähnlichen Charakters, denen jedoch eine praktische Bedeutung kaum zukommen kann, lassen sich angeben, wie a. a. O. zu ersehen ist, indem die Menge der gegebenen Elemente verändert wird, doch beschränken wir uns hier auf das vorstehende, das zuerst, wenn auch auf andere Weise, von *Zsigmondy* (Monatshefte f. Math. u. Phys. 5, 1894, S. 127) gegeben worden ist.

Viertes Kapitel.

Gleichzeitige Zerfällung mehrerer Zahlen.

1. Die Aufgabe, eine gegebene Zahl in Summanden einer bestimmten Art zu zerfällen, läßt sich wesentlich verallgemeinern. Seien $u, v, w, \ldots$ beliebig viel Unbestimmte und

$$f = au + bv + cw + \cdots \tag{1}$$

eine gegebene aus ihnen gebildete Linearform, so kann man eine Zerfällung derselben in vorgeschriebene, gleich gebildete Linearformen

$$\begin{cases} f_1 = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w + \cdots \\ f_2 = \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{2}$$

verlangen derart, daß — unter $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ganze Zahlen verstanden —

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \cdots \tag{3}$$

werde. Denkt man sich unter $u, v, w, \ldots$ bestimmte Zahlen verschiedener Beschaffenheit, so kann man mit den englischen Mathematikern den Ausdruck (1) als eine mehrteilige Zahl (je nach der Anzahl der $u, v, w, \ldots$ als numbre bipartite, tripartite, ..., multipartite) bezeichnen; das einfachste Beispiel wäre eine im dekadischen Systeme geschriebene Zahl, wobei dann $u, v, w, \ldots$ die verschiedenen Potenzen von 10 darstellen:

$$f = a \cdot 1 + b \cdot 10 + c \cdot 100 + \cdots$$

Die Zerfällung einer solchen mehrteiligen Zahl in andere Zahlen derselben Art oder die obgenannte Zerfällung der Linearform f in gleich-

gebildete andere kommt bei der Unabhängigkeit der Größen $u, v, w, \ldots$ voneinander offenbar auf die folgende Aufgabe zurück: das System von Gleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} a = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \cdots \\ b = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots \\ c = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

deren Anzahl derjenigen der „Teile" der Zahl bzw. der Unbestimmten $u, v, w, \ldots$ gleich ist, in ganzen (nicht negativen) Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ aufzulösen. Wir werden bei dieser Aufgabe wieder wesentlich nur die Anzahl der möglichen Lösungen untersuchen.

Beschränken wir uns vorläufig auf den Fall zweier Unbestimmten (oder auf numbers bipartite), so ist ein System von zwei Gleichungen zu lösen, denen wir besserer Übereinstimmung mit den früheren Bezeichnungen wegen folgende Form geben wollen:

$$(5) \quad \begin{cases} s = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots \\ \sigma = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \cdots, \end{cases}$$

wobei $a_1, a_2, a_3, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ gegebene positive ganze Zahlen bedeuten sollen und die Lösung in ganzen nicht negativen Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ gesucht wird. Die a_i dürfen offenbar hierbei als nicht größer als s, die α_i als nicht größer als σ gedacht werden.

2. Auch diese Aufgabe kann mit analytischen Hilfsmitteln in Angriff genommen werden. Da, nach steigenden Potenzen von x, y entwickelt,

$$\frac{1}{1 - x^{a_i} y^{\alpha_i}} = \sum_{x_i = 0}^{\infty} x^{a_i x_i} \cdot y^{\alpha_i x_i}$$

gesetzt werden kann, so ergibt sich

$$\frac{1}{(1 - x^{a_1} y^{\alpha_1})(1 - x^{a_2} y^{\alpha_2})(1 - x^{a_3} y^{\alpha_3}) \cdots} = \sum x^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots} \cdot y^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots},$$

also, wenn hier alle Glieder zusammengefaßt werden, in welchen der Exponent von x ein und denselben Wert s und zugleich der Exponent von y ein und denselben Wert σ erhält, d. h., in denen s, σ durch die Gleichungen (5) bestimmt sind, folgende Entwicklung nach steigenden Potenzen von x, y:

$$(6) \quad \frac{1}{(1 - x^{a_1} y^{\alpha_1})(1 - x^{a_2} y^{\alpha_2})(1 - x^{a_3} y^{\alpha_3}) \cdots} = \sum_{s, \sigma = 0, \cdots \infty} K_{s, \sigma} \cdot x^s y^\sigma,$$

wo demnach der Koeffizient $K_{s, \sigma}$ von $x^s y^\sigma$ die Anzahl der Lösungen der beiden Gleichungen (5) in nicht negativen

ganzen Zahlen x_i bedeutet. Diese Bedeutung des Entwicklungskoeffizienten $K_{s,\sigma}$ der links stehenden „erzeugenden Funktion" ist schon von *L. Euler* bemerkt worden. Aber erst beträchtlich später hat man erkannt, daß die Bestimmung der Anzahl $K_{s,\sigma}$ auf diejenige gewisser Denumeranten zurückkommt. Dies festgestellt zu haben, ist hauptsächlich ein Verdienst von *Sylvester*. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, die einander korrespondierenden Zahlen a_i, α_i seien teilerfremd und die Quotienten $\frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_3}{\alpha_3}, \cdots$ voneinander verschieden, so gelangt man zu der besagten Erkenntnis durch folgende, von *Cayley* (Phil. Mag. 20 (1860), S. 337) angegebene Betrachtung:

Zerlegt man den Bruch

$$\frac{1}{\left(1-x^{a_1}y^{\alpha_1}\right)\left(1-x^{a_2}y^{\alpha_2}\right)\left(1-x^{a_3}y^{\alpha_3}\right)\ldots}, \tag{7}$$

als Funktion von y betrachtet, in bekannter Weise in seine Partialbrüche, so ist derjenige Teil der Zerlegung, der sich auf den Faktor $1-x^{a_1}y^{\alpha_1}$ des Nenners bezieht, von der Form

$$\frac{A_1(x, y)}{1-x^{a_1}y^{\alpha_1}},$$

wo $A_1(x, y)$ eine ganze Funktion von y vom Grade $\alpha_1 - 1$ mit Koeffizienten ist, die rational in x sind. Für die übrigen Teile der Partialbruchzerlegung gilt Entsprechendes, so daß eine Gleichung hervorgeht von der Form:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\left(1-x^{a_1}y^{\alpha_1}\right)\left(1-x^{a_2}y^{\alpha_2}\right)\left(1-x^{a_3}y^{\alpha_3}\right)\ldots}\\ &=\frac{A_1(x, y)}{1-x^{a_1}y^{\alpha_1}}+\frac{A_2(x, y)}{1-x^{a_2}y^{\alpha_2}}+\frac{A_3(x, y)}{1-x^{a_3}y^{\alpha_3}}+\cdots\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Wird diese mit $1-x^{a_1}y^{\alpha_1}$ multipliziert und dann $y = x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}$ gesetzt, so verschwinden die Brüche zur Rechten vom zweiten an und es wird

$$\frac{1}{\left(1-x^{a_2-\frac{a_1\alpha_2}{\alpha_1}}\right)\left(1-x^{a_3-\frac{a_1\alpha_3}{\alpha_1}}\right)\cdots} = A_1\left(x, x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}\right). \tag{9}$$

Die Potenz $x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}$ hat α_1 verschiedene Werte, welche, wenn ω eine primitive Einheitswurzel des Grades α_1 bezeichnet, durch

$$x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}},\ \omega\cdot x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}},\ \omega^2\cdot x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}},\ \ldots,\ \omega^{\alpha_1-1}\cdot x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}$$

dargestellt werden können. Multipliziert man den Bruch zur Linken im Zähler und Nenner mit denjenigen Werten des Nenners, welche

den $\alpha_1 - 1$ letztgenannten Werten der Potenz entsprechen, so entsteht im Zähler eine ganze Funktion von x und $x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}$ mit rationalen Koeffizienten, die man sich in bezug auf $x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}$ unter den Grad α_1 reduziert denken kann, und die vorige Gleichung nimmt die Form an:

$$A_1\left(x, x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}\right) = \frac{a_0(x) + a_1(x) \cdot x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}} + \cdots + a_{\alpha_1 - 1}(x) \cdot x^{-(\alpha_1 - 1)\frac{a_1}{\alpha_1}}}{\left(1 - x^{\alpha_1 a_2 - a_1 \alpha_2}\right)\left(1 - x^{\alpha_1 a_3 - a_1 \alpha_3}\right) \cdots}.$$

Da $x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}$ aber jeden beliebigen Wert dieser Potenz bezeichnen kann, so erschließt man aus vorstehender Gleichung die folgende Identität:

$$A_1(x, y) = \frac{a_0(x) + a_1(x) \cdot y + \cdots + a_{\alpha_1 - 1}(x) \cdot y^{\alpha_1 - 1}}{\left(1 - x^{\alpha_1 a_2 - a_1 \alpha_2}\right)\left(1 - x^{\alpha_1 a_3 - a_1 \alpha_3}\right) \cdots}.$$

Nun ist

$$\frac{A_1(x, y)}{1 - x^{\frac{a_1}{\alpha_1}} \cdot y} = \frac{A_1(x, y)}{1 - x^{a_1} y^{\alpha_1}} \cdot \frac{1 - x^{a_1} y^{\alpha_1}}{1 - x^{\frac{a_1}{\alpha_1}} \cdot y}$$

$$= \frac{A_1(x, y)}{1 - x^{a_1} \cdot y^{\alpha_1}} \left(1 + x^{\frac{a_1}{\alpha_1}} y + x^{\frac{2a_1}{\alpha_1}} y^2 + \cdots + x^{\frac{(\alpha_1 - 1)a_1}{\alpha_1}} y^{\alpha_1 - 1}\right).$$

Da hier die Klammergröße nur gebrochene Potenzen von x enthält, kann der Koeffizient von $x^s y^\sigma$ in der Entwicklung von $\frac{A_1(x, y)}{1 - x^{a_1} \cdot y^{\alpha_1}}$ nach steigenden Potenzen von x, y kein anderer sein, als in derjenigen von $\frac{A_1(x, y)}{1 - x^{\frac{a_1}{\alpha_1}} y}$. Weil ferner die Differenz

$$A_1(x, y) - A_1\left(x, x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}\right)$$

durch $y - x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}$ also auch durch $1 - x^{\frac{a_1}{\alpha_1}} y$ teilbar ist, so kann man

$$\frac{A_1(x, y)}{1 - x^{\frac{a_1}{\alpha_1}} y} = U(x, y) + \frac{A_1\left(x, x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}\right)}{1 - x^{\frac{a_1}{\alpha_1}} y}$$

setzen, wenn man unter $U(x, y)$ eine Funktion von x, y versteht, die in bezug auf y ganz und höchstens vom Grade $\alpha_1 - 2$ ist. Der zweiten der Gleichungen (5) zufolge ist aber $\alpha_1 \gtreqless \sigma$; somit ist der Grad $\alpha_1 - 2$ kleiner als σ, die Funktion $U(x, y)$ liefert also kein Glied mit $x^s y^\sigma$ und demnach ist der Koeffizient von $x^s y^\sigma$ in der Entwicklung von $\frac{A_1(x, y)}{1 - x^{\frac{a_1}{\alpha_1}} y}$ identisch mit demjenigen von $\frac{A_1\left(x, x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}\right)}{1 - x^{\frac{a_1}{\alpha_1}} y}$, d. h. mit dem Koeffizienten von x^s in der Entwicklung von

$$A_1\left(x,\ x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}\right)\cdot x^{\frac{\sigma a_1}{\alpha_1}}$$

nach steigenden Potenzen von x. Dieser stimmt aber seinerseits mit dem Koeffizienten von $x^{s-\frac{\sigma a_1}{\alpha_1}}$ in $A_1\left(x,\ x^{-\frac{a_1}{\alpha_1}}\right)$ oder auch mit demjenigen von $x^{s\alpha_1-\sigma a_1}$ in $A_1(x^{\alpha_1},\ x^{-a_1})$, d. i. wegen (9) in der Entwicklung des Quotienten

$$\frac{1}{\left(1-x^{\alpha_1 a_2-a_1\alpha_2}\right)\left(1-x^{\alpha_1 a_3-a_1\alpha_3}\right)\ldots}$$

nach steigenden Potenzen von x überein.

Hat man solcherweise den Koeffizienten von $x^s y^\sigma$ in der Entwicklung des ersten Partialbruchs zur Rechten von (8) bestimmt, so gilt für die der anderen Partialbrüche Entsprechendes, und man gelangt zu folgendem Ergebnisse:

Um den Koeffizienten $K_{s,\sigma}$ von $x^s y^\sigma$ in der Entwicklung des Bruches

$$\frac{1}{\left(1-x^{a_1}y^{\alpha_1}\right)\left(1-x^{a_2}y^{\alpha_2}\right)\left(1-x^{a_3}y^{\alpha_3}\right)\cdots} \tag{10}$$

nach steigenden Potenzen von x, y zu finden, entwickele man die Brüche

$$(11)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\left(1-x^{\alpha_1 a_2-a_1\alpha_2}\right)\left(1-x^{\alpha_1 a_3-a_1\alpha_3}\right)\ldots}\\[2ex]\dfrac{1}{\left(1-x^{\alpha_2 a_1-a_2\alpha_1}\right)\left(1-x^{\alpha_2 a_3-a_2\alpha_3}\right)\ldots}\\[2ex]\dfrac{1}{\left(1-x^{\alpha_3 a_1-a_3\alpha_1}\right)\left(1-x^{\alpha_3 a_2-a_3\alpha_2}\right)\ldots}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

nach steigenden Potenzen von x und bestimme die Koeffizienten der Potenzen

$$x^{s\alpha_1-\sigma a_1},\ x^{s\alpha_2-\sigma a_2},\ x^{s\alpha_3-\sigma a_3},\ \ldots \tag{12}$$

in diesen Entwicklungen resp.; die Summe dieser Koeffizienten ist der verlangte Koeffizient $K_{s,\sigma}$, d. h. die Anzahl der Lösungen der Gleichungen (5) in nicht negativen ganzen Zahlen.

Man bemerke, daß die Faktoren in den Nennern der Brüche (11) nach den für die a_i, α_i gemachten Voraussetzungen nicht verschwinden können, da ihnen zufolge niemals

$$a_i\alpha_k - a_k\alpha_i = 0$$
$$(i \gtrless k)$$

ist. — Wenn der Exponent einer der Potenzen (12) negativ ausfällt, so scheidet der bezügliche Bruch (11) aus der Betrachtung aus, da

in seiner Entwicklung nach steigenden Potenzen von x keine Potenz mit negativem Exponenten auftreten kann.

3. Nun haben wir die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$ax + by + cz + \cdots = s \tag{13}$$

in nicht negativen ganzen Zahlen $x, y, z, \ldots$ den Denumeranten der Gleichung genannt und durch das Symbol

$$\frac{s}{\overline{a, b, c, \ldots}}$$

bezeichnet, gleichviel ob die Zahlen $a, b, c, \ldots$ positiv oder negativ sind. Wenn sie alle positiv sind, so stimmt dieser Denumerant mit dem Koeffizienten von x^s in der Entwicklung des Bruches

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots} \tag{14}$$

nach den steigenden Potenzen von x überein. Dies ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn eine oder mehrere der Zahlen $a, b, c, \ldots$ negativ sind. Ist z. B. a negativ gleich $-\alpha$, so hätte man, um die gedachte Entwicklung von (14) zu finden, diesen Bruch zu schreiben, wie folgt:

$$-x^\alpha \cdot \frac{1}{(1-x^\alpha)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}, \tag{15}$$

während die Gleichung (13) die Gestalt

$$-\alpha x + by + cz + \cdots = s \tag{16}$$

erhält. Nun ist offenbar der Koeffizient von x^s in der Entwicklung des Ausdrucks (15) gleich dem mit negativem Vorzeichen genommenen Koeffizienten von $x^{s-\alpha}$ in der Entwicklung des Bruches

$$\frac{1}{(1-x^\alpha)(1-x^b)(1-x^c)\cdots},$$

d. h. gleich der negativ genommenen Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$\alpha x + by + cz + \cdots = s - \alpha \tag{17}$$

in nicht negativen ganzen Zahlen $x, y, z, \ldots$ oder gleich dem Denumeranten

$$-\frac{s-\alpha}{\overline{\alpha, b, c, \ldots}}, \tag{18}$$

nicht aber gleich dem Denumeranten

$$\frac{s}{\overline{-\alpha, b, c, \ldots}}$$

der Gleichung (16).

Sylvester hat den Koeffizienten von x^s in der Entwicklung des Bruches (14) nach den steigenden Potenzen von x, falls eine oder mehrere der Zahlen $a, b, c, \ldots$ negativ sind, den Konnumeranten der Gleichung (13) genannt. Ist allein $a = -\alpha$ negativ, so wäre also dieser Konnumerant gleich dem negativ genommenen Denumeranten der Gleichung (17), und ähnlich läßt er sich stets durch den Denumeranten einer Gleichung ersetzen; sind alle $a, b, c, \ldots$ positiv, so darf man Konnumerant und Denumerant identifizieren. Bezeichnen wir also den Konnumeranten der Gleichung (13) etwa durch das Symbol

$$\left(\frac{s}{a,\ b,\ c,\ \ldots}\right),$$

so ist zu setzen

$$\left(\frac{s}{a,\ b,\ c,\ \ldots}\right) = -\frac{s-\alpha}{\alpha,\ b,\ c,\ \ldots},$$

wenn a allein negativ, $a = -\alpha$ ist, und dem für den Koeffizienten $K_{s,\sigma}$ ausgesprochenen Satze kann folgender Ausdruck gegeben werden: Die Anzahl der Auflösungen der Gleichungen (5) in nicht negativen ganzen Zahlen ist gleich der Summe der Konnumeranten folgender Gleichungen:

$$(19)\quad \begin{cases} (\alpha_1 a_2 - a_1\alpha_2)\,x_1 + (\alpha_1 a_3 - a_1\alpha_3)\,x_2 + \cdots = \alpha_1 s - a_1\sigma \\ (\alpha_2 a_1 - a_2\alpha_1)\,y_1 + (\alpha_2 a_3 - a_2\alpha_3)\,y_2 + \cdots = \alpha_2 s - a_2\sigma \\ (\alpha_3 a_1 - a_3\alpha_1)\,z_1 + (\alpha_3 a_2 - a_3\alpha_2)\,z_2 + \cdots = \alpha_3 s - a_3\sigma \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

alle diese Konnumeranten sind gewissen Denumeranten, die eventuell mit negativen Vorzeichen zu nehmen sind, gleich; die gedachte Anzahl von Lösungen ist also jederzeit ein **Aggregat** von Denumeranten.

4. Die Voraussetzungen, welche den vorstehenden Betrachtungen zugrunde lagen, sind in dem besonderen Falle erfüllt, wo es sich um die Anzahl der Auflösungen für das System der beiden Gleichungen

$$(20)\quad \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots = s \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = \sigma, \end{cases}$$

d. i. um die Anzahl der Zerfällungen der Zahl s in σ gleiche oder verschiedene Summanden der Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ handelt, falls diese Reihe aus verschiedenen Zahlen besteht. Wir heben den besonders ausgezeichneten Fall hervor, daß die Anzahl der Zerfällungen von s in σ gleiche oder verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots, n$ bestimmt werden soll. Die Gleichungen (20) nehmen dann die besondere Form an:

$$(21)\quad \begin{cases} 1\cdot x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + \cdots + n\,x_n = s \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sigma. \end{cases}$$

Wir bezeichnen die gesuchte Anzahl mit $A_{s,\sigma}^{(n)}$; sie ist der Koeffizient von $x^s y^\sigma$ in der Entwicklung des Bruches

$$\frac{1}{(1-xy)(1-x^2y)\cdots(1-x^ny)}$$

nach den steigenden Potenzen von x, y, der somit gleich

$$\sum_{s,\,\sigma=0}^{\infty} A_{s,\sigma}^{(n)}\cdot x^s y^\sigma$$

gesetzt werden kann. Man bemerke, daß $A_{0,0}^{(n)}=1$, dagegen, wenn $s>0$ ist, $A_{s,0}^{(n)}=0$ ist. Daraus folgt

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{(1-y)(1-xy)(1-x^2y)\cdots(1-x^ny)} \\ = (1+y+y^2+\cdots)\cdot \sum\limits_{s,\,\sigma} A_{s,\sigma}^{(n)}\cdot x^s y^\sigma \\ = \sum\limits_{s,\,\sigma} (A_{s,\sigma}^{(n)} + A_{s,\sigma-1}^{(n)} + A_{s,\sigma-2}^{(n)} + \cdots + A_{s,0}^{(n)})\, x^s y^\sigma. \end{cases}$$

Demnach ist, falls $s>0$,

$$(23)\qquad A_{s,1}^{(n)} + A_{s,2}^{(n)} + \cdots + A_{s,\sigma}^{(n)}$$

der Koeffizient von $x^s y^\sigma$ in der nach steigenden Potenzen von x, y fortschreitenden Entwicklung des Bruches (22), d. h. die Anzahl der Zerfällungen von s in σ gleiche oder verschiedene Zahlen der Reihe 0, 1, 2, 3, ... n; und in der Tat muß diese Anzahl der Anzahl aller Zerfällungen von s in höchstens σ gleiche oder verschiedene Summanden der Reihe 1, 2, 3, ..., n gleich sein. *Cayley* hat sie durch das Symbol

$$(24)\qquad P(0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n)_s^\sigma$$

bezeichnet, und wir wollen jetzt für diese besondere Anzahl ihre Zurückführung auf ein Aggregat von Denumeranten in der Weise von *Cayley* entwickeln.

Denkt man sich den Bruch (22) nach steigenden Potenzen von y entwickelt in der Form

$$\frac{1}{(1-y)(1-xy)(1-x^2y)\cdots(1-x^ny)} = \sum_{i=0}^{\infty} X_i y^i,$$

so geht daraus, wenn y durch xy ersetzt wird, die Beziehung

$$(1-x^{n+1}y)\cdot \sum_{i=0}^{\infty} X_i x^i y^i = (1-y)\cdot \sum_{i=0}^{\infty} X_i y^i$$

und nun ohne Mühe die Rekursionsformel

$$X_i = X_{i-1} \cdot \frac{1 - x^{n+i}}{1 - x^i},$$

also schließlich der Wert

$$X_i = \frac{(1 - x^{n+1})(1 - x^{n+2}) \ldots (1 - x^{n+i})}{(1-x)(1-x^2) \ldots (1-x^i)}$$

des Entwicklungskoeffizienten hervor. Man hat also

$$(25) \quad \frac{1}{(1-y)(1-xy) \ldots (1-x^n y)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2}) \cdots (1-x^{n+i})}{(1-x)(1-x^2) \ldots (1-x^i)} \cdot y^i,$$

wo jedoch die rechte Seite offenbar auch durch

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-x^{i+1})(1-x^{i+2}) \cdots (1-x^{i+n})}{(1-x)(1-x^2) \ldots (1-x^n)} \cdot y^i$$

ersetzt werden kann. Demzufolge wird die Größe (24), die kürzer mit P bezeichnet werde, als Koeffizient von $x^s y^\sigma$ in der Entwicklung des Bruches (22) gleich dem Koeffizienten von x^s in der nach steigenden Potenzen von x fortschreitenden Entwicklung des Ausdrucks

$$(26) \quad \frac{(1-x^{\sigma+1})(1-x^{\sigma+2}) \ldots (1-x^{\sigma+n})}{(1-x)(1-x^2) \ldots (1-x^n)}$$

sein.

Betrachten wir nun das Produkt

$$(1 + xy)(1 + x^2 y) \cdots (1 + x^n y),$$

so finden wir für dasselbe auf gleichem Wege wie die Formel (25) nachstehende Entwicklung nach steigenden Potenzen von y:

$$(1 + xy)(1 + x^2 y) \cdots (1 + x^n y)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} x^{\frac{i(i+1)}{2}} \cdot \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1}) \cdots (1-x^{n-i+1})}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^i)} \cdot y^i,$$

aus welcher für $y = -x^\sigma$ sich

$$(1 - x^{\sigma+1})(1 - x^{\sigma+2}) \cdots (1 - x^{\sigma+n})$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1}) \cdots (1-x^{n-i+1})}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^i)} \cdot x^{\frac{i(i+1)}{2} + i\sigma}$$

ergibt. Wird dieser Wert in (26) eingesetzt, so wird der erwähnte Koeffizient von x^s gleich dem derselben Potenz in

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \frac{x^{\frac{i(i+1)}{2}+i\sigma}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^i)\cdot(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{n-i})},$$

oder es ist

$$(27)\quad P=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \text{ mal Koeff. v. } x^s \text{ in } \frac{x^{\frac{i(i+1)}{2}+i\sigma}}{(1-x)\cdots(1-x^i)(1-x)\cdots(1-x^{n-i})}.$$

In dieser Formel haben wir die gewollte Zurückführung der Anzahl P auf Denumeranten. Doch vereinfachen wir deren Bestimmung noch durch folgende Erwägungen.

5. Man bedenke zunächst, daß $n\sigma$ die größte Zahl ist, welche durch σ gleiche oder verschiedene Zahlen der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots, n$ dargestellt werden kann. Daher ist

$$P(0, 1, 2, \ldots, n)_s^\sigma = 0, \text{ wenn } s > n\sigma.$$

Ist dagegen $s \overline{\gtrless} \frac{n\sigma}{2}$ und

$$s = 0\cdot x_0 + 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + \cdots + n x_n$$

eine Zerfällung von s in die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n$, bei welcher die Anzahl der Summanden

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sigma$$

ist, so ist

$$(n-0)\,x_0 + (n-1)x_1 + \cdots + (n-n)x_n = n\sigma - s$$

eine Zerfällung von $n\sigma - s$ in ebensoviel Summanden derselben Reihe, und umgekehrt. Demnach ist

$$P(0, 1, 2, \ldots, n)_{n\sigma-s}^\sigma = P(0, 1, 2, \ldots, n)_s^\sigma, \text{ wenn } s \overline{\gtrless} \frac{n\sigma}{2},$$

mithin $n\sigma - s$ zwischen $n\sigma$ und $\frac{n\sigma}{2}$ gelegen ist. Aus dieser Ursache genügt es, die Zahl P für die Fälle zu berechnen, wo $s \overline{\gtrless} \frac{n\sigma}{2}$ ist. Setzen wir also

$$s = \frac{1}{2}(n\sigma - \varrho),$$

wo ϱ eine Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots, n\sigma$ ist, für welche die rechte Seite ganzzahlig wird. Die Anzahl der Zerfällungen für diese Zahl s ist nach (27) gleich

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cdot \text{K. v. } x^{\frac{1}{2}(n\sigma-\varrho)} \text{ in } \frac{x^{\frac{i(i+1)}{2}+i\sigma}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^i)(1-x)\cdots(1-x^{n-i})} \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cdot \text{K. v. } x^{\left(\frac{1}{2}n-i\right)\sigma} \text{ in } \frac{x^{\frac{\varrho}{2}+\frac{i(i+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^i)(1-x)\cdots(1-x^{n-i})}. \end{aligned}\right.$$

Da hier, falls n ungerade, der Exponent $\frac{1}{2}n - i$ eine gebrochene Zahl wird, ist es vorzuziehen, in diesem Falle den vorstehenden Ausdruck durch den offenbar gleichen:

$$(29)\ \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \text{K. v. } x^{(n-2i)\sigma} \text{ in } \frac{x^{\varrho + i(i+1)}}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2i})(1-x^2)\cdots(1-x^{2n-2i})}$$

zu ersetzen.

Dies vorausgeschickt, verstehe man nun, je nachdem n gerade oder ungerade ist, unter λ die Zahl $\frac{1}{2}n - i$ oder $n - 2i$, und unter μ die Zahl $\frac{\varrho}{2} + \frac{i(i+1)}{2}$ oder $\varrho + i(i+1)$ resp. Dann ist das allgemeine Glied des Summenausdrucks (28) resp. (29)

$$(-1)^i \text{ mal d. Koeff. von } x^{\lambda\sigma}$$

in der Entwicklung eines Ausdrucks von der Form

$$(30)\qquad \frac{x^\mu}{f_i(x)},$$

in welchem $f_i(x)$ ein Produkt aus lauter Faktoren von der Form $1 - x^a$ ist. Bezeichnet aber α das kleinste gemeinsame Vielfache von a und λ, so ist $\frac{1-x^\alpha}{1-x^a}$ eine ganze Funktion $g(x)$, mithin

$$\frac{1}{1-x^a} = \frac{g(x)}{1-x^\alpha},$$

und, wenn diese Umformung bezüglich eines jeden der Faktoren $1 - x^a$, aus denen $f_i(x)$ sich zusammensetzt, ausgeführt wird, so geht der Bruch (30) in die Form

$$(31)\qquad \frac{x^\mu \cdot \mathfrak{G}_i(x)}{F_i(x^\lambda)}$$

über, in welcher $F_i(x^\lambda)$, $\mathfrak{G}_i(x)$ ganze Funktionen bezeichnen, deren erstere aus lauter Faktoren $1 - x^\alpha$ zusammengesetzt ist, bei denen α ein Vielfaches von λ, und welche demnach eine ganze Funktion von x^λ ist. Da nun zur Bildung des Koeffizienten von $x^{\lambda\sigma}$ in der Entwicklung von (31) offenbar nur diejenigen Potenzen der ganzen Funktion $x^\mu \cdot \mathfrak{G}_i(x)$ beitragen, deren Exponenten durch λ teilbar sind, so kann man die übrigen unterdrücken, wodurch dann aus (31) ein Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{G}_i^{(0)}(x^\lambda)}{F_i(x^\lambda)}$$

hervorgeht, dessen Nenner aus lauter Faktoren $1 - x^\alpha = 1 - x^{\lambda\beta}$ zu-

sammengesetzt ist. Hier ist aber der Koeffizient von $x^{\lambda\sigma}$ kein anderer als der Koeffizient von x^σ in der Entwicklung des Bruches

$$\frac{\mathfrak{G}_i^{(0)}(x)}{F_i(x)},$$

dessen Nenner aus lauter Faktoren $1 - x^\beta$ zusammengesetzt ist. Daher nimmt der Ausdruck (28) bzw. (29) die folgende Gestalt an:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \text{ mal Koeff. v. } x^\sigma \text{ in } \frac{\mathfrak{G}_i^{(0)}(x)}{F_i(x)},$$

d. h. aber schließlich: P ist der Koeffizient von x^σ in der Entwicklung einer gewissen rationalen Funktion

$$\frac{\mathfrak{G}(x)}{F(x)},$$

deren Nenner aus lauter Faktoren von der Form $1 - x^m$ zusammengesetzt ist. Dieser Koeffizient und folglich die Anzahl

$$P(0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)_s^\sigma$$

findet sich aber, wie in den Nummern 10—12 des vorigen Kapitels nach *Cayley* auseinandergesetzt worden ist, und erscheint so schließlich durch sogenannte Zirkulatoren ausgedrückt.[1])

6. Um ein paar Beispiele für diese Theorie zu geben, wählen wir zuerst

$$n = 3,\ s = 6,\ \sigma = 4.$$

Da alsdann $s = \frac{n\sigma}{2}$ also $\varrho = 0$ ist, erhält man nach (29)

$$P(0,\ 1,\ 2,\ 3)_6^4 =$$

$$\sum_{i=0}^{3}(-1)^i \text{ mal K. v. } x^{(3-2i)4} \text{ in } \frac{x^{i(i+1)}}{(1-x^2)\ldots(1-x^{2i})(1-x^2)\ldots(1-x^{6-2i})},$$

jedoch darf man von den Werten $i = 2,\ 3$ absehen, da die Entwicklung des unter dem Summenzeichen stehenden Bruches keine negativen Potenzen von x liefert; die Summe zieht sich dadurch auf die zwei Glieder:

$$\text{Koeff. v. } x^{12} \text{ in } \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}$$

$$-\text{ Koeff. v. } x^4 \text{ in } \frac{x^2}{(1-x^2)\cdot(1-x^2)(1-x^4)}$$

zusammen. Für das erste Glied ist $\lambda = 3$; formt man also die ein-

1) Man findet diese *Cayley*sche Betrachtung reproduziert bei *Brioschi*, Annali di mat. pura ed applicata 2 (1859), S. 265.

zelnen Faktoren desselben in der oben angegebenen Weise um, so nimmt das Glied die Gestalt an:

$$\frac{(1+x^2+x^4)(1+x^4+x^8)}{(1-x^6)(1-x^{12})(1-x^6)} = \frac{1+x^2+2x^4+x^6+2x^8+x^{10}+x^{12}}{(1-x^6)^2\cdot(1-x^{12})}$$

oder, wenn nun die überflüssigen Glieder des Zählers, deren Exponenten nicht durch $\lambda = 3$ teilbar sind, unterdrückt werden, diese einfachere:

$$\frac{1+x^6+x^{12}}{(1-x^6)^2\cdot(1-x^{12})},$$

und der Koeffizient von x^{12} in der Entwicklung dieses Bruches ist identisch mit demjenigen von x^2 in der Entwicklung von

$$\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2\cdot(1-x^2)}.$$

Für das zweite Glied ist $\lambda = 1$, dasselbe bedarf also nicht mehr der bezeichneten Umformung, und der Koeffizient von x^4 in seiner Entwicklung stimmt mit dem von x^2 in der Entwicklung von

$$\frac{x}{(1-x)^2\cdot(1-x^2)}$$

überein. Demnach wird offenbar $P(0, 1, 2, 3)_6^4$ gleich dem Koeffizienten von x^2 in der Entwicklung der Differenz

$$\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2\cdot(1-x^2)} - \frac{x}{(1-x)^2(1-x^2)} = \frac{1+x^2}{(1-x)^2\cdot(1-x^2)},$$

d. h. im Ausdrucke

$$(1+x^2)\cdot(1+2x+3x^2+\cdots)(1+x^2+\cdots) = 1+2x+5x^2+\cdots$$

und demnach findet sich

$$P(0, 1, 2, 3)_6^4 = 5.$$

In der Tat hat man nur diese fünf Zerfällungen:

$$6 = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3$$
$$6 = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 3\cdot 2 + 0\cdot 3$$
$$6 = 2\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot 3$$
$$6 = 0\cdot 0 + 3\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 3$$
$$6 = 0\cdot 0 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 0\cdot 3$$

der Zahl 6 in 4 Summanden der Reihe 0, 1, 2, 3.

Zweitens sei

$$n = 5,\ s = 6,\ \sigma = 3.$$

In diesem Falle ist $s = \frac{1}{2}(n\sigma - 3)$ also $\varrho = 3$, und nach (29) ist

$$P(0, 1, 2, 3, 4, 5)_6^3$$

$$= \sum_{i=0}^{5}(-1)^i\cdot \text{Koeff. v. } x^{(5-2i)\cdot 3} \text{ in } \frac{x^{3+i(i+1)}}{(1-x^2)\cdots(1-x^{2i})(1-x^2)\cdots(1-x^{10-2i})}.$$

Man darf aber sogleich die Glieder der Summe unterdrücken, in denen der Exponent $(5-2i)\cdot 3$ negativ oder kleiner als $3+i(i+1)$ ausfällt, und findet so einfacher

$$P(0, 1, 2, 3, 4, 5)_6^3 \tag{32}$$

$$= \text{Koeff. v. } x^{15} \text{ in } \frac{x^3}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{10})}$$

$$- \text{Koeff. v. } x^9 \text{ in } \frac{x^5}{(1-x^2)\cdot(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}.$$

Der zweite dieser Koeffizienten ist gleich demjenigen von x^4 in der Entwicklung des Bruches

$$\frac{1}{(1-x^2)\cdot(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)},$$

d. h. gleich dem Koeffizienten von x^4 in

$$\frac{1}{(1-x^2)^2\cdot(1-x^4)} = (1+2x^2+3x^4+\cdots)(1+x^4+\cdots)$$
$$= 1+2x^2+4x^4+\cdots,$$

mithin gleich 4. Um den ersten Koeffizienten zu ermitteln, welcher demjenigen von x^{12} in der Entwicklung von

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{10})}$$

gleich ist, schreiben wir den letzteren Bruch, ohne diesmal die oben angewandte Transformation zu benutzen, als das Produkt der Reihen

$$1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+\cdots$$
$$1+x^4+x^8+x^{12}+\cdots$$
$$1+x^6+x^{12}+\cdots$$
$$1+x^8+\cdots$$
$$1+x^{10}+\cdots,$$

jede derselben nur so weit fortsetzend, als die Exponenten nicht größer als 12 werden; das ebenso gebildete Produkt lautet dann:

$$1+x^2+2x^4+3x^6+5x^8+7x^{10}+10x^{12}+\cdots,$$

daher ist der zweite Koeffizient gleich 10 und demnach

$$P(0, 1, 2, 3, 4, 5)_6^3 = 10-4 = 6.$$

Die sechs vorhandenen Zerfällungen sind die folgenden:

$$6 = 0\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 3$$
$$6 = 0\cdot 0+2\cdot 1+1\cdot 4$$
$$6 = 0\cdot 0+3\cdot 2$$
$$6 = 1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 5$$
$$6 = 1\cdot 0+1\cdot 2+1\cdot 4$$
$$6 = 1\cdot 0+2\cdot 3.$$

7. Die in den beiden voraufgehenden Nummern gelöste Aufgabe hat durch *Faà di Bruno* (Math. Ann. 14, 1879, S. 241, vollständiger im Journ. f. Math. 85, 1878, S. 317) eine Behandlung gefunden, welche sich, wenn nicht in theoretischer, doch vielleicht in rechnerischer Hinsicht durch größere Einfachheit empfiehlt. Wir wissen aus der vorigen Betrachtung, daß

$$P(0, 1, 2, \ldots, n)_s^\sigma$$

der Koeffizient von x^s in der Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{(1-x^{\sigma+1})(1-x^{\sigma+2})\cdots(1-x^{\sigma+n})}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)} \tag{33}$$

nach steigenden Potenzen von x ist. Setzen wir diesen Ausdruck kurz gleich $\psi(x)$ und zerlegen Zähler und Nenner in ihre Linearfaktoren. Bezeichnet α oder auch $\frac{1}{\alpha}$ die sämtlichen Einheitswurzeln der Grade $\sigma+1, \sigma+2, \ldots, \sigma+n$, und β oder auch $\frac{1}{\beta}$ die sämtlichen Einheitswurzeln der Grade $1, 2, \ldots, n$, so läßt sich schreiben

$$\psi(x) = \frac{\prod\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)}{\prod\left(1-\frac{x}{\beta}\right)}.$$

Wenn daher

$$\sigma_i = \sum_\beta \frac{1}{\beta^i} - \sum_\alpha \frac{1}{\alpha^i} \tag{34}$$

gesetzt wird, so ergibt sich

$$\log\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}\left(\sum_\beta \frac{1}{\beta^i} - \sum_\alpha \frac{1}{\alpha^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i \cdot x^i}{i} \tag{35}$$

und hieraus durch Differenzierung

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \cdot x^{i-1}. \tag{36}$$

Übrigens läßt sich der Koeffizient σ_i früheren Bemerkungen zufolge (s. Kap. 3, Nr. 10) sehr einfach ausdrücken. Für die über alle Wurzeln α oder $\frac{1}{\alpha}$ einer Gleichung $x^d = 1$ ausgedehnte Summe

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha^i}$$

durfte $d \cdot d_i$ gesetzt werden, wenn unter d_i die Eins oder die Null

verstanden wird, je nachdem i durch d aufgeht oder nicht. Demgemäß wird offenbar

$$(37)\qquad \sigma_i$$
$$= 1 + 2 \cdot 2_i + 3 \cdot 3_i + \cdots + n \cdot n_i - (\sigma + 1) \cdot (\sigma + 1)_i - \cdots - (\sigma + n) \cdot (\sigma + n)_i.$$

Denkt man sich andererseits den Bruch $\psi(x)$ nach den steigenden Potenzen von x entwickelt und setzt so

$$(38)\qquad \psi(x) = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots,$$

so kommt

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \cdots}{1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots}$$

und nun durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit (36) die Beziehung

$$C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \cdots = (1 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \cdot x^{i-1},$$

woraus die folgenden Rekursionsformeln

$$(39)\qquad \begin{cases} \sigma_1 - C_1 = 0 \\ \sigma_2 + C_1\sigma_1 - 2C_2 = 0 \\ \sigma_3 + C_1\sigma_2 + C_2\sigma_1 - 3C_3 = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sigma_s + C_1\sigma_{s-1} + C_2\sigma_{s-2} \cdots + C_{s-1}\sigma_1 - sC_s = 0 \\ \cdot \end{cases}$$

hervorgehen. Sie haben die größte Ähnlichkeit mit den *Newton*schen Formeln, welche zwischen den Koeffizienten einer algebraischen Gleichung und den Potenzsummen ihrer Wurzeln bestehen. Nimmt man die Gleichung vom Grade s:

$$x^s + A_1 x^{s-1} + A_2 x^{s-2} + \cdots + A_s = 0$$

an und bezeichnet die Potenzsummen der Wurzeln mit S_1, S_2, S_3, ..., so lauten bekanntlich jene Formeln wie folgt:

$$(40)\qquad \begin{cases} S_1 + A_1 = 0 \\ S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ S_s + A_1 S_{s-1} + \cdots + A_{s-1} S_1 + sA_s = 0 \end{cases}$$

und werden also mit den ersten s der Gleichungen (39) identisch, wenn man setzt

$$(41)\qquad \sigma_i = -S_i,\ C_i = A_i.$$

Nun findet sich aber aus den *Newton*schen Formeln (40), wie etwa

in *J. A. Serrets* Handbuch der höheren Algebra (deutsch von Wertheim) 1868, 1. Bd. S. 363 zu ersehen ist, für A_s der Ausdruck[1]):

$$A_s = \sum \frac{(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_s}}{i_1!\, i_2! \ldots i_s!} \cdot \left(\frac{S_1}{1}\right)^{i_1} \cdot \left(\frac{S_2}{2}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{S_i}{s}\right)^{i_s},$$

worin die Summation über alle nicht negativen ganzen Zahlen i_1, $i_2, \ldots, i_s$ auszudehnen ist, welche der Gleichung

$$1 \cdot i_1 + 2 \cdot i_2 + \cdots + s \cdot i_s = s$$

genügen. Hiernach bestimmt sich also auch C_s durch die Formel

$$(42) \qquad C_s = \sum \frac{1}{i_1!\, i_2! \ldots i_s!} \cdot \left(\frac{\sigma_1}{1}\right)^{i_1} \cdot \left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{\sigma_s}{s}\right)^{i_s}.$$

Doch kann man dieser Formel eine elegantere symbolische Gestalt geben, wenn man bemerkt, daß nach dem polynomischen Lehrsatze

$$(\delta + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_s x^s)^s$$

$$= \sum \frac{s!}{i_0!\, i_1!\, i_2! \ldots i_s!} \cdot \delta^{i_0} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \cdots \alpha_s^{i_s} \cdot x^{i_1+2i_2+\cdots+si_s}$$

$$= \sum_{r \gtreqless 0} \left(x^r \cdot \sum \frac{s!}{i_0!\, i_1! \ldots i_s!} \cdot \delta^{i_0} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \cdots \alpha_s^{i_s} \right)$$

gesetzt werden kann, wo die innere Summation sich auf alle nicht negativen ganzen Zahlen $i_0, i_1, i_2, \ldots i_s$ erstreckt, für welche zugleich

$$i_0 + i_1 + i_2 + \cdots + i_s = s$$

und

$$1 \cdot i_1 + 2\, i_2 + \cdots + s \cdot i_s = r$$

ist. Demnach wird der Koeffizient von x^s gleich

$$(43) \qquad \sum \frac{s!}{i_0!\, i_1! \ldots i_s!} \cdot \delta^{i_0} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \cdots \alpha_s^{i_s},$$

worin gleichzeitig

$$i_0 + i_1 + i_2 + \cdots + i_s = s$$

$$1 \cdot i_1 + 2\, i_2 + \cdots + s \cdot i_s = s$$

ist. Würde hier δ^{i_0} durch $i_0!$ ersetzt, so entstünde die in gleicher Ausdehnung zu nehmende Summe

$$s! \sum \frac{1}{i_1!\, i_2! \ldots i_i!} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \cdots \alpha_s^{i_s},$$

deren Umfang jedoch, da die erste der Bedingungen nur aussagt, daß $i_1 + i_2 + \cdots + i_s$ nicht größer als s ist, was aus der zweiten derselben

1) Dieser Ausdruck ist zuerst von *E. Waring* (Misc. analytica 1762, S. 9, Corollar. I) gegeben und in seinen Meditat. algebraicae 1782, S. 15 bewiesen worden. S. darüber *L. Saalschütz*, Biblioth. Math. (3) 9, S. 65.

von selbst schon folgt, jetzt einfacher dahin zu fassen ist, daß sie alle der zweiten Bedingung genügenden Zahlensysteme $i_1, i_2, \ldots, i_s$ umfasse. Da der letzte Ausdruck sich aber, wenn $\alpha_i = \frac{\sigma^i}{i}$ gesetzt und dann durch $s!$ dividiert wird, in den Ausdruck (42) für C_s verwandelt, so erkennt man C_s als den Koeffizienten von x^s in der Entwicklung der symbolischen Potenz

$$\frac{1}{s!}\left(\delta + \frac{\sigma_1 x}{1} + \frac{\sigma_2 x^2}{2} + \cdots + \frac{\sigma_s x^s}{s}\right)^{(s)}, \tag{44}$$

die so zu verstehen ist, daß nach geschehener Entwicklung der s^{ten} Potenz überall statt der Potenzen δ^{i_0} die Fakultäten $i_0!$ gesetzt werden. Da bei Bestimmung dieses Koeffizienten Potenzen von x, welche höher als die s^{te} sind, zu vernachlässigen sind, kann im Ausdrucke (44) unbedenklich die in der Klammer stehende Größe durch die folgende:

$$\delta + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i x^i}{i} = \delta + \log \psi(x)$$

ersetzt werden, endlich also mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\psi(x)$ wie von C_s folgender Satz ausgesprochen werden:

Die Anzahl

$$P(0, 1, 2, \ldots, n)_s^\sigma$$

der Zerfällungen von s in höchstens σ gleiche oder verschiedene Summanden der Reihe $1, 2, 3, \ldots, n$ ist gleich dem Koeffizienten von x^s in der symbolischen Potenz

$$\frac{1}{s!}\left(\delta + \log \cdot \frac{(1-x^{\sigma+1})(1-x^{\sigma+2})\ldots(1-x^{\sigma+n})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}\right)^{(s)}. \tag{45}$$

Wird die gleiche Betrachtung statt auf die durch den Ausdruck (33) gegebene Funktion $\psi(x)$ auf die Funktion

$$\chi(x) = \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots(1-x^l)}$$

angewandt, so ändert sich daran offenbar nichts weiter, als daß die Größen (34) durch die folgenden:

$$\sigma_i = \sum_\beta \frac{1}{\beta^i},$$

in welchen die Summation auf sämtliche Einheitswurzeln β der Grade $a, b, c, \ldots, l$ auszudehnen ist, ersetzt werden. Man gelangt dann zu dem völlig analogen Ergebnisse:

Die Anzahl

$$\overline{\overline{\frac{s}{a, b, c, \ldots, l}}} \tag{46}$$

der Zerfällungen von s in gleiche oder verschiedene Summanden der Reihe $a, b, c, \ldots, l$ ist gleich dem Koeffizienten von x^s in der symbolischen Potenz

$$(47) \qquad \frac{1}{s!}\left(\delta + \log. \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots(1-x^l)}\right)^{(s)}.$$

Auf solche Art ist eine neue, von den von *Cayley* und von *Sylvester* gegebenen völlig verschiedene Bestimmungsweise des Denumeranten (46) erreicht, die zur numerischen Bestimmung desselben vielfach günstiger erscheint.

Um wenigstens je ein Beispiel zu geben, suchen wir zuerst wieder die Anzahl der Zerfällungen der Zahl 6 in höchstens 3 Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4, 5. Sie ist nach (45) der Koeffizient von x^6 in der Entwicklung von

$$\frac{1}{6!}\left(\delta + \log. \frac{(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right)^{(6)},$$

d. i. in Anwendung der bekannten Potenzreihe für $\log(1-z)$ und mit Vernachlässigung von höheren Potenzen von x als die sechste der Koeffizient von x^6 in der Entwickelung von

$$\frac{1}{6!}\left(\delta + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right)^{(6)}.$$

Nach Substitution von $i!$ für δ^i findet er sich gleich $\frac{1}{720}$ mal

$$15 \cdot 24\left(\frac{2}{5} + \frac{9}{4} + \frac{16}{9}\right) + 20 \cdot 6\left(\frac{27}{8} + \frac{9}{4} + 12\right)$$
$$+ 15 \cdot 2\left(\frac{16}{3} + \frac{27}{2}\right) + 6 \cdot \frac{15}{2} + 1,$$

d. i. gleich 6, wie in Nr. 6.

Handelt es sich ferner um die Bestimmung des Denumeranten der Gleichung

$$2x + 3y + 5z = 8,$$

d. h. um die Werte $s = 8$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, so ergibt er sich nach (47) als Koeffizient von x^8 in der Entwicklung der symbolischen Potenz

$$\frac{1}{8!}\left(\delta + \log. \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}\right)^{(8)},$$

d. i. in der Entwicklung von

$$\frac{1}{8!}\left(\delta + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + x^5 + \frac{5}{6}x^6 + \frac{x^8}{4}\right)^{(8)}.$$

Nach Substitution von $i!$ statt δ^i in der letzteren findet man ihn gleich $\frac{1}{8!}$ mal

$$7!\;8\cdot\frac{1}{4}+6!\;28\left(\frac{10}{6}+\frac{1}{4}+2\right)+5!\;56\left(\frac{3}{2}+3\right)+4!\;70$$

oder vereinfacht

$$\frac{8}{\overline{2,\;3,\;5}}=3.$$

8. Da wir mit $A_{s,\sigma}^{(n)}$ die Anzahl der Zerfällungen von s in σ gleiche oder ungleiche Summanden der Reihe $1, 2, 3, \ldots, n$ bezeichnet haben, wird die Summe

$$A_{s,0}^{(n)}+A_{s,1}^{(n)}+A_{s,2}^{(n)}+\cdots+A_{s,r}^{(n)} \tag{48}$$

die Anzahl der Zerfällungen von s in nicht mehr als r gleiche oder verschiedene Summanden, die nicht größer als n sind, bezeichnen. Nun ist offenbar nr die größte Zahl, die aus solchen Summanden entstehen kann. Bildet man daher die Summe (48) für alle Werte von $s \overline{\gtrless} nr$, so erhält man in dem Ausdrucke

$$\sum_{s=0}^{nr}\left(A_{s,0}^{(n)}+A_{s,1}^{(n)}+A_{s,2}^{(n)}+\cdots+A_{s,r}^{(n)}\right) \tag{49}$$

die Anzahl der Zerfällungen in nicht mehr als r gleiche oder verschiedene, die Zahl n nicht übersteigende Summanden, deren alle Zahlen zusammen fähig sind. Auch diese Anzahl kann als ein Entwicklungskoeffizient gedeutet werden (s. *Mac Mahon*, London Phil. Trans. 1896 vol. 187, S. 619). Da $A_{s,\sigma}^{(n)}$ der Koeffizient von $x^s y^\sigma$ in der Entwicklung des Quotienten

$$\frac{1}{(1-xy)(1-x^2y)\cdots(1-x^ny)}$$

oder, was dasselbe sagt, das von x, y unabhängige Glied in der Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{1}{(1-xy)(1-x^2y)\cdots(1-x^ny)}\cdot\frac{1}{x^s y^\sigma}$$

darstellt, so findet sich der Ausdruck (49) ersichtlich als das von x, y unabhängige Glied in der Entwicklung der Doppelsumme

$$\sum_{s=0}^{nr}\sum_{\sigma=0}^{r}\frac{1}{(1-xy)(1-x^2y)\cdots(1-x^ny)}\cdot\frac{1}{x^s y^\sigma}$$

$$=\frac{1}{(1-xy)(1-x^2y)\cdots(1-x^ny)}\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x^{nr}}\right)\left(1+\frac{1}{y}+\cdots+\frac{1}{y^r}\right)$$

$$=\frac{1}{(1-xy)(1-x^2y)\cdots(1-x^ny)}\cdot\frac{1}{x^{nr}y^r}\cdot(1+y+\cdots+y^r)(1+x+\cdots+x^{nr}).$$

Hier darf man aber die Potenzreihen ins Unendliche fortsetzen, da so nur Glieder hinzutreten, welche positive Potenzen entweder von x

oder von y liefern, das von x, y unabhängige Glied der Entwicklung also nicht verändern. Somit ist die Größe (49) das konstante Glied in der Entwicklung von

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-xy)(1-x^2y)\cdots(1-x^ny)}\cdot\frac{1}{x^{nr}y^r}$$

oder der Koeffizient von $x^{nr}y^r$ in der Entwicklung des Bruches

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-xy)(1-x^2y)\cdots(1-x^ny)}$$

nach steigenden Potenzen von x, y.

Dieser Koeffizient hat einen sehr einfachen Wert, es besteht nämlich der Satz: Die Anzahl Zerfällungen aller Zahlen in nicht mehr als r gleiche oder verschiedene Summanden, welche nicht größer als n sind, ist dem Binomialkoeffizienten $\binom{n+r}{n}$ gleich. Dies erkennt man auf ganz elementare Weise folgendermaßen. Alle solche Zerfällungen, deren alle Zahlen zusammen fähig sind, erhält man offenbar, wenn man zunächst keine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$, dann diese Zahlen entweder einzeln nimmt, oder sie zu je zwei, zu je drei, ..., endlich zu je r gleichen oder verschiedenen addiert; dies gibt der Reihe nach

$$1,\ \frac{n}{1},\ \frac{n(n+1)}{1\cdot 2},\ \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \ldots,\ \frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{1\cdot 2\cdots r}$$

Zerfällungen. Da

$$\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+h-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h}=\frac{(1+h)(2+h)\cdots(n-1+h)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$$

ist, läßt sich die Summe vorstehender Zahlen, d i. die gedachte Anzahl von Zerfällungen schreiben, wie folgt:

$$\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}+\frac{2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdots(n-1)}+\cdots+\frac{(1+r)(2+r)\cdots(n-1+r)}{1\cdot 2\cdots(n-1)},$$

eine Summe, welche nach Kap. 1, Nr. 3 gleich

$$\frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+n)}{1\cdot 2\cdots n}=\binom{n+r}{n}$$

ist, wie behauptet.

9. Haben wir bisher die Aufgabe der gleichzeitigen Zerfällung mehrerer Zahlen wesentlich mit analytischen Mitteln behandelt, so wollen wir nunmehr versuchen, sie rein arithmetisch zu lösen. Wir beginnen mit einem ausgezeichneten Falle der in den letzten Nummern behandelten Aufgabe, nämlich mit der Bestimmung der Anzahl der Zerfällungen einer Zahl s in σ gleiche oder verschiedene Summanden der Reihe $1, 2, 3, \ldots, s$, d. h. der Anzahl Lösungen der beiden Gleichungen

$$(50)\qquad \begin{cases} 1\cdot x_1 + 2x_2 + \cdots + s\cdot x_s = s \\ x_1 + x_2 + \cdots + \phantom{s\cdot{}} x_s = \sigma \end{cases}$$

in nicht negativen ganzen Zahlen x_i. Diesem Falle hat *E. Sadun* (Ann. di Mat. (2) 15 (1887/8), S. 209) eine besondere Arbeit gewidmet, wovon hier das Wichtigste mitgeteilt werde. Zur Abkürzung stehe dabei statt des bisherigen Zeichens $A^{(s)}_{s,\sigma}$ das Zeichen $A_{s,\sigma}$; wir setzen ferner

$$(51)\qquad A_{s,1} + A_{s,2} + \cdots + A_{s,s} = A_s.$$

Von vornherein leuchtet die Gleichung

$$(52)\qquad A_{s,\sigma} = 0, \text{ wenn } \sigma > s \text{ ist,}$$

ein, da die linke Seite der zweiten Gleichung (50) nie größer sein kann als die linke Seite der ersten. Demnach setzen wir fortan stets $\sigma \overline{\gtrless} s$ voraus. Dann besteht der Satz:

Die Anzahl der Auflösungen der beiden Gleichungen (50) ist ebenso groß, wie die Anzahl derjenigen Auflösungen der Gleichung

$$(53)\qquad 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + \cdots + \sigma\cdot x_\sigma = s,$$

bei welchen x_σ positiv ist.

Wir nehmen zuerst $\sigma > 1$ an. Unterdrückt man dann in der Gleichung die Größen x_i, welche Null sind, so nimmt sie, falls $x_\sigma > 0$, die Gestalt an:

$$(54)\qquad i_1\cdot x_{i_1} + i_2\cdot x_{i_2} + \cdots + i_{m-1}\cdot x_{i_{m-1}} + \sigma\cdot x_\sigma = s,$$

wo m eine Zahl $\overline{\gtrless}\, \sigma$, $i_1, i_2, \ldots i_{m-1}$ aber verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots, \sigma - 1$ sind, welche der Größe nach steigend gedacht werden können, so daß

$$0 < i_1 < i_2 \cdots < i_{m-1} < \sigma,$$

also

$$\begin{aligned} \sigma - i_{m-1} &= y_{k_1} \\ i_{m-1} - i_{m-2} &= y_{k_2} \\ &\cdots\cdots \\ i_2 - i_1 &= y_{k_{m-1}} \\ i_1 &= y_{k_m} \end{aligned}$$

positive ganze Zahlen sind; die Zahlen $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{m-1}}$ sind sämtlich positiv gedacht, so daß $k_1, k_2, \ldots, k_m$, wenn man

$$\begin{aligned} k_1 &= x_\sigma \\ k_2 &= x_\sigma + x_{i_{m-1}} \\ &\cdots\cdots \\ k_m &= x_\sigma + x_{i_{m-1}} + \cdots + x_{i_2} + x_{i_1} \end{aligned}$$

setzt, wachsende positive Zahlen sind, welche der Reihe 1, 2, ..., s angehören, da wegen (54) offenbar $k_m \overline{\overline{<}} s$. Da nun

$$y_{k_1} + y_{k_2} + \cdots + y_{k_m} = \sigma$$

ist, und

$$k_1 \cdot y_{k_1} + k_2 \cdot y_{k_2} + \cdots + k_m \cdot y_{k_m}$$

leicht gleich

$$x_\sigma \cdot \sigma + x_{i_{m-1}} \cdot i_{m-1} + \cdots + x_{i_1} \cdot i_1,$$

d. h.

$$k_1 \cdot y_{k_1} + k_2 \cdot y_{k_2} + \cdots + k_m \cdot y_{k_m} = s$$

gefunden wird, so ergibt sich aus jeder der gedachten Lösungen der Gleichung (53) eine Lösung des Systems (50). Aber auch umgekehrt. Denn wegen der zweiten der Gleichungen (50) kann nur eine Anzahl $m \overline{\overline{<}} \sigma$ der Zahlen x_i von Null verschieden sein; sie mögen nach der wachsenden Größe ihrer Indices geordnet $y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots, y_{k_m}$ heißen; dadurch nimmt die erste dieser Gleichungen die Gestalt an:

$$k_1 \cdot y_{k_1} + k_2 \cdot y_{k_2} + \cdots + k_m \cdot y_{k_m} = s,$$

während

$$y_{k_1} + y_{k_2} + \cdots + y_{k_m} = \sigma$$

ist. Setzt man nun

$$\begin{aligned} i_1 &= y_{k_m} \\ i_2 &= y_{k_m} + y_{k_{m-1}} \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ i_{m-1} &= y_{k_m} + y_{k_{m-1}} + \cdots + y_{k_2} \\ \sigma &= y_{k_m} + y_{k_{m-1}} + \cdots + y_{k_2} + y_{k_1}, \end{aligned}$$

so sind $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}$ wachsende Zahlen der Reihe 1, 2, 3, ..., $\sigma - 1$, ferner sind die durch die folgenden Gleichungen definierten Zahlen

$$\begin{aligned} x_{i_1} &= k_m - k_{m-1} \\ x_{i_2} &= k_{m-1} - k_{m-2} \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{i_{m-1}} &= k_2 - k_1 \\ x_\sigma &= k_1 \end{aligned}$$

positiv, und es ergibt sich ohne weiteres, daß sie die Gleichung (54) erfüllen; demnach geht in der Tat aus jeder Lösung der Gleichungen (50) eine Auflösung der Gleichung (53) hervor, in welcher $x_\sigma = k_1$ positiv ist. Hiermit ist der behauptete Satz für $\sigma > 1$ bewiesen. Aus ihm folgt aber, daß für $\sigma > 1$ die Anzahl $A_{s,\sigma}$ der Lösungen des Systems (50) gleich der Anzahl der Auflösungen aller Gleichungen von der Gestalt

(55) $$1 \cdot x_1 + 2x_2 + \cdots + (\sigma - 1)x_{\sigma-1} = s - \sigma \cdot x_\sigma$$
$$\text{für } x_\sigma = 1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{s}{\sigma}\right]$$

ist; man hat mit anderen Worten, wenn man sich des früheren Zeichens $\gamma_{\sigma, s}$ für den Denumeranten $\dfrac{s}{1, 2, \ldots, \sigma}$ bedient, für $\sigma > 1$ die Beziehung

(56) $$A_{s, \sigma} = \gamma_{\sigma-1, s-\sigma} + \gamma_{\sigma-1, s-2\sigma} + \cdots + \gamma_{\sigma-1, s-\left[\frac{s}{\sigma}\right]\sigma},$$

durch welche die gesuchte Anzahl unmittelbar auf Denumeranten zurückgeführt ist.

Der ausgesprochene Satz gilt aber auch für $\sigma = 1$. Denn die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$1 \cdot x_1 = s$$

bei positivem x_1 ist 1, ebenso groß aber auch $A_{s,1}$, da aus der Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_s = 1$$

nur eine der Zahlen x_i von Null verschieden, nämlich gleich 1, und nun aus der Gleichung

$$1 \cdot x_1 + 2x_2 + \cdots + s\, x_s = s$$

hervorgeht, daß dieses die Zahl x_s sein muß.

Wenn $\sigma = 2$ ist, folgt aus (56)

$$A_{s, 2} = \gamma_{1, s-2} + \gamma_{1, s-4} + \cdots + \gamma_{1, s-2 \cdot \left[\frac{s}{2}\right]},$$

d. h.

(a) $$A_{s, 2} = \left[\frac{s}{2}\right].$$

Für $\sigma = 3$ ergibt sich aus (56) zunächst

$$A_{s, 3} = \gamma_{2, s-3} + \gamma_{2, s-6} + \cdots + \gamma_{2, s-3 \cdot \left[\frac{s}{3}\right]}$$

oder

$$A_{s, 3} = \sum_{\xi=1}^{\left[\frac{s}{3}\right]} \gamma_{2, s-3\xi}.$$

Nun ist aber nach (36b) des vorigen Kapitels

$$\gamma_{2, s-3\xi} = \sum_{\eta=0}^{\left[\frac{s-3\xi}{2}\right]} \gamma_{1, s-2\eta-3\xi} = 1 + \left[\frac{s-3\xi}{2}\right],$$

daher verwandelt sich die vorige Gleichung in die Formel:

(b) $$A_{s, 3} = \left[\frac{s}{3}\right] + \sum_{\xi=1}^{\left[\frac{s}{3}\right]} \left[\frac{s-3\xi}{2}\right].$$

Ebenso kommt für $\sigma = 4$ zunächst

$$A_{s,4} = \sum_{\xi=1}^{\left[\frac{s}{4}\right]} \gamma_{3,\,s-4\xi}.$$

Man hat aber

$$\gamma_{3,\,s-4\xi} = \sum_{\eta=0}^{\left[\frac{s-4\xi}{3}\right]} \gamma_{2,\,s-3\eta-4\xi}$$

und

$$\gamma_{2,\,s-3\eta-4\xi} = \sum_{\zeta=0}^{\left[\frac{s-3\eta-4\xi}{2}\right]} \gamma_{1,\,s-2\zeta-3\eta-4\xi}$$

$$= 1 + \left[\frac{s-3\eta-4\xi}{2}\right].$$

Daraus folgt

$$\gamma_{3,\,s-4\xi} = 1 + \left[\frac{s-4\xi}{3}\right] + \sum_{\eta=0}^{\left[\frac{s-4\xi}{3}\right]} \left[\frac{s-3\eta-4\xi}{2}\right]$$

und nunmehr endlich

$$A_{s,4} = \left[\frac{s}{4}\right] + \sum_{\xi=1}^{\left[\frac{s}{4}\right]} \left[\frac{s-4\xi}{3}\right] + \sum_{\xi=1}^{\left[\frac{s}{4}\right]} \left[\frac{s-4\xi}{2}\right] + \sum_{\xi=1}^{\left[\frac{s}{4}\right]} \sum_{\eta=1}^{\left[\frac{s-4\xi}{3}\right]} \left[\frac{s-3\eta-4\xi}{2}\right].$$

Usw. —

Die Formel (56) läßt sich aber einfacher schreiben. Zunächst ist

$$A_{s,\sigma} = \sum_{\xi=0}^{\left[\frac{s}{\sigma}\right]} \gamma_{\sigma-1,\,s-\xi\sigma} - \gamma_{\sigma-1,\,s},$$

wofür jedoch nach Kap. 3, Formel (36b)

$$A_{s,\sigma} = \gamma_{\sigma,\,s} - \gamma_{\sigma-1,\,s},$$

d. h. nach Formel (36a) daselbst

$$A_{s,\sigma} = \gamma_{\sigma,\,s-\sigma} \tag{57}$$

gesetzt werden kann. Man erhält demnach den Satz:

Die Anzahl der Lösungen der beiden Gleichungen (50) ist ebenso groß, wie die der Lösungen der einzelnen Gleichung

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \cdots + \sigma \cdot x_\sigma = s - \sigma, \tag{58}$$

oder: die Anzahl der Zerfällungen der Zahl s in σ gleiche oder verschiedene Summanden der Reihe $1, 2, 3, \ldots, s$, d. h. aber in σ positive Summanden mit Wiederholung ist gleich

der Anzahl der Zerfällungen der Zahl $s - \sigma$ in gleiche oder verschiedene Summanden der Reihe $1, 2, 3, \ldots, \sigma$. So sind wir auf anderem Wege zu einem Satze zurückgekehrt, den wir schon in Kap. 3 in der Formel (24a) erhalten haben, und erkennen die Identität der Anzahl $A_{s,\sigma}$ mit der dort durch $\Gamma_{\sigma,s}$ bezeichneten Anzahl, die wir von vornherein hätten bemerken können. Der Definitionsgleichung (51) zufolge ist also die Zahl A_s mit Γ_s, d. i. mit der Anzahl aller Zerfällungen der Zahl s überhaupt identisch.

Falls $\sigma \overline{\gtrless} s - \sigma$, stimmt die Anzahl Lösungen für die Gleichung (58) offenbar mit der für die Gleichung

$$(59) \qquad 1 \cdot x_1 + 2x_2 + \cdots + (s - \sigma) \cdot x_{s-\sigma} = s - \sigma$$

überein, da die x_i mit jedem Index $i > s - \sigma$ verschwinden müssen. Demnach ist für $\sigma \overline{\gtrless} s - \sigma$

$$(60) \qquad A_{s,\sigma} = \gamma_{s-\sigma, s-\sigma} = \Gamma_{s-\sigma} = A_{s-\sigma},$$

d. i. die Anzahl der Zerfällungen der Zahl s in σ gleiche oder verschiedene positive Summanden der Anzahl aller Zerfällungen der Zahl $s - \sigma$ überhaupt gleich (vgl. Kap. 3, Formel [142a]).

10. *Euler* hat zuerst (Algebra II, Kap. 2) die Aufgabe behandelt, die positiven ganzen Zahlen zu finden, welche zweien Gleichungen mit mehr als zwei Unbestimmten genügen; das hierzu von ihm angewandte Verfahren bezeichnet er als die regula coeci oder an anderer Stelle (N. Comm. 14, I, 1769, S. 168 oder Comm. arithm. coll. I, S. 400) als regula virginum, Bezeichnungen, deren Bedeutung fraglich ist. Eine Regel zur Bestimmung der Anzahl der Lösungen hat aber *Euler* nicht gegeben. Dagegen ist es *Sylvester*, wie er in seiner Note in dem Phil. Mag. 16 (1858), S. 371 angibt, geglückt, zu zeigen, daß diese Bestimmung jederzeit auf den Fall der einfachen Zerfällung von Zahlen, d. h. auf Denumeranten einzelner Gleichungen zurückkommt. *Sylvester* hat dabei nicht nur den Fall zweier Gleichungen, sondern den allgemeinsten Fall von r linearen Gleichungen mit $n > r$ Unbestimmten in Betracht gezogen und einen allgemeinen Satz festgestellt, dem er in der angegebenen Note verschiedenen Ausdruck leiht. Nach diesem Satze kommt die Bestimmung der Anzahl positiver ganzzahliger Lösungen eines beliebigen Systems von Gleichungen immer auf die gleiche Bestimmung für ein oder mehrere Systeme von Gleichungen einer gewissen Normalform zurück. Liegt aber ein solches Normalsystem von r Gleichungen zwischen $n > r$ Unbestimmten vor, so hängt die Bestimmung der Anzahl seiner Lösungen wieder ab von der gleichen Bestimmung für $\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdots (r-1)}$ Einzelgleichungen, die aus jenem Systeme durch Elimination hervorgehen, und die gesuchte Anzahl findet sich als ein Aggregat

gewisser Vielfachen der Denumeranten dieser Einzelgleichungen. An anderer Stelle (outlines of seven lectures on the partition of numbers, Proceed. London Math. Soc. 28, S. 33) hat *Sylvester* von Vorlesungen, in welchen er seine bezüglichen Untersuchungen vorgetragen, eine kurze Skizze veröffentlichen lassen. Doch bedarf diese Darstellung noch sehr einer nachspürenden Ausführung; es ist bisher mir nicht gelungen, den ausgesprochenen allgemeinen Satz daraus herzuleiten. An dieser Stelle wollen wir uns daher wieder auf den zuvor mit analytischen Hilfsmitteln behandelten Fall zweier Gleichungen beschränken, um wenigstens einige der hauptsächlichsten Ergebnisse der *Sylvester*schen Arbeit zu entwickeln.

11. Seien die beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} ax + by + cz + \cdots &= s \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots &= \sigma \end{aligned}\right. \tag{61}$$

in nicht negativen ganzen Zahlen $x, y, z, \ldots$ aufzulösen. Wir nehmen zuvörderst an, daß die Koeffizienten der gleichen Unbestimmten beider Gleichungen: a, α; b, β; c, γ; ... zueinander teilerfremd, und daß die Verhältnisse $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}, \cdots$ voneinander verschieden sind. Das System beider Gleichungen heiße $S(x, y, z, \ldots)$ und die Gleichung, welche daraus durch Elimination von x oder y oder $z, \ldots$ hervorgeht, werde kurz mit $S_x(x, y, z, \ldots)$, $S_y(x, y, z, \ldots)$, ... resp. bezeichnet. Auch wollen wir für irgendeine Größe u mit $\overline{u}$ den Wert $-(1 + u)$ bezeichnen.

Dies vorausgeschickt, sei $x, y, z, \ldots$ irgendeine ganzzahlige Lösung der Gleichungen (61), bei welcher x positiv, Null oder negativ sein mag, $y, z, \ldots$ aber nicht negativ gedacht werden. Da aus jenen Gleichungen durch Elimination von x die Gleichung $S_x(x, y, z, \ldots)$:

$$(b\alpha - \beta a) y + (c\alpha - \gamma a) z + \cdots = s\alpha - \sigma a \tag{62}$$

hervorgeht und den Annahmen zufolge keiner der Koeffizienten von $y, z, \ldots$ Null sein kann, so entspricht jeder der gedachten Lösungen $x, y, z, \ldots$ je eine Lösung der Gleichung (62) in nicht negativen ganzen Zahlen $y, z, \ldots$ Aber auch umgekehrt. Schreibt man nämlich die Gleichung (62), wie folgt:

$$\alpha(by + cz + \cdots - s) = a(\beta y + \gamma z + \cdots - \sigma),$$

so muß, da a, α teilerfremd gedacht sind,

$$\begin{aligned} by + cz + \cdots - s &= -ax \\ \beta y + \gamma z + \cdots - \sigma &= -\alpha x \end{aligned}$$

sein, wo x eine ganze Zahl, positiv, Null oder negativ ist, daher entspricht jeder Lösung der Gleichung (62) in nicht negativen Zahlen

$y, z, \ldots$ eine Lösung der Gleichungen (61) von der oben angegebenen Art. Jede negative ganze Zahl aber kann durch $\bar{x} = -(1+x)$ bezeichnet werden, wenn unter x eine nicht negative ganze Zahl verstanden wird. Demnach ist offenbar die Anzahl der Lösungen von (62) in nicht negativen ganzen Zahlen $y, z, \ldots$, d. h. der Denumerant der Gleichung $S_x(x, y, z, \ldots)$ gleich der Summe der Anzahl von Lösungen in nicht negativen ganzen Zahlen $x, y, z, \ldots$ für die beiden Gleichungssysteme $S(x, y, z, \ldots)$ und $S(\bar{x}, y, z, \ldots)$, d. h. des Systems (61) und des folgenden Systems:

$$(63) \qquad \begin{cases} a\bar{x} + by + cz + \cdots = s \\ \alpha\bar{x} + \beta y + \gamma z + \cdots = \sigma, \end{cases}$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$(63') \qquad \begin{cases} -ax + by + cz + \cdots = s + a \\ -\alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots = \sigma + \alpha. \end{cases}$$

Man kann also die Gleichung ansetzen:

$$(64) \quad \text{Den. } S_x(x, y, z, \ldots) = \text{Den. } S(x, y, z, \ldots) + \text{Den. } (\bar{x}, y, z, \ldots),$$

wenn man die Anzahl der gedachten Lösungen der Systeme (61) und (63) wieder als deren Denumeranten bezeichnet. Beachtet man, daß ersichtlich

$$S_x(x, y, z, \ldots) = S_{\bar{x}}(\bar{x}, y, z, \ldots) = S_x(\bar{x}, y, z, \ldots)$$

ist, so läßt sich vorstehende Gleichung auch schreiben, wie folgt:

$$(64') \quad \text{Den. } S(x, y, z, \ldots) = \text{Den. } S_x(\bar{x}, y, z, \ldots) - \text{Den. } S(\bar{x}, y, z, \ldots).$$

Das System (63) läßt aber mit Bezug auf die Unbestimmte y das gleiche Verfahren zu, wie es für das System (61) mit Bezug auf die Unbestimmte x ausgeführt wurde, und ergibt dann die weitere Gleichung

$$(64'') \quad \text{Den. } S(\bar{x}, y, z, \ldots) = \text{Den. } S_y(\bar{x}, \bar{y}, z, \ldots) - \text{Den. } S(\bar{x}, \bar{y}, z, \ldots),$$

desgleichen kommt

$$(64''') \quad \text{Den. } S(\bar{x}, \bar{y}, z, \ldots) = \text{Den. } S_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots) - \text{Den. } S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$$

usw., falls mehr als drei Unbestimmte $x, y, z, \ldots$ vorhanden sind. Für den Fall von nur drei Unbestimmten erschließt man aus den vorigen Gleichungen, daß

$$\begin{aligned} &\text{Den. } S(x, y, z) \\ &= \text{Den. } S_x(\bar{x}, y, z) - \text{Den. } S_y(\bar{x}, \bar{y}, z) + \text{Den. } S_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ &\quad - \text{Den. } S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{aligned}$$

ist; für den Fall von vier Unbestimmten x, y, z, t kommt

$$\text{Den.}\,(x, y, z, t)$$
$$= \text{Den.}\,S_x(\bar{x}, y, z, t) - \text{Den.}\,S_y(\bar{x}, \bar{y}, z, t) + \text{Den.}\,S_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)$$
$$- \text{Den.}\,S_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) + \text{Den.}\,S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$$

usw. Sooft also das System $S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$ keine Lösungen in nicht negativen ganzen Zahlen $x, y, z, \ldots$ zuläßt, was z. B. stets der Fall sein wird, wenn die Gegebenen der Gleichungen (61) sämtlich positiv sind, so treten nur Denumeranten von Einzelgleichungen auf, und es wird z. B.

$$\text{Den.}\,S(x, y, z) \tag{65}$$
$$= \text{Den.}\,S_x(\bar{x}, y, z) - \text{Den.}\,S_y(\bar{x}, \bar{y}, z) + \text{Den.}\,S_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

Hier ist $S_x(\bar{x}, y, z)$ die Gleichung

$$(b\alpha - \beta a)y + (c\alpha - \gamma a)z = s\alpha - \sigma a, \tag{66}$$

$S_y(\bar{x}, \bar{y}, z)$ wäre die Gleichung

$$(a\beta - \alpha b)\bar{x} + (c\beta - \gamma b)z = s\beta - \sigma b,$$

$S_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ die Gleichung

$$(a\gamma - \alpha c)\bar{x} + (b\gamma - \beta c)\bar{y} = s\gamma - \sigma c,$$

von denen die letzten zwei auch folgendermaßen geschrieben werden können:

$$\begin{cases}(b\alpha - \beta a)x + (c\beta - \gamma b)z = (s + a)\beta - (\sigma + \alpha)b \\ (c\alpha - \gamma a)x + (c\beta - \gamma b)y = (s + a + b)\gamma - (\sigma + \alpha + \beta)c.\end{cases} \tag{66'}$$

Man sieht durch diese Formeln die Anzahl der Lösungen des gegebenen Systems zweier Gleichungen genau wie bei *Cayleys* analytischer Methode als ein Aggegrat von Denumeranten von Einzelgleichungen dargestellt und den allgemeinen *Sylvester*schen Satz in diesem einfachsten Falle vollauf bestätigt.

12. Nimmt man die Koeffizienten in den Gleichungen (61) sämtlich als positiv an, so wird die Lösung in nicht negativen Zahlen $x, y, z, \ldots$ unmöglich sein, falls eine der Größen s, σ negativ ist. Wir setzen deshalb dann auch sie als positiv voraus. Hält man ferner an der Annahme fest, daß die Koeffizienten a, α; b, β; c, γ; teilerfremd sind, so kommt zunächst das System (61) leicht auf eine einfachere Form dadurch zurück, daß man $\alpha x = \xi$ setzt. In der Tat folgt dann aus jeder Lösung von (61) in nicht negativen ganzen Zahlen $x, y, z, \ldots$ auch eine solche in nicht negativen ganzen Zahlen $\xi, y, z, \ldots$ für das System

$$a\xi + b\alpha \cdot y + c\alpha \cdot z + \cdots = s\alpha$$
$$\xi + \beta y + \gamma z + \cdots = \sigma;$$

umgekehrt ergibt sich aber aus einer solchen $a\xi$ wegen der ersten dieser Gleichungen als eine nicht negative durch α teilbare ganze Zahl, woraus dann, weil a, α teilerfremd sind, auch $\xi = \alpha x$ und somit $x, y, z, \ldots$ als eine Auflösung von (61) in nicht negativen ganzen Zahlen hervorgeht. Falls auch die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ zu je zweien teilerfremd sind, reduziert sich in solcher Weise das System (61) durch die Substitutionen

$$\alpha x = \xi,\ \beta y = \eta,\ \gamma z = \zeta, \ldots \tag{67}$$

auf das folgende einfachere System:

$$\begin{cases} A\xi + B\eta + C\zeta + \cdots = S \\ \ \ \xi + \ \ \eta + \ \ \zeta + \cdots = \sigma, \end{cases} \tag{68}$$

in welchem, wenn $\tilde{\omega} = \alpha\beta\gamma\ldots$ gedacht wird,

$$S = s\tilde{\omega},\ A = \frac{a\tilde{\omega}}{\alpha},\ B = \frac{b\tilde{\omega}}{\beta},\ C = \frac{c\tilde{\omega}}{\gamma}, \cdots \tag{69}$$

ist. Hier werden, weil nun auch die zweite der in voriger Nummer geltenden Voraussetzungen, daß die Verhältnisse $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}, \cdots$ voneinander verschieden sind, erfüllt ist, auch die Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ verschieden sein. Jedes System dieser Art gehört unter den Fall der vorigen Nummer und die Anzahl seiner Lösungen in nicht negativen ganzen Zahlen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ kann nach den dort angegebenen Regeln bestimmt werden.

Dies gilt insbesondere für die ausgezeichneten Systeme

$$\begin{cases} 1\cdot x + 2y + 3z + \cdots + nu = s \\ \ \ \ x + \ \ y + \ \ z + \cdots + u \ \ = \sigma, \end{cases} \tag{70}$$

die wir in den Nr. 4—9 betrachtet haben.

Es handele sich z. B. um das System $S(x, y, z)$:

$$\begin{cases} 1\cdot x + 2y + 3z = s \\ \ \ \ x + \ \ y + \ \ z = \sigma. \end{cases} \tag{71}$$

Offenbar läßt es Lösungen in nicht negativen Zahlen nur zu, falls $s \overline{\overline{>}} \sigma$ und zugleich $s \overline{\overline{<}} 3\sigma$ ist. Um ihre Anzahl zu finden, stellen wir die Eliminationsgleichungen

$$\begin{aligned} S_x(\bar{x}, y, z):&\quad 1\cdot y + 2z = s - \sigma \\ S_y(\bar{x}, \bar{y}, z):&\quad -\bar{x} + \ \ z = s - 2\sigma \\ &\text{oder}\ \ x + \ \ z = s - 2\sigma - 1 \\ S_z(\bar{x}, \bar{y}, z):&\quad -2\bar{x} + \ \ \bar{y} = s - 3\sigma \\ &\text{oder}\ \ 2x + \ \ y = s - 3\sigma - 3 \end{aligned}$$

auf, deren Denumeranten

$$\frac{s-\sigma}{1,\ 2}, \qquad \frac{s-2\sigma-1}{1,\ 1}, \qquad \frac{s-3\sigma-3}{2,\ 1}$$

resp. sind, und finden nach (65)

$$\text{Den. } S(x, y, z) = \frac{s-\sigma}{1,\ 2} - \frac{s-2\sigma-1}{1,\ 1} + \frac{s-3\sigma-3}{2,\ 1}.$$

Wegen $s \leqq 3\sigma$ verschwindet das letzte Glied. Ist $\sigma \leqq s \leqq 2\sigma$, so verschwindet auch das zweite und es wird (vgl. Kap. 3, Formel [60a])

$$\text{Den. } S(x, y, z) = \frac{s-\sigma}{1,\ 2} = \frac{s-\sigma}{2} + \frac{3}{4} + (-1)^{s-\sigma} \cdot \frac{1}{4}.$$

Ist $2\sigma < s \leqq 3\sigma$, so kommt

$$\text{Den. } S(x, y, z) = \frac{s-\sigma}{1,\ 2} - \frac{s-2\sigma-1}{1,\ 1},$$

d. h. (Kap. 3, Formeln [53] und [60a])

$$\text{Den. } S(x, y, z) = \frac{3\sigma-s}{2} + \frac{3}{4} + (-1)^{s-\sigma} \cdot \frac{1}{4}.$$

Sei ferner $S(x, y, z, t)$ das System

$$(72) \qquad \begin{cases} 1 \cdot x + 2y + 3z + 4t = s \\ \phantom{1 \cdot{}} x + y + z + t = \sigma. \end{cases}$$

Hier muß, wenn Lösungen in nicht negativen Zahlen vorhanden sein sollen, s offenbar zwischen σ und 4σ einschließlich der Grenzen gedacht werden. Nun finden sich die Eliminationsgleichungen

$$\begin{aligned}
S_x(\bar{x}, y, z, t)\colon &\quad 1 \cdot y + 2z + 3t = s - \sigma \\
S_y(\bar{x}, \bar{y}, z, t)\colon &\quad -\bar{x} + z + 2t = s - 2\sigma \\
\text{oder} &\quad x + z + 2t = s - 2\sigma - 1 \\
S_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)\colon &\quad -2\bar{x} - \bar{y} + t = s - 3\sigma \\
\text{oder} &\quad 2x + y + t = s - 3\sigma - 3 \\
S_t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\ \bar{t})\colon &\quad -3\bar{x} - 2\bar{y} - \bar{z} = s - 4\sigma \\
\text{oder} &\quad 3x + 2y + z = s - 4\sigma - 6,
\end{aligned}$$

und ihre Denumeranten sind

$$\frac{s-\sigma}{1, 2, 3}, \qquad \frac{s-2\sigma-1}{1,\ 1,\ 2}, \qquad \frac{s-3\sigma-3}{2,\ 1,\ 1}, \qquad \frac{s-4\sigma-6}{3,\ 2,\ 1}.$$

Den Formeln in voriger Nummer zufolge wird also

$$\text{Den. } S(x, y, z, t)$$
$$= \frac{s-\sigma}{1,\ 2,\ 3} - \frac{s-2\sigma-1}{1,\ 1,\ 2} + \frac{s-3\sigma-3}{2,\ 1,\ 1} - \frac{s-4\sigma-6}{3,\ 2,\ 1}.$$

Wegen $s \overline{\gtrless} 4\sigma$ ist wieder das letzte Glied Null. Je nachdem aber $\sigma \overline{\gtrless} s \overline{\gtrless} 2\sigma$ oder $2\sigma < s \overline{\gtrless} 3\sigma + 2$ oder $3\sigma + 2 < s \overline{\gtrless} 4\sigma$ ist, beschränkt sich dieser Ausdruck auf sein erstes, seine zwei, resp. seine drei ersten Glieder, und man erhält nach den für die Denumeranten einer Einzelgleichung im dritten Kapitel gegebenen Formeln folgende drei Werte:

Ist $\sigma \overline{\gtrless} s \overline{\gtrless} 2\sigma$, so ist

$$\text{Den. } S(x, y, z, t) = \frac{s - \sigma}{\overline{\overline{1,\ 2,\ 3}}}$$
$$= \frac{1}{12}\left((s - \sigma + 3)^2 - \frac{7}{6}\right) + \frac{1}{8}\cdot(-1)^{s-\sigma} + \frac{1}{9}\cdot(\varrho^{s-\sigma} + \varrho^{2(s-\sigma)}).$$

Ist $2\sigma < s \overline{\gtrless} 3\sigma + 2$, so ist

$$\text{Den. } S(x, y, z, t) = \frac{s - \sigma}{\overline{\overline{1,\ 2,\ 3}}} - \frac{s - 2\sigma - 1}{\overline{\overline{1,\ 1,\ 2}}}$$
$$= \frac{1}{12}(s - \sigma + 3)^2 - \frac{1}{4}(s - 2\sigma + 1)^2 + \frac{1}{36}$$
$$+ \frac{1}{8}\left((-1)^{s-\sigma} + (-1)^s\right) + \frac{1}{9}(\varrho^{s-\sigma} + \varrho^{2(s-\sigma)}).$$

Ist endlich $3\sigma + 2 < s \overline{\gtrless} 4\sigma$, so ist

$$\text{Den. } S(x, y, z, t) = \frac{s - \sigma}{\overline{\overline{1,\ 2,\ 3}}} - \frac{s - 2\sigma - 1}{\overline{\overline{1,\ 1,\ 2}}} + \frac{s - 3\sigma - 3}{\overline{\overline{2,\ 1,\ 1}}}$$
$$= \frac{1}{12}\left((4\sigma - s + 3)^2 - \frac{7}{6}\right) + \frac{1}{8}\cdot(-1)^s + \frac{1}{9}(\varrho^{s-\sigma} + \varrho^{2(s-\sigma)});$$

in diesen Formeln ist unter ϱ eine primitive kubische Einheitswurzel zu verstehen. Die Verschiedenheit im Ausdrucke des Denumeranten je nach dem Intervalle, in welchem die Größe s liegt, ist bei diesen Ergebnissen besonders beachtenswert.

13. Wären in dem Systeme (68) nicht alle Koeffizienten A, B, C, ..., die wir der wachsenden Größe nach geordnet denken wollen, voneinander verschieden, sondern etwa die ersten n einander gleich, so daß wir das System folgendermaßen schreiben könnten:

$$(73) \qquad \begin{cases} a(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) + b\eta + c\zeta + \cdots = s \\ \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n + \eta + \zeta + \cdots = \sigma, \end{cases}$$

so hätte dies System offenbar die gleiche Anzahl Lösungen in nicht negativen ganzen Zahlen, wie dies andere System:

$$(74) \qquad \begin{cases} a(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) + b\eta + c\zeta + \cdots = s \\ (b - a)\eta + (c - a)\zeta + \cdots = s - a\sigma. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$(75) \qquad \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = X$$

und schreibt das System (74) in der Form:

$$(76)\qquad \begin{cases} b\eta + c\zeta + \cdots = s - aX \\ (b-a)\eta + (c-a)\zeta + \cdots = s - a\sigma, \end{cases}$$

so leuchtet zunächst ein, daß X nur eine endliche Zahl von Werten annehmen, nämlich nur eine Zahl der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots \left[\frac{s}{a}\right]$$

sein kann. Denkt man nun für jeden dieser Werte den Denumeranten des Systems (76) bestimmt und bezeichnet ihn als eine von X abhängige Zahl mit $D(X)$, so lehrt die Bemerkung, daß jedem solchen X nach (75) eine Anzahl

$$\frac{(X+1)(X+2)\cdots(X+n-1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$$

von Wertsystemen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ entspricht, daß die Anzahl von Lösungen für die sämtlichen Systeme (76), d. h. daß der Denumerant des Systems (73) gleich der Summe

$$\sum_{X=0}^{\left[\frac{s}{a}\right]} D(X)\cdot\frac{(X+1)(X+2)\cdots(X+n-1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$$

ist. So kommt also die Bestimmung dieses Denumeranten für das System (73) auf die gleiche Bestimmung für eine Anzahl von Systemen (76) zurück, die mindestens eine Unbestimmte weniger enthalten, wie das ursprüngliche, und nun ähnlich behandelt werden können. Theoretisch kann solcherweise die gestellte Aufgabe (auch für den Fall $n = 1$) als gelöst angesehen werden, doch würde die wirkliche Berechnung des Denumeranten nach dieser Methode meist äußerst umständlich sein.

14. Legen wir noch einmal ein ganz beliebiges System zweier Gleichungen

$$(77)\qquad \begin{cases} ax + by + cz + \cdots = s \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots = \sigma \end{cases}$$

der Betrachtung zugrunde. Solche Systeme zerfallen in zwei Klassen, je nachdem sie eine nur endliche oder eine unendliche Anzahl Lösungen in nicht negativen Zahlen verstatten; ein System der letzteren Art wäre z. B. die einzelne Gleichung

$$ax - by - z = s,$$

wenn a, b positive (teilerfremde) Zahlen bedeuten, da die Gleichung

$$ax - by = s + z$$

für jeden (nicht negativen) Wert von z unendlich viel nicht negative Auflösungen x, y besitzt. Dagegen wird das System (77) stets ein System der ersten Art sein, sooft alle Koeffizienten $a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ positiv sind. Systeme der ersteren Art mögen endliche Systeme heißen, und wir setzen voraus, das System (77) sei endlich.

Man nenne $\mathfrak{a}$ den größten gemeinsamen Teiler von a, α, so daß, wenn $a = \mathfrak{a} \cdot a'$, $\alpha = \mathfrak{a} \cdot \alpha'$ gesetzt wird, a', α' teilerfremd sind. Aus den Gleichungen (77) folgt durch Elimination von x die Gleichung

$$(b\alpha' - \beta a')y + (c\alpha' - \gamma a')z + \cdots = s\alpha' - \sigma a',$$

und man erkennt leicht, daß das System (77) die gleiche Anzahl von Lösungen in nicht negativen ganzen Zahlen zuläßt, wie das abgeleitete System

$$(78) \qquad \begin{cases} ax + by + cz + \cdots = s \\ (b\alpha' - \beta a')y + (c\alpha' - \gamma a')z + \cdots = s\alpha' - \sigma a', \end{cases}$$

denn jeder solchen Lösung des ersteren entspricht auch eine solche Lösung dieses letzteren, und umgekehrt folgen, wenn $x, y, z, \ldots$ eine Lösung von (78) in nicht negativen Zahlen bedeuten, aus der zweiten Gleichung, wenn sie in der Form

$$\alpha'(by + cz + \cdots - s) = a'(\beta y + \gamma z + \cdots - \sigma)$$

geschrieben wird, da a', α' teilerfremd sind, die Gleichungen

$$by + cz + \cdots - s = -a'\xi$$
$$\beta y + \gamma z + \cdots - \sigma = -\alpha'\xi,$$

wo ξ ganzzahlig; und da wegen der ersten der Gleichungen (78) $\xi = \mathfrak{a}x$ also $\alpha'\xi = \alpha x$ sein muß, nehmen die neuen Gleichungen die Gestalt der Gleichungen (77) an, d. h. jeder Lösung des Systems (78) der gedachten Art entspricht auch eine solche des gegebenen Systems. Schreibt man aber jenes System in der Gestalt

$$(79) \qquad \begin{cases} by + cz + \cdots = s - ax \\ (b\alpha' - \beta a')y + (c\alpha' - \gamma a')z + \cdots = s\alpha' - \sigma a', \end{cases}$$

d. i. als ein System mit einer Unbestimmten weniger als das gegebene, und bedenkt, daß x für ein endliches System nur eine endliche Anzahl nicht negativer Werte annehmen, d. h. eine aus dem Systeme zu bestimmende Zahl g nicht überschreiten kann, so sieht man, ebenso wie in der vorigen Nummer, die Bestimmung des Denumeranten für das gegebene System auf die gleiche Bestimmung für eine endliche Menge von ersichtlich ebenfalls endlichen Systemen (79) mit einer um Eins geringeren Anzahl von Unbestimmten zurückgeführt, wodurch in rein theoretischem Sinne die allgemeine Aufgabe als gelöst angesehen werden darf.

Behandeln wir, um diese Methode durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, das von *Euler* (Algebra II, Nr. 30) gelöste System

$$(80) \qquad \begin{cases} 49x + 25y + 9z = 2920 \\ 7x + 5y + 3z = 560. \end{cases}$$

Wir haben für den Koeffizienten von x den größtvorhandenen gewählt, da nach (79), wenn alle Koeffizienten positiv sind, x jedenfalls die Grenze $\left[\frac{s}{a}\right]$ nicht übersteigen kann, und diese Grenze am kleinsten, die Anzahl der weiter zu behandelnden Systeme also am geringsten wird, wenn a als größter Koeffizient gedacht wird. Aus (80) folgt nun durch Elimination von x das gleichbedeutende System

$$25y + 9z = 2920 - 49x$$
$$10y + 12z = 1000.$$

Die zweite dieser Gleichungen erfordert z und alsdann die erste auch x als ein Vielfaches von 5; setzt man also $x = 5x'$, $z = 5z'$, so nimmt das System die Form an

$$(81) \qquad \begin{cases} 5y + 9z' = 584 - 49x' \\ y + 6z' = 100. \end{cases}$$

Der ersten dieser Gleichungen zufolge kann x' nur eine ganze Zahl $< \frac{584}{49}$ d. i. < 12 sein, und für jedes x' dieser Art wäre der Denumerant des Systems zu ermitteln. Man findet aber durch Elimination von y die Gleichung

$$3z' = 7x' - 12,$$

derzufolge x' durch 3 teilbar, $x' = 3x''$ sein muß, also x'' nur eine der Zahlen 0, 1, 2, 3 sein kann. Da jetzt

$$z' = 7x'' - 4,$$

also

$$y = 124 - 42x''$$

gefunden wird, so muß zugleich $x'' > 0$ und < 3, also eine der Zahlen 1, 2 sein. Der Denumerant des Systems (81) ist also nur für diese zwei Werte von x'' von Null verschieden, nämlich gleich Eins, und folglich hat das System (80) nur zwei Lösungen in nicht negativen ganzen Zahlen x, y, z, nämlich

$$x = 15,\ y = 82,\ z = 15$$
$$x = 30,\ y = 40,\ z = 50.$$

15. Wennschon die zuletzt angegebene Methode in der Tat zur Bestimmung der gesuchten Anzahl von Lösungen verwendbar ist, so eignet sie sich doch nicht nur wenig zur wirklichen Berechnung der-

selben, sondern führt auch nur selten zu einem expliziten Ausdrucke jener Anzahl als Aggregat von Denumeranten einzelner Gleichungen, wie dies in dem ausgezeichneten Falle der Nr. 11 gefunden worden ist. Für diesen Zweck empfiehlt es sich bisweilen, wie *Sylvester* gelehrt hat, mit dem gegebenen Systeme eine oder mehrere Hilfsgleichungen zu verbinden. Wir wollen dies an einem interessanten *Sylvester*schen Beispiele erläutern.

Es handele sich darum, den kleinsten Rest einer positiven ganzen Zahl n (mod. m) zu bestimmen. Dieser Rest x ist eine nicht negative ganze Zahl $\overline{\leq} m-1$ und ist daher eindeutig bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$n = my + x, \quad x + z = m - 1, \tag{81}$$

worin x, y, z nicht negative ganze Zahlen bedeuten. Das System beider Gleichungen hat also nur eine Lösung in nicht negativen ganzen Zahlen x, y, z. Fügt man ihm die Gleichung

$$u + v = x - 1 \tag{82}$$

hinzu, welche x Lösungen in nicht negativen ganzen Zahlen u, v besitzt, so hat das System der drei Gleichungen (81) und (82) oder auch das System

$$\begin{cases} my + u + v = n - 1 \\ z + u + v = m - 2 \end{cases} \tag{83}$$

ebenfalls genau x Lösungen in nicht negativen Zahlen y, z, u, v. Dasselbe gilt offenbar auch von dem um eine Gleichung erweiterten Systeme $S(y, z, u, v, w)$:

$$\begin{cases} my + u + v = n - 1 \\ z + u + v = m - 2 \\ y + u - w = 0. \end{cases} \tag{84}$$

Auf dies letztere kann man aber die gleiche Betrachtung anwenden, wie wir sie in Nr. 11 für ein System zweier Gleichungen angestellt haben. Setzen wir ihm an die Seite die Systeme, welche durch Elimination der einzelnen Unbestimmten daraus hervorgehen, insbesondere das System $S_y(y, z, u, v, w)$:

$$\begin{cases} (1-m)u + v + mw = n - 1 \\ \qquad u + v + z \quad = m - 2, \end{cases} \tag{85}$$

so erkennt man genau wie a. a. O. die Gültigkeit der Beziehung

$$\begin{cases} \text{Den. } S_y(\bar{y}, z, u, v, w) = \text{Den. } S(y, z, u, v, w) \\ \qquad\qquad + \text{Den. } S(\bar{y}, z, u, v, w); \end{cases} \tag{86}$$

desgleichen für das System $S_u(\bar{y}, z, \bar{u}, v, w)$:

(87) $$-my - z = n + 1, \quad y + z + v + w = m - 3$$

die Beziehung

(88) $$\text{Den. } S_u(\bar{y}, z, \bar{u}, v, w) = \text{Den. } S(\bar{y}, z, u, v, w) + \text{Den } S(\bar{y}, z, \bar{u}, v, w),$$

wobei $S(\bar{y}, z, \bar{u}, v, w)$ das System der drei Gleichungen

$$-my - u + v = n + m$$
$$z - u + v = m - 1$$
$$-y - u = w + 2$$

bezeichnet. Da weder dies letztere noch das System (87) eine Lösung in nicht negativen Zahlen verstattet, wie die letzte resp. erste Gleichung der Systeme zeigt, so sind ihre Denumeranten Null, und man findet aus (86) und (88) die Gleichheit

(89) $$\text{Den. } S(y, z, u, v, w) = \text{Den. } S_y(\bar{y}, z, u, v, w).$$

Nun läßt sich für das System (85), das wir kürzer jetzt durch das Zeichen $S'(z, u, v, w)$ andeuten, die Betrachtung der Nr. 11 bezüglich der Unbestimmten u, v, z wiederholen, deren Koeffizienten in seinen beiden Gleichungen relativ prim sind. Man bilde die Eliminationsgleichungen

$$S'_u(z, \bar{u}, v, w)\colon \; mv + (m-1)z + mw = n - 1 + (m-1)(m-2)$$
$$S'_z(\bar{z}, \bar{u}, v, w)\colon \; (m-1)u + v + mw = n - m$$
$$S'_v(\bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, w)\colon \; mu + z + mw = n - 2m,$$

sowie das System $S'(\bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, w)$:

$$(m-1)u - v + mw = n - m + 1$$
$$-u - v - z = m + 1,$$

aus dessen letzter Gleichung seine Unlösbarkeit in nicht negativen Zahlen erhellt, so findet man nach Nr. 11 die Beziehung:

$$\text{Den. } S'(z, u, v, w)$$
$$= \text{Den. } S'_u(z, \bar{u}, v, w) - \text{Den. } S'_z(\bar{z}, \bar{u}, v, w) + \text{Den. } S'_v(z, \bar{u}, \bar{v}, w).$$

Nach (89) ist also der Denumerant des Systems (84) oder die Zahl x gleich

(90) $$\frac{(n-1) + (m-1)(m-2)}{m,\ m,\ m-1} - \frac{n-m}{m,\ m-1,\ 1} + \frac{n-2m}{m,\ m,\ 1}.$$

Durch diesen Ausdruck wird also der kleinste nicht negative Rest der Zahl n (mod. m) auf interessante Weise, nämlich als ein Aggregat von Denumeranten dargestellt.

Sei z. B. $n = 13$, $m = 4$, also $x = 1$, so muß der Formel (90) gemäß

$$1 = \frac{18}{4,\,4,\,3} - \frac{9}{4,\,3,\,1} + \frac{5}{4,\,4,\,1}$$

sein; die leicht zu bestimmenden Werte

$$\frac{18}{4,\,4,\,3} = 5, \quad \frac{9}{4,\,3,\,1} = 7, \quad \frac{5}{4,\,4,\,1} = 3$$

geben in der Tat

$$5 - 7 + 3 = 1.$$

Fünftes Kapitel.

Relative Zerfällungen (mod. m).

1. Kehren wir zu den Zerfällungen einer einzelnen Zahl wieder zurück! Gegenüber den bisher betrachteten Zerfällungen, die absolute genannt werden können, steht eine andere Art der Zerfällung, welche relativ heißen soll, insofern sie nur in bezug auf eine gegebene Zahl m als Modul stattfindend gedacht wird. *Stern* zuerst hat die Aufgabe gestellt, zu ermitteln, wie oft eine gegebene Zahl n nach gegebenem Modul m einer Summe, deren Elemente aus einer gegebenen Reihe $e_1, e_2, e_3, \ldots$ von Zahlen genommen sind, kongruent gesetzt werden, oder, wie wir kurz sagen wollen, (mod. m) aus den Zahlen $e_1, e_2, e_3, \ldots$ additiv zusammengesetzt oder in Zahlen dieser Reihe zerfällt werden kann. Er hat diese Aufgabe unter der Voraussetzung, daß der Modul m eine ungerade Primzahl p sei und es sich nur um Zerfällungen in verschiedene Summanden handele, für die drei Fälle, wo die gegebene Zahlenreihe die Reihe $1, 2, 3, \ldots, p-1$ oder $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$ oder endlich die Reihe der quadratischen Reste (mod. p) ist, vollständig gelöst und eine Menge interessanter Details in ihnen entwickelt (Journ. f. r. u. a. Math. 61, 1863, S. 66 und 334). Es zeigt sich dabei, daß die neue Aufgabe durch die Restbeziehung zu einem gegebenen Modulus außerordentlich an Einfachheit gewinnt und elegante Ausdrücke für die gesuchten Anzahlen zuläßt, nach denen man bei den absoluten Zerfällungen meist vergeblich ausschaut. Die Methode freilich, durch welche *Stern* zu seinen Resultaten gelangt ist, ist keine rein arithmetische, sondern nimmt algebraische Betrachtungen, insbesondere die Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichung zu Hilfe.

Wir zeigen sie am einfachsten Falle, in welchem die gegebenen Elemente $e_1, e_2, e_3, \ldots$ der Zerfällungen die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ sind.

Wird unter r die primitive p^{te} Einheitswurzel

$$r = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p} \tag{1}$$

verstanden, so sind bekanntlich $1, r, r^2, \ldots, r^{p-1}$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^p = 1 \tag{2}$$

und

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = \prod_{h=1}^{p-1}(x - r^h), \tag{3}$$

woraus für $x = 1$ die Gleichung

$$\prod_{h=1}^{p-1}(1 - r^h) = p, \tag{4}$$

für $x = -1$ aber die Beziehung

$$\prod_{h=1}^{p-1}(1 + r^h) = 1 \tag{4a}$$

hervorgeht. Entwickelt man nun das Produkt

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots(1 + x^{p-1})$$

nach den Potenzen von x, so sind die Exponenten der letzteren sämtliche Summen, die aus verschiedenen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ ohne Rücksicht auf die Anordnung gebildet werden können, und wenn demnach x irgendeine Wurzel der Gleichung (2) bedeutet, werden zwei solche Potenzen jedesmal dann einander gleich sein, wenn ihre Exponenten (mod. p) kongruent sind, d. h. denselben Rest n (mod. p) ergeben. Somit erhält man dann die Gleichheit

$$\prod_{h=1}^{p-1}(1 + x^h) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_p x^p, \tag{5}$$

worin allgemein A_n anzeigt, wie oft die Zahl n (mod. p) additiv aus verschiedenen der Elemente $1, 2, 3, \ldots, p-1$ gebildet werden kann; da $p \equiv 0$ (mod. p) ist, kann A_p auch als die Anzahl derartiger Zerfällungen der Null angesehen werden. Setzt man noch

$$A_0 = 1 + A_p, \tag{6}$$

so folgt

$$\prod_{h=1}^{p-1}(1 + x^h) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{p-1} x^{p-1}. \tag{7}$$

Wählt man hierin für x die Einheitswurzel r, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung (4a) diese neue:

$$1 = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \cdots + A_{p-1} r^{p-1}$$

und nun wegen der Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichung

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = 0 \tag{8}$$

die Gleichheit der Koeffizienten

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_{p-1} = A_p. \tag{9}$$

Wird dagegen in (7) für x die Eins gewählt, so kommt

$$2^{p-1} = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{p-1},$$

woraus in Verbindung mit (6) und (9) sich

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_p = \frac{2^{p-1} - 1}{p} \tag{10}$$

ergibt. Man schließt also: Jeder der Reste $0, 1, 2, \ldots, p-1$ wird (mod. p) aus verschiedenen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ gleich oft additiv erzeugt.

Genau wie die Gleichung (5) erhält man für jede Wurzel x der Gleichung (2) die folgende:

$$\prod_{h=1}^{p-1} (1 - x^h) = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_p x^p, \tag{11}$$

worin jetzt aber B_n den Unterschied der Anzahlen bedeutet, welche anzeigen, wie oft die Zahl n (mod. p) aus einer geraden, und wie oft aus einer ungeraden Anzahl verschiedener der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ additiv gebildet werden kann. Der Kürze wegen nennen wir wieder die Zerfällungen in eine gerade oder in eine ungerade Anzahl von Summanden selbst gerade resp. ungerade Zerfällungen; B_n wäre demnach der Unterschied zwischen der Anzahl der geraden und derjenigen der ungeraden Zerfällungen von n der gedachten Art (mod. p). Aus (11) fließen nun, je nachdem $x = r$ oder $x = 1$ gewählt wird, die folgenden beiden Beziehungen:

$$p = B_0 + B_1 r + B_2 r^2 + \cdots + B_{p-1} r^{p-1},$$

worin wieder

$$B_0 = 1 + B_p \tag{12}$$

gesetzt ist, und

$$0 = B_0 + B_1 + B_2 + \cdots + B_{p-1}, \tag{13}$$

also wegen der Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichung

$$B_0 - p = B_1 = B_2 \cdots = B_{p-1},$$

mithin aus (13)

$$\begin{cases} B_1 = B_2 \cdots = B_{p-1} = -1 \\ B_0 = p - 1, \; B_p = p - 2. \end{cases} \tag{14}$$

Jeder der Reste 1, 2, 3, ..., $p-1$ entsteht also einmal mehr aus einer ungeraden, wie aus einer geraden Anzahl, der Rest Null dagegen $p-2$ mal mehr aus einer geraden wie aus einer ungeraden Anzahl verschiedener Summanden der Reihe 1, 2, 3, ..., $p-1$ (mod. p).

Mit Rücksicht auf die in (10) gegebene gesamte Anzahl der geraden und ungeraden Zerfällungen erkennt man hiernach, daß jeder der Reste 1, 2, 3, ..., $p-1$

$$\frac{2^{p-1}-1}{2p} + \frac{1}{2} \text{ resp. } \frac{2^{p-1}-1}{2p} - \frac{1}{2}, \tag{15}$$

dagegen der Rest Null

$$\frac{2^{p-1}-1}{2p} - \frac{p-2}{2} \text{ resp. } \frac{2^{p-1}-1}{2p} + \frac{p-2}{2} \tag{15a}$$

ungerade und gerade Zerfällungen (mod. p) von der gedachten Art gestattet.

2. Die von *Stern* gestellte Aufgabe ist neuerdings von *R. Daublebsky von Sterneck* nach verschiedenen Richtungen hin wesentlich weitergefördert worden (Sitzungsber. d. Wiener Akad. 111, 1902, S. 1567; 113, 1904, S. 326; 114, 1905, S. 711). Nicht nur, daß er *Sterns* Untersuchungen auch auf den Fall eines beliebigen Moduls m ausgedehnt und für die gegebenen Elemente $e_1, e_2, e_3, \ldots$ neben der Reihe der quadratischen Reste auch die der höheren Potenzreste (mod. p) in Betracht gezogen hat, so hat er insbesondere auch die Aufgabe darin verschärft, daß er statt der Anzahl der Zerfällungen überhaupt vielmehr die Anzahl der Zerfällungen in eine gegebene Anzahl der gedachten Elemente $e_1, e_2, e_3, \ldots$, zudem aber auch Zerfällungen mit Wiederholung dieser Elemente in Betracht zieht. Seine Methoden sind dabei durchaus elementar, rein arithmetischer Natur. Indem wir uns dazu wenden, die Hauptresultate seiner Untersuchungen abzuleiten, beginnen wir mit der Aufstellung zweier Rekursionsformeln, welche die wesentlichste Grundlage dazu ausmachen.

Mit *von Sterneck* bezeichnen wir durch $(n)_i$ die Anzahl der Zerfällungen von n in die Summe von i verschiedenen der Elemente $e_1, e_2, e_3, \ldots$ (mod. m) und mit $(n)_i^{(e)}$ die Anzahl solcher Zerfällungen, bei denen das Element e ausgeschlossen ist, während im Gegenteil $(n)_i^e$ die Anzahl derjenigen jener Zerfällungen sei, in welchen dies Element e auftritt. Offenbar gibt jede dieser letzteren Zerfällungen

eine Zerfällung von $n - e$ in $i - 1$ der gegebenen Elemente (mod. m), unter welchen e sich nicht findet, und umgekehrt entsteht aus einer Zerfällung von $n - e$ dieser letzteren Art eine Zerfällung von n in i der gegebenen Elemente, unter denen e auftritt. Mithin ist $(n)_i^{\bar{e}} = (n - e)_{i-1}^{(e)}$. Andererseits besteht die Gesamtheit aller Zerfällungen von $n - e$ in $i - 1$ der gegebenen Elemente (mod. m) zusammengenommen aus denen, bei welchen e auftritt, und denen, bei welchen e ausgeschlossen ist, also ist

$$(n - e)_{i-1} = (n - e)_{i-1}^{\bar{e}} + (n - e)_{i-1}^{(e)}.$$

Daher ergibt sich die Gleichung

$$(n)_i^{\bar{e}} = (n - e)_{i-1} - (n - e)_{i-1}^{\bar{e}}$$

und hieraus allgemeiner

$$(16) \qquad (n)_i^{\bar{e}} = (n - e)_{i-1} - (n - 2e)_{i-2} + (n - 3e)_{i-3} \dots + (-1)^{i-1} \cdot (n - ie)_0.$$

Addiert man nun, indem man für e jedes der gegebenen Elemente setzt, alle Gleichungen dieser Art, so wird jede mögliche Zerfällung von n in i der gegebenen Elemente links i mal gezählt werden, da sie ja aus i Elementen e besteht, und somit ergibt sich die erste unserer Rekursionsformeln:

$$(\mathrm{I}) \qquad i \cdot (n)_i = \sum_e (n - e)_{i-1} - \sum_e (n - 2e)_{i-1} + \sum_e (n - 3e)_{i-3} + \dots + (-1)^{i-1} \cdot \sum_e (n - ie)_0,$$

in welcher die Summen auf der rechten Seite über die sämtlichen gegebenen Elemente $e_1, e_2, e_3, \dots$ erstreckt werden müssen.

Tritt insbesondere unter den gegebenen Elementen die Null auf, so darf man diese statt e in der Formel (16) wählen und erhält dann die zweite Formel

$$(\mathrm{Ia}) \qquad (n)_i^{(0)} = (n)_i - (n)_{i-1} + (n)_{i-2} - \dots + (-1)^i \cdot (n)_0,$$

da statt $(n)_i^{\bar{0}}$ offenbar $(n)_i - (n)_i^{(0)}$ gesetzt werden darf.

Wir ziehen endlich auch noch Zerfällungen mit Wiederholung der gegebenen Elemente $e_1, e_2, e_3, \dots$ in Betracht. Bezeichnet $[n]_i$ die Anzahl derartiger Zerfällungen von n in i gleiche oder verschiedene jener Elemente, so ist die Rekursionsformel (I) durch die folgende zu ersetzen:

$$(\mathrm{II}) \quad i \cdot [n]_i = \sum_e [n - e]_{i-1} + \sum_e [n - 2e]_{i-2} + \dots + \sum_e [n - ie]_0,$$

worin wieder über alle gegebenen Elemente e zu summieren ist. In der Tat, sei

(17) $$n \equiv \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \cdots \pmod{m}$$

eine Zerfällung von n in $i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots$ Summanden. Diese Zerfällung findet sich nicht aus denjenigen der Zahl $n - he$ in $i - h$ der gegebenen Elemente, sobald e von den in ihr auftretenden Elementen $e_1, e_2, e_3, \ldots$ verschieden oder sobald, falls e gleich einem der letzteren, etwa $e = e_1$ ist, $h > \lambda_1$ wäre; dagegen entspricht in diesem Falle jener Zerfällung je eine der Zerfällungen von $n - e_1$, $n - 2e_1, \ldots, n - \lambda_1 e_1$ in resp. $i - 1, i - 2, \ldots, i - \lambda_1$ Elemente, nämlich die Zerfällungen

$$\left.\begin{aligned} n - e_1 &\equiv (\lambda_1 - 1)e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \cdots \\ n - 2e_1 &\equiv (\lambda_1 - 2)e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n - \lambda_1 e_1 &\equiv \qquad\qquad \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \cdots \end{aligned}\right\} \pmod{m},$$

daher wird die Zerfällung (17) in den ersten λ_1 Gliedern zur Rechten von (II) für $e = e_1$, und aus gleicher Erwägung in den ersten λ_2 Gliedern für $e = e_2$ usw. je einmal gezählt, sonst aber überhaupt nicht, sie wird also zur Rechten von (II) genau $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots = i$ mal gezählt, d. h. ebenso oft wie zur Linken und somit erweist sich die Formel (II) als richtig.

Ist insbesondere wieder die Null eins der gegebenen Elemente $e_1, e_2, e_3, \ldots$, und bedeutet dann $[n]_i^{(0)}$ die Anzahl der Zerfällungen von n in i gleiche oder verschiedene dieser Elemente mit Ausschluß der Null, so besteht offenbar die Beziehung

$$[n]_i = [n]_i^{(0)} + [n]_{i-1}$$

oder die folgende:

(IIa) $$[n]_i^{(0)} = [n]_i - [n]_{i-1},$$

welche jetzt an die Stelle der Formel (Ia) tritt.

3. Nunmehr wählen wir als die gegebenen Elemente $e_1, e_2, e_3, \ldots$ zuerst die Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots, m - 1 \pmod{m}$. Hier gelten dann zunächst ein paar einfache Bemerkungen. Sind n, n' (mod. m) kongruent, so ist selbstverständlich

(18) $$(n)_i = (n')_i, \quad (n)_i^{(0)} = (n')_i^{(0)}.$$

Dasselbe gilt aber auch, wenn n, m den gleichen größten gemeinsamen Teiler haben, wie n', m. Denn alsdann ist jede der beiden Kongruenzen

$$nx \equiv n', \quad n'x' \equiv n \pmod{m}$$

in ganzen zu m teilerfremden Zahlen x, x' auflösbar; aus jeder Kongruenz

$$n \equiv e_1 + e_2 + \cdots + e_i \pmod{m},$$

in welcher $e_1, e_2, \ldots, e_i$ verschiedene i Zahlen der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$ bez. $1, 2, 3, \ldots, m-1$ bezeichnen, folgt aber durch Multiplikation mit x eine Kongruenz

$$n' \equiv e_1' + e_2' + \cdots + e_i' \pmod{m},$$

in welcher $e_1', e_2', \ldots, e_i'$ ebenfalls i verschiedene Zahlen der bezüglichen Reihe bedeuten, und umgekehrt aus jeder Kongruenz der letzteren Art durch Multiplikation mit x' wieder eine solche der ersteren, woraus die Gleichungen (18) folgen.

Ferner besteht die Beziehung

$$(0)_i + (1)_i + (2)_i + \cdots + (m-1)_i = \binom{m}{i}, \tag{19}$$

unter $\binom{m}{i}$ wie üblich den i^{ten} Binomialkoeffizienten der m^{ten} Potenz verstanden, denn rechts steht die Anzahl aller aus i verschiedenen Summanden der Reihe $0, 1, 2, \ldots, m-1$ möglichen Summen, wenn von deren Anordnung abgesehen wird, und jede von ihnen ist einer der Zahlen $0, 1, 2, \ldots m-1$ (mod. m) kongruent, links aber steht die gesamte Anzahl der Zerfällungen, deren diese Zahlen in i solche Summanden fähig sind, und die unter jenen Summen sich vorfinden müssen.

Nun sei i teilerfremd zu m und

$$n \equiv e_1 + e_2 + \cdots + e_i \pmod{m}$$

irgendeine der Zerfällungen von n in i verschiedene Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots, m-1$ (mod. m), dann entspringt dieser eine ebensolche Zerfällung

$$n + i \equiv e_1' + e_2' + \cdots + e_i' \pmod{m}$$

der Zahl $n + i$, indem man

$$e_1' = e_1 + 1, \ e_2' = e_2 + 1, \ldots, \ e_i' = e_i + 1$$

setzt und, wenn eine dieser Zahlen gleich m sein sollte, diese durch Null ersetzt; und umgekehrt entspricht jeder solchen Zerfällung von $n + i$ eine ebensolche von n, indem man in gleicher Weise

$$e_1 = e_1' - 1, \ e_2 = e_2' - 1, \ldots, \ e_i = e_i' - 1$$

setzt. Demnach ist $(n+i)_i = (n)_i$ und, da hierin n in $n + i$, $n + 2i, \ldots,$ verwandelt werden kann, so finden sich die Gleichheiten

$$(n)_i = (n+i)_i = (n+2i)_i \cdots = (n + (m-1)\,i)_i,$$

wo nun die Zahlen $n, n+i, n+2i, \ldots, n+(m-1)\,i$ ein vollständiges Restsystem (mod. m) ausmachen und man daher einfacher schreiben darf

$$(0)_i = (1)_i = (2)_i = \cdots = (m-1)_i.$$

Die Formel (19) liefert nunmehr $\frac{1}{m}\cdot\binom{m}{i}$ als den gemeinsamen Wert dieser gleichen Ausdrücke und daher den Satz:

Ist i teilerfremd zum Modulus m, so ist stets

$$(n)_i = \frac{1}{m}\cdot\binom{m}{i}. \tag{20}$$

4. Dies vorausgeschickt, leiten wir zunächst mittels der *Sterneck*schen Formeln die in Nr. 1 nach *Stern* erhaltenen Resultate nochmals her. Sei also $m = p$ eine ungerade Primzahl und $0, 1, 2, \ldots, p-1$ die Reihe der gegebenen Elemente. Dann ergibt sich nach (20) für jeden der Indices $i = 1, 2, 3, \ldots, p-1$ die Formel

$$(n)_i = \frac{1}{p}\cdot\binom{p}{i}, \tag{21}$$

während $(n)_0$ offenbar Null ist, sobald n durch p nicht teilbar, dagegen gleich Eins ist, sobald n durch p teilbar ist, da eine Zahl n dann und nur dann als eine Summe von null Elementen (mod. p) angesehen werden darf, wenn sie (mod. p) kongruent Null ist. Gleiches ergibt sich für $(n)_p$, da die einzige Summe von p verschiedenen der gegebenen Elemente die Summe

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (p-1) = \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \pmod{p}$$

ist. Hieraus findet sich mit Hilfe der Rekursionsformel (I a) für $i = 1, 2, 3, \ldots, p-1$ die Formel

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{p}\left[\binom{p}{i} - \binom{p}{i-1} + \binom{p}{i-2} - \cdots + (-1)^{i-1}\cdot\binom{p}{1}\right] + (-1)^i\cdot(n)_0,$$

d. i. nach einer für Binomialkoeffizienten gültigen Beziehung

$$\binom{k}{i} - \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i-2} \cdots + (-1)^i\cdot\binom{k}{0} = \binom{k-1}{i} \tag{22}$$

diese andere:

$$(n)_i^{(0)} = \frac{1}{p}\left(\binom{p-1}{i} + (-1)^{i-1}\right) + (-1)^i\cdot(n)_0 \tag{23}$$

(für $i = 1, 2, \cdots, p-1$)

Heißt nun wieder A_n die Anzahl aller möglichen Zerfällungen (mod. p) von n in verschiedene Summanden der Reihe $1, 2, 3, \ldots, p-1$ überhaupt, so ist offenbar

$$A_n = \sum_{i=1}^{p-1} (n)_i^{(0)}.$$

Durch Einsetzen des Ausdrucks (23) für $(n)_i^{(0)}$ findet sich hieraus ohne Mühe für jeden Wert des Index n die frühere Formel (10):

$$A_n = \frac{2^{p-1}-1}{p}.$$

Desgleichen wird die in Nr. 1 mit B_n bezeichnete Anzahldifferenz durch folgende Summe gegeben sein:

$$B_n = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \cdot (n)_i^{(0)};$$

durch Einsetzen des Ausdrucks (23) für $n_i^{(0)}$ erhält man aber hieraus sogleich für jeden der durch p nicht teilbaren Indices $n = 1, 2, \ldots, p-1$ den Wert $B_n = -1$, dagegen für den Index $n = p$ den Wert $B_p = p - 2$ übereinstimmend mit den in Nr. 1 erhaltenen Formeln.

Unter Festhaltung des Elementensystems $0, 1, 2, \ldots, m-1$ bezw. $1, 2, \ldots, m-1$ hat *v. Sterneck* die Anzahlen $(n)_i$ und $(n)_i^{(0)}$ auch für die Fälle bestimmt, in denen der Modulus m das Produkt zweier verschiedenen Primzahlen oder auch eine Primzahlpotenz ist. Indessen zeigt die Ermittelung der bezüglichen Formeln schon eine so große Weitläufigkeit, daß man von einer direkten Herleitung für zusammengesetztere Moduln von vornherein wohl absehen muß. Es ist *v. Sterneck* aber gelungen, eine Formel aufzustellen, welche die besonderen von ihm erhaltenen Resultate in sich zusammenfaßt, und in einer späteren Arbeit (der zweiten der obengenannten) die Gültigkeit dieser Formel für jeden Fall zu beweisen. Indem wir also seine speziellen Ergebnisse übergehen können, wenden wir uns jetzt dazu, jene allgemeine, für jeden Modul m gültige Formel zu begründen.

5. Zu diesem Zwecke führen wir mit *v. Sterneck* eine Funktion $f(n, d)$ zweier ganzzahligen Argumente n, d ein durch folgende Definition: Sei $[n, d]$ der größte gemeinsame Teiler von n und d. Dann soll

$$f(n, d) = 0 \tag{24}$$

sein, sobald $\frac{d}{[n, d]}$ einen quadratischen Faktor hat, andernfalls sei

$$f(n, d) = (-1)^j \cdot \frac{\varphi(d)}{\varphi\left(\frac{d}{[n, d]}\right)}, \tag{24a}$$

wobei j die Anzahl der Primfaktoren bedeutet, aus denen $\frac{d}{[n, d]}$ sich zusammensetzt, während $\varphi(d)$ wie gewöhnlich die Anzahl der Zahlen $< d$ bezeichnet, welche teilerfremd sind zu d. Hiernach ist insbesondere

$$f(n, d) = \varphi(d), \tag{25}$$

sobald $\frac{d}{[n, d]} = 1$ d. h. n teilbar ist durch d.

Wir entwickeln zuvörderst eine Reihe von Sätzen, welche für diese Funktion gelten, und auf die wir die Begründung der *Sterneck*schen Formel aufbauen werden.

1) Da (mod. d) kongruente Zahlen n, n' stets denselben größten gemeinsamen Teiler mit dem Modulus haben, ergibt sich zuerst die Formel

$$f(n', d) = f(n, d), \text{ wenn } n' \equiv n \pmod{d}. \tag{26}$$

2) Sind ferner $d', d'', d''', \ldots$ verschiedene, zu je zweien teilerfremde Zahlen, so findet sich sowohl

$$[n, d' d'' d''' \ldots] = [n, d'] \cdot [n, d''] \cdot [n, d'''] \ldots$$

als auch

$$\frac{d' d'' d''' \ldots}{[n, d' d'' d''' \ldots]} = \frac{d'}{[n, d']} \cdot \frac{d''}{[n, d'']} \cdot \frac{d'''}{[n, d''']} \ldots,$$

wo die Faktoren zur Rechten gleichfalls zu je zweien teilerfremd sind, und nunmehr nach der bekannten Eigenschaft der Funktion $\varphi(d)$ auch für die Funktion $f(n, d)$ leicht die entsprechende Eigenschaft

$$f(n, d' d'' d''' \ldots) = f(n, d') \cdot f(n, d'') \cdot f(n, d''') \ldots \tag{27}$$

3) Hieraus erschließt man die Formel

$$\sum_{d:m} f(n, d) = 0, \tag{28}$$

wenn über alle Teiler d einer gegebenen Zahl m, von welcher n kein Vielfaches ist, summiert wird. In der Tat: ist, in Primzahlpotenzen zerlegt, diese Zahl

$$m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k},$$

also

$$d = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdots p_k^{\delta_k},$$

worin allgemein δ_i jeden der Werte $0, 1, 2, \ldots, a_i$ haben kann, so ergibt sich mit Rücksicht auf (27) die Summe (28) gleich dem Produkte

$$\prod_{i=1}^{k} \sum_{\delta_i = 0}^{a_i} f(n, p_i^{\delta_i}). \tag{29}$$

Die Summe, welche den allgemeinen Faktor dieses Produktes ausmacht, ist aber Null, sobald n kein Vielfaches von $p_i^{a_i}$ ist. Denn, ist alsdann $p_i^{\beta_i}$ die höchste Potenz von p_i, welche in n aufgeht, so ist $\beta_i < a_i$, ferner ist $\frac{p_i^{\delta_i}}{[n, p_i^{\delta_i}]}$ gleich 1 für $\delta_i = 0, 1, 2, \ldots, \beta_i$, gleich p_i für $\delta_i = \beta_i + 1$, dagegen durch p_i^2 teilbar für die größeren Werte von δ_i, daher findet sich nach der Definition der Funktion $f(n, d)$ jene Summe gleich

$$\varphi(1) + \varphi(p_i) + \varphi(p_i^2) + \cdots + \varphi(p_i^{\beta_i}) - \frac{\varphi(p_i^{\beta_i + 1})}{\varphi(p_i)},$$

d. i. gleich $p_i^{\beta_i} - \frac{p_i^{\beta_i}(p-1)}{p-1} = 0$. Ist aber n kein Vielfaches von m, so kann es auch von wenigstens einer der Primzahlpotenzen $p_i^{a_i}$ kein Vielfaches sein und folglich ist einer der Faktoren von (29) also auch die Summe (28) gleich Null.

Ist dagegen n ein Vielfaches von m, so hat man

$$\sum_{d:m} f(n, d) = m, \tag{28a}$$

denn in dieser Voraussetzung ist $\beta_i \geqq a_i$ und der allgemeine Faktor des Produktes (29) gleich

$$\varphi(1) + \varphi(p_i) + \varphi(p_i^2) + \cdots + \varphi(p_i^{a_i}) = p_i^{a_i}.$$

4) Weiterhin besteht, falls d ein von 1 verschiedener Teiler von m ist, die Gleichung

$$\sum_e f(e, d) = 0, \tag{30}$$

wenn darin die Summation auf ein vollständiges Restsystem e (mod. m) erstreckt wird. Um dies zu zeigen, genügt es wegen (26), die Gleichung für den Fall zu bestätigen, wenn e ein vollständiges Restsystem (mod. d) durchläuft, denn, wenn sie für diesen Fall erfüllt ist, so ist sie es auch in dem erstgenannten, da das Restsystem (mod. m) sich aus $\frac{m}{d}$ vollständigen Restsystemen (mod. d) zusammensetzt. Läßt man nun e ein Restsystem (mod. d) durchlaufen, so darf man dabei sogleich von denjenigen Werten e desselben absehen, bei denen $\frac{d}{[e, d]}$ einen quadratischen Faktor enthält, und sich also, wenn d aus den verschiedenen Primzahlen

$$p_1, p_2, \ldots, p_\delta \tag{31}$$

zusammengesetzt gedacht wird, auf diejenigen beschränken, für welche $\frac{d}{[e, d]}$ einer der Primzahlen (31) oder einem Produkte von verschiedenen derselben gleich ist. Ist so z. B.

$$[e, d] = \frac{d}{p_{\lambda_1} \cdot p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_\varrho}},$$

wo $p_{\lambda_1}, p_{\lambda_2}, \ldots, p_{\lambda_\varrho}$ ϱ jener Primzahlen bedeuten, was für $\varphi(p_{\lambda_1} \cdot p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_\varrho})$ Zahlen e des Restsystems (mod. d) zutrifft, so gibt der zugehörige Teil der Summe (30) den Wert

$$(-1)^\varrho \cdot \frac{\varphi(d)}{\varphi(p_{\lambda_1} \cdot p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_\varrho})} \cdot \varphi(p_{\lambda_1} \cdot p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_\varrho}) = (-1)^\varrho \cdot \varphi(d);$$

da es aber $\binom{\delta}{\varrho}$ solcher Kombinationen von ϱ der δ Primfaktoren (31) gibt, ϱ aber jeden der Werte $0, 1, 2, \ldots, \delta$ annehmen darf, auf

solche Weise dann aber auch sämtliche Reste e (mod. d) umfaßt werden müssen, von denen nicht bereits abgesehen worden ist, so erhält man schließlich

$$\sum_e f(e, d) = \varphi(d) \cdot \left(\binom{\delta}{0} - \binom{\delta}{1} + \binom{\delta}{2} - \cdots + (-1)^\delta \cdot \binom{\delta}{\delta}\right) = 0,$$

d. i. die auf ein Restsystem (mod. d) erstreckte Summe ist gleich Null, also auch die Summe (30).

5) Endlich behaupten wir, wenn d wieder ein von 1 verschiedener Teiler von m und i kein Vielfaches desselben ist, die Gleichung

$$\sum_e f(n - ie, d) = 0, \tag{32}$$

wenn die Summation auf ein vollständiges Restsystem e (mod. m) erstreckt wird. Zum Beweise darf man die Summe durch die folgende:

$$\sum_e f(n - \tau e, d), \tag{33}$$

in welcher $\tau = [i, d]$ gedacht ist, ersetzen, denn, durchläuft e ein vollständiges Restsystem (mod. m), d. h. $\frac{m}{d}$ vollständige Restsysteme (mod. d), so durchlaufen (mod. d) die Zahlen ie und τe und folglich auch die Zahlen $n - ie$ und $n - \tau e$ dieselben Werte, wenn auch in anderer Reihenfolge, jeden gleich oft; für (mod. d) kongruente Werte von $n - ie$, $n - \tau e$ aber besteht nach (26) die Gleichheit der Zahlen $f(n - ie)$, $f(n - \tau e)$. Nun ist τ ein Teiler von d, welcher nach der über i gemachten Voraussetzung kleiner als d ist. Man kann daher

$$d = d_1 d_2 \tag{34}$$

setzen, in der Weise, daß d_1 das Produkt aller der Primzahlpotenzen sei, welche d und τ gemeinsam sind, d_2 aber das Produkt der Potenzen derjenigen Primzahlen, welche in d öfter aufgehen als in τ. Die Zahlen d_1, d_2 sind relativ prim, folglich

$$f(n - \tau e, d) = f(n - \tau e, d_1) \cdot f(n - \tau e, d_2)$$

oder, da τ durch d_1 aufgeht und daher $n - \tau e \equiv n$ (mod. d_1) ist, wegen (26) einfacher

$$f(n - \tau e, d) = f(n, d_1) \cdot f(n - \tau e, d_2),$$

mithin auch

$$\sum_e f(n - \tau e, d) = f(n, d_1) \cdot \sum_e f(n - \tau e, d_2).$$

Setzt man $\tau = d_1 \tau'$, so ist τ' ein von d_2 selbst verschiedener Teiler von d_2; da aber d_1, d_2 relativ prim, so durchlaufen, wenn e ein vollständiges Restsystem (mod. m), d. h. $\frac{m}{d_2}$ vollständige Restsysteme (mod. d_2) durchläuft, die Produkte $\tau e = d_1 \cdot \tau' e$ und $\tau' e$ (mod. d_2) von der Reihenfolge abgesehen dieselben Werte jeden gleich oft, so daß man auch schreiben kann

$$\sum_e f(n - \tau e, d) = f(n, d_1) \cdot \sum_e f(n - \tau' e, d_2). \tag{35}$$

Die Summe zur Rechten verschwindet jedenfalls, wenn n nicht durch τ' teilbar ist, denn alsdann enthält n wenigstens einen Primfaktor von τ' weniger oft als τ' und daher geht dann dieser in n und ebenso für jedes e in $n - \tau' e$ mindestens zweimal weniger oft auf als in d_2, d. h. $\frac{d_2}{[n - \tau' e, d_2]}$ enthält einen quadratischen Teiler und das allgemeine Glied $f(n - \tau' e, d_2)$ der Summe ist Null. Aber dieselbe Summe verschwindet auch, wenn n durch τ' teilbar, $n = \tau' \nu$ ist; denn alsdann ist $n - \tau' e = \tau' (\nu - e)$, wo mit e auch $\nu - e$ ein vollständiges Restsystem (mod. m) durchläuft, so daß wegen (26)

$$\sum_e f(n - \tau' e, d_2) = \sum_e f(\tau' e, d_2)$$

gesetzt werden kann. Nun ist aber $[\tau' e, d_2] = \tau' \cdot \left[e, \frac{d_2}{\tau'}\right]$ und

$$\frac{d_2}{[\tau' e, d_2]} = \frac{\frac{d_2}{\tau'}}{\left[e, \frac{d_2}{\tau'}\right]},$$

woraus nach der Definition der Funktion $f(n, d)$ leicht die Beziehung

$$f(\tau' e, d_2) = \frac{\varphi(d_2)}{\varphi\left(\frac{d_2}{\tau'}\right)} \cdot f\left(e, \frac{d_2}{\tau'}\right)$$

und somit die Gleichung

$$\sum_e f(n - \tau' e, d_2) = \frac{\varphi(d_2)}{\varphi\left(\frac{d_2}{\tau'}\right)} \cdot \sum_e f\left(e, \frac{d_2}{\tau'}\right)$$

hervorgeht. Da hierin $\frac{d_2}{\tau'}$ ein von 1 verschiedener Teiler von m ist, so verschwindet nach (30) die Summe zur Rechten, also auch die links stehende Summe, was zu beweisen war. Wegen (35) ist also allezeit die Summe (33) und damit auch die Summe (32), wie behauptet, gleich Null.

6. Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir folgenden Satz:

Die Anzahl $(n)_i$ der Zerfällungen einer Zahl n in i verschiedene Summanden der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$ (mod. m) wird gegeben durch die Formel

$$(36) \qquad (n)_i = \frac{(-1)^i}{m} \cdot \sum_{d:m} f(n, d) \cdot (-1)^{\frac{i}{d}} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i}{d}},$$

in welcher die Summation auf alle Teiler d von m zu erstrecken und das Symbol $\binom{\frac{m}{d}}{\frac{i}{d}}$, welches für ganzzahlige Werte von $\frac{i}{d}$ den Binomialkoeffizienten bedeutet, sooft $\frac{i}{d}$ eine Bruchzahl ist, gleich Null zu setzen ist. Zum Beweise dieses Satzes bemerken wir, daß nach der allgemeinen für $(n)_i$ entwickelten Rekursionsformel (I) der Wert des Symbols $(n)_i$ auf andere Symbole zurückkommt, deren Index kleiner ist als i, zuletzt also auf solche Symbole, deren Index Null ist. Wenn demnach eine durch n und i bestimmte Größe genau derselben Rekursionsformel Genüge leistet wie $(n)_i$ und zudem für jeden Wert von n und für den Index Null den gleichen Wert hat wie $(n)_0$, so muß sie ersichtlich auch für jeden Index i mit $(n)_i$ übereinstimmen. Wir haben also nur diese zwei Punkte für den in (36) rechts stehenden Ausdruck nachzuweisen, um die Formel (36) als richtig zu erkennen.

Was nun den zweiten Punkt anbelangt, so ist er nach den in der vorigen Nummer angegebenen Eigenschaften der Funktion $f(n, d)$ leicht zu bestätigen. Denn einerseits hat das Symbol $(n)_0$ offenbar den Wert Null, sooft n nicht durch m teilbar ist, und den Wert Eins im entgegengesetzten Falle, denn nur die Zahl $n \equiv 0$ (mod. m) läßt sich (einmal) durch null Summanden additiv (mod. m) erzeugen; andererseits liefert die Formel (36) für $(n)_0$ den Wert

$$(n)_0 = \frac{1}{m} \cdot \sum_{d:m} f(n, d),$$

welcher nach der dritten der für $f(n, d)$ gefundenen Eigenschaften in der Tat je nach den beiden unterschiedenen Fällen Null oder Eins ist.

Um auch den ersten Punkt festzustellen, tragen wir den Ausdruck (36) in die Rekursionsformel (I) ein, die wir jedoch für diesen Zweck in folgender Form schreiben:

$$(37) \qquad \frac{m-i}{m} \cdot \sum_e (n - 0 \cdot e)_i = \sum_e (n - 0 \cdot e)_i - \sum_e (n - 1 \cdot e)_{i-1} + \cdots$$
$$+ (-1)^i \cdot \sum_e (n - ie)_0.$$

Wir richten dann zunächst unsere Aufmerksamkeit auf die Glieder, welche einem bestimmt gedachten Teiler d von m entsprechen. Da zur Rechten von (37) im allgemeinen Gliede

$$(38) \qquad (-1)^{\lambda} \cdot \sum_{e} (n - \lambda e)_{i-\lambda}$$

der diesem Teiler d entsprechende Bestandteil den Binomialkoeffizienten $\binom{\frac{m}{d}}{\frac{i-\lambda}{d}}$ zum Faktor hat, so liefert das Glied (38) nur dann einen Beitrag, wenn $\frac{i-\lambda}{d}$ eine ganze Zahl, also $\lambda \equiv i \pmod{d}$ ist, und dieser Beitrag

$$(-1)^{\lambda} \cdot \frac{(-1)^{i-\lambda}}{m} \cdot \sum_{e} f(n - \lambda e, d)\,(-1)^{\frac{i-\lambda}{d}} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i-\lambda}{d}}$$

darf, da dann nach (26) $f(n - \lambda e, d) = f(n - ie, d)$ gesetzt werden kann, durch

$$\frac{(-1)^{i}}{m} \cdot \sum_{e} f(n - ie, d)\,(-1)^{\frac{i-\lambda}{d}} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i-\lambda}{d}}$$

ersetzt werden, so daß der gesamte auf den Teiler d bezügliche Bestandteil der rechten Seite von (37) gleich $\frac{(-1)^{i}}{m} \cdot \sum_{e} f(n - ie, d)$ mal dem Ausdrucke

$$(39) \qquad (-1)^{\frac{i}{d}} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i}{d}} + (-1)^{\frac{i-1}{d}} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i-1}{d}} + \cdots + (-1)^{\frac{i-i}{d}} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i-i}{d}}$$

sein wird, während der entsprechende Bestandteil der linken Seite von (37) auf gleiche Weise gleich $\frac{(-1)^{i}}{m} \cdot \sum_{e} f(n - ie, d)$ mal

$$(40) \qquad \frac{m-i}{m} \cdot (-1)^{\frac{i}{d}} \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i}{d}}$$

gesetzt werden kann. Beide Bestandteile werden also einander gleich sein sowohl, wenn

$$\sum_{e} f(n - ie, d) = 0$$

ist, als auch, wenn die Ausdrücke (39) und (40) einander gleich sind. Das erstere trifft gemäß 5) voriger Nummer zu, sooft $d > 1$ und i durch d nicht teilbar ist; anderenfalls aber das letztere, denn, wenn i aufgeht durch d, was für $d = 1$ gewiß geschieht, so bleiben in (39) als von Null verschieden nur die Glieder

$$(-1)^{\frac{i}{d}} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i}{d}} + (-1)^{\frac{i-d}{d}} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i-d}{d}} + (-1)^{\frac{i-2d}{d}} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i-2d}{d}} + \cdots + (-1)^0 \cdot \binom{\frac{m}{d}}{0}$$

$$= (-1)^{\frac{i}{d}} \cdot \left[\binom{\frac{m}{d}}{\frac{i}{d}} - \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i}{d}-1} + \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i}{d}-2} - \cdots + (-1)^{\frac{i}{d}} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{0} \right],$$

d. i. aber nach Formel (22) gleich

$$(-1)^{\frac{i}{d}} \cdot \binom{\frac{m}{d}-1}{\frac{i}{d}} = (-1)^{\frac{i}{d}} \cdot \frac{m-i}{m} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i}{d}}$$

und folglich sind (39) und (40) einander gleich.

Da demnach die beiden Seiten der Formel (37) für jeden Teiler d von m den gleichen Beitrag liefern, stimmen auch die gesamten Werte beider Seiten überein, und der beabsichtigte Nachweis ist geführt.

7. Aus der so bewiesenen Formel (36) für die Anzahl $(n)_i$ findet sich nunmehr leicht auch eine Formel für die Anzahl $(n)_i^{(0)}$ aller Zerfällungen von n in i verschiedene Summanden der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m-1$ (mod. m), indem man den Ausdruck für $(n)_i$ in die Rekursionsformel (Ia) einführt. Dadurch findet man

$$(41) \quad (n)_i^{(0)} = \frac{(-1)^i}{m} \cdot \sum_{d:m} f(n, d).$$

$$\cdot \left[(-1)^{\frac{i}{d}} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i}{d}} + (-1)^{\frac{i-1}{d}} \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i-1}{d}} + \cdots + (-1)^{\frac{i-i}{d}} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{\frac{i-i}{d}} \right].$$

Hier sind aber wieder nur diejenigen Binomialkoeffizienten $\binom{\frac{m}{d}}{\frac{i-\lambda}{d}}$ von Null verschieden, bei denen $\frac{i-\lambda}{d}$ eine ganze Zahl, d. h., unter $\left[\frac{i}{d}\right]$ das größte in $\frac{i}{d}$ enthaltene Ganze verstanden, einer der Zahlen $\left[\frac{i}{d}\right]$, $\left[\frac{i}{d}\right]-1, \ldots, 1, 0$ gleich ist. Somit reduziert sich die Klammergröße des Ausdrucks auf

$$(-1)^{\left[\frac{i}{d}\right]} \cdot \left[\binom{\frac{m}{d}}{\left[\frac{i}{d}\right]} - \binom{\frac{m}{d}}{\left[\frac{i}{d}\right]-1} + \cdots + (-1)^{\left[\frac{i}{d}\right]} \cdot \binom{\frac{m}{d}}{0} \right]$$

$$= (-1)^{\left[\frac{i}{d}\right]} \cdot \binom{\frac{m}{d}-1}{\left[\frac{i}{d}\right]},$$

und die Formel (41) nimmt ihre endgültige Gestalt an, wie sie folgt:

$$(42)\qquad (n)_i^{(0)} = \frac{(-1)^i}{m} \cdot \sum_{d:m} f(n, d)(-1)^{\left[\frac{i}{d}\right]} \cdot \binom{\frac{m}{d}-1}{\left[\frac{i}{d}\right]}.$$

Hieraus erschließt man die weiteren Gleichungen

$$(43)\qquad \sum_{i=0}^{m-1} (n)_i^{(0)} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{d:m} f(n, d) \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i+\left[\frac{i}{d}\right]} \cdot \binom{\frac{m}{d}-1}{\left[\frac{i}{d}\right]},$$

$$(44)\qquad \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i (n)_i^{(0)} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{d:m} f(n, d) \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{\left[\frac{i}{d}\right]} \cdot \binom{\frac{m}{d}-1}{\left[\frac{i}{d}\right]}.$$

Man teile nun die Werte, welche der Index i durchlaufen soll, in die Abteilungen:

$$0,\ d,\ 2d,\ \cdots \left(\frac{m}{d}-1\right)d$$

$$1,\ d+1,\ 2d+1,\ \cdots \left(\frac{m}{d}-1\right)d+1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d-1,\ 2d-1,\ 3d-1,\ \cdots \frac{m}{d}d-1,$$

und betrachte zunächst den Teil der auf i bezüglichen Summen, welcher der Abteilung

$$h,\ d+h,\ 2d+h,\ \cdots \left(\frac{m}{d}-1\right)d+h$$

entspricht; er ist in (43) der Ausdruck

$$(-1)^h \left[\binom{\frac{m}{d}-1}{0} + (-1)^{d+1} \cdot \binom{\frac{m}{d}-1}{1} + (-1)^{2(d+1)} \cdot \binom{\frac{m}{d}-1}{2} \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{\left(\frac{m}{d}-1\right)(d+1)} \cdot \binom{\frac{m}{d}-1}{\frac{m}{d}-1} \right],$$

d. h.
$$(-1)^h \cdot (1 + (-1)^{d+1})^{\frac{m}{d}-1},$$

also Null, wenn d gerade, dagegen gleich $(-1)^h \cdot 2^{\frac{m}{d}-1}$, wenn d ungerade ist, und daher erhält die ganze auf i bezügliche Summe in der Gleichung (43) den Wert Null für gerades d, dagegen den Wert

$$2^{\frac{m}{d}-1}\left(1-1+1-1+\cdots+(-1)^{d-1}\right)=2^{\frac{m}{d}-1}$$

für ungerades d. Daraus folgt

$$(45) \qquad \sum_{i=0}^{m-1}(n)_i^{(0)}=\frac{1}{2m}\cdot\sum_{\delta:m}2^{\frac{m}{\delta}}\cdot f(n,\delta),$$

worin die Summation auf die ungeraden Teiler δ von m zu erstrecken ist.

Ebenso ergibt sich in (44) der auf die einzelne Abteilung bezügliche Bestandteil der nach i zu nehmenden Summe gleich

$$\binom{\frac{m}{d}-1}{0}-\binom{\frac{m}{d}-1}{1}+\binom{\frac{m}{d}-1}{2}-\cdots+(-1)^{\frac{m}{d}-1}\cdot\binom{\frac{m}{d}-1}{\frac{m}{d}-1}=(1-1)^{\frac{m}{d}-1},$$

d. h. Null, mit Ausnahme des Falles, wo $\frac{m}{d}-1=0$ oder $d=m$ ist, wo dann der Wert des Ausdruckes Eins ist. Da dies für jede einzelne Abteilung gilt, so geht für die gesamte Summe der Wert Null oder m hervor, je nachdem d von m verschieden oder $d=m$ ist, und folglich kommt endlich ganz einfach

$$(46) \qquad \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\cdot(n)_i^{(0)}=f(n,m).$$

Die Formel (45) gibt die Gesamtanzahl aller überhaupt möglichen Zerfällungen der Zahl n in verschiedene Summanden der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m-1$ (mod. m), die Formel (46) den Überschuß der Anzahl der **geraden** über die Anzahl der **ungeraden** dieser Zerfällungen. In diesen Formeln ist jedoch, falls $n \equiv 0$ (mod. m) ist, die dann vorhandene Darstellung von n als Summe von null Summanden mitgezählt.

Leicht bestätigt man nach diesen allgemeinen Formeln noch einmal die Resultate der Nr. 1, wenn man $m=p$ wählt. Nehmen wir statt dessen m als ein Produkt aus zwei verschiedenen ungeraden Primzahlen p, q an:

$$m=p\cdot q.$$

Dann hat d nur die vier Werte $1, p, q, pq$ und aus (36) folgen nach der Definition der Funktion $f(n, d)$ sogleich die Resultate:

Wenn i teilerfremd ist zu pq, so ist

$$(n)_i=\frac{1}{pq}\cdot\binom{pq}{i}$$

in Übereinstimmung mit (20);

ist $i = \lambda p$, λ nicht teilbar durch q, so ist

$$(n)_{\lambda p} = \frac{1}{pq} \cdot \left[\binom{pq}{\lambda p} + f(n, p) \cdot \binom{q}{\lambda}\right],$$

wo $f(n, p)$ gleich $p - 1$ oder -1, je nachdem n teilbar ist oder nicht ist durch p;
ist $i = \lambda q$, λ nicht teilbar durch p, so ist

$$(n)_{\lambda q} = \frac{1}{pq} \cdot \left[\binom{pq}{\lambda q} + f(n, q) \cdot \binom{p}{\lambda}\right],$$

wo $f(n, q)$ gleich $q - 1$ oder -1, je nachdem n teilbar ist oder nicht ist durch q;
endlich für $i = 0$ und $i = pq$ ist

$$(n)_0 = (n)_{pq} = \frac{1}{pq} \cdot [1 + f(n, p) + f(n, q) + f(n, pq)],$$

d. h. Eins oder Null, je nachdem n teilbar ist oder nicht ist durch pq.

Aus (45) folgt für $m = pq$ als Anzahl aller möglichen Zerfällungen von n in verschiedene Summanden der Reihe $1, 2, 3, \ldots, pq - 1$ (mod. pq) der Wert

$$\frac{1}{pq}[f(n, pq) + 2^{q-1} f(n, p) + 2^{p-1} f(n, q) + 2^{pq-1} f(n, 1)],$$

d. h. je nachdem n teilerfremd zu pq oder durch p allein, oder durch q allein, oder durch pq teilbar ist, der folgende Wert resp.:

$$\frac{1}{pq}(1 - 2^{q-1} - 2^{p-1} + 2^{pq-1})$$
$$\frac{1}{pq}\left((p-1)(2^{q-1} - 1) - 2^{p-1} + 2^{pq-1}\right)$$
$$\frac{1}{pq}\left((q-1)(2^{p-1} - 1) - 2^{q-1} + 2^{pq-1}\right)$$
$$\frac{1}{pq}\left((p-1)(q-1) + 2^{p-1}(q-1) + 2^{q-1}(p-1) + 2^{pq-1}\right).$$

Desgleichen gibt die Formel (46) als Überschuß der Anzahl gerader über die Anzahl ungerader Zerfällungen von n in verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots, pq - 1$ (mod. pq), je nachdem n teilerfremd zu pq, oder durch p allein, oder durch q allein, oder durch pq teilbar ist, entsprechend den Wert

$$1, \; -(p-1), \; -(q-1), \; (p-1)(q-1).$$

Endlich sei noch bemerkt, daß für den Fall der Zerfällungen einer Zahl n in **gleiche** oder **verschiedene** Summanden der Reihe $0, 1, 2, \ldots, m - 1$ (mod. m) eine allgemeine, der Formel (36) ganz ähnliche, nur wesentlich einfachere Formel auf

völlig entsprechende Weise bewiesen werden kann. Man findet

$$(47) \qquad [n]_i = \frac{1}{m} \cdot \sum_{d:m} f(n, d) \cdot \binom{\frac{m}{d} + \frac{i}{d} - 1}{\frac{i}{d}}.$$

8. Wir legen nunmehr zweitens der Betrachtung statt des Elementensystems $0, 1, 2, \ldots, m-1$, indem wir jetzt den Modul m als ungerade Primzahl p voraussetzen, dasjenige Elementensystem $e_1, e_2, e_3, \ldots e_{\frac{p-1}{2}}$ zugrunde, welches aus den $\frac{p-1}{2}$ quadratischen Resten (mod. p) besteht. Indem wir wieder mit $(n)_i$ die Anzahl der Zerfällungen von n in i verschiedene Summanden der Reihe $e_1, e_2, \ldots e_{\frac{p-1}{2}}$ (mod. p) bezeichnen, können wir von vornherein bemerken, daß dies Symbol nur drei verschiedene Werte zuläßt, nämlich die Werte

$$(0)_i, \quad (\varrho)_i, \quad (\nu)_i,$$

wo ϱ einen beliebigen quadratischen Rest $< p$, ν einen beliebigen quadratischen Nichtrest $< p$ (mod. p) bezeichnet, welche Werte es annimmt, je nachdem n kongruent Null, oder ein quadratischer Rest oder ein Nichtrest von p ist. Für alle quadratischen Reste n hat in der Tat das Symbol $(n)_i$ den gleichen Wert, und ebenso für alle quadratischen Nichtreste n. Denn, sind n, n' zwei verschiedene quadratische Reste, so kann eine Zahl x, die gleichfalls quadratischer Rest ist, so bestimmt werden, daß $nx \equiv n'$ (mod. p), und dann ergibt sich aus jeder der gedachten Zerfällungen

$$n \equiv e_h + e_k + e_l + \cdots (\text{mod. } p)$$

von n durch Multiplikation mit x eine Zerfällung von n':

$$n' \equiv e'_h + e'_k + e'_l + \cdots (\text{mod. } p),$$

in welcher auch $e'_h, e'_k, e'_l, \ldots$ verschiedene quadratische Reste von p sein werden, und umgekehrt aus jeder solchen Zerfällung von n' auch eine Zerfällung derselben Art für n durch Multiplikation mit dem Sozius von x. Gleicherweise überzeugt man sich, daß $(n)_i$ auch für alle quadratischen Nichtreste n ein und denselben Wert besitzt. Beachtet man dies aber in der Rekursionsformel (I), so kommt es offenbar darauf an, festzustellen, wie oft im allgemeinen Gliede

$$(48) \qquad (-1)^{\lambda-1} \cdot \sum_e (n - \lambda e)_{i-\lambda}$$

derselben die Differenz $n - \lambda e$, während e alle quadratischen Reste,

oder, was auf dasselbe hinauskommt, wie oft die Differenz $n - \lambda x^2$, während x die Zahlen $1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}$ durchläuft, der Null, wie oft einem quadratischen Reste, wie oft einem quadratischen Nichtreste (mod. p) kongruent wird.

Dabei setzen wir zuvörderst n als nicht durch p teilbar voraus. Die gesuchten Anzahlen seien O, R, N; statt dessen suchen wir die entsprechenden Anzahlen O', R', N' für den Ausdruck $-n\lambda + y^2$; offenbar ist

$$(49) \qquad \begin{cases} O = O',\ R = R',\ N = N', \text{ wenn } \left(\frac{-\lambda}{p}\right) = 1 \\ O = O',\ R = N',\ N = R', \text{ wenn } \left(\frac{-\lambda}{p}\right) = -1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Statt der eleganten algebraischen Methode, durch welche *v. Sterneck* diese Anzahlen bestimmt, wählen wir, um ganz im arithmetischen Gebiete zu verbleiben, die folgende, aus dem Grunde der Sache fließende Betrachtung. Da $n - \lambda x^2$ stets einen der drei unterschiedenen Fälle darbietet, findet sich zunächst

$$(50) \qquad O' + R' + N' = \frac{p-1}{2}.$$

Ferner ist offenbar O' gleich Null oder Eins, je nachdem $\left(\frac{n\lambda}{p}\right) = -1$ oder $\left(\frac{n\lambda}{p}\right) = +1$ ist, also allgemein

$$(51) \qquad O' = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{n\lambda}{p}\right)\right).$$

Demnach findet sich

$$(52) \qquad R' + N' = \frac{1}{2}\left(p - 2 - \left(\frac{n\lambda}{p}\right)\right).$$

Um R', N' zu bestimmen, unterscheiden wir nun zwei Fälle.

Erstens sei $\left(\frac{-n\lambda}{p}\right) = -1$. Aus einer Kongruenz $-n\lambda + y^2 \equiv m$ (mod. p) folgt dann durch Multiplikation mit $-n\lambda$

$$-n\lambda \cdot y^2 + (n\lambda)^2 \equiv -n\lambda \cdot m,$$

oder, wenn mit y' der Sozius von y bezeichnet und $n\lambda y' \equiv z$ gesetzt wird,

$$-n\lambda + z^2 \equiv -n\lambda \cdot m y'^2,$$

wo die Zahl $-n\lambda \cdot m y'^2$ entgegengesetzten quadratischen Charakter hat, wie m. Hieraus schließt man

$$N' = R',$$

also

$$R' = \frac{1}{4}\left(p - 2 - \left(\frac{n\lambda}{p}\right)\right), \quad N' = \frac{1}{4}\left(p - 2 - \left(\frac{n\lambda}{p}\right)\right).$$

Gleichviel also, ob $\left(\frac{-\lambda}{p}\right) = +1$ oder -1 ist, erhält man in diesem ersten Falle

$$(53)\quad \begin{cases} O = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\right) \\ R = N = \frac{1}{4}\left(p - 2 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right). \end{cases}$$

Zweitens sei $\left(\frac{-n\lambda}{p}\right) = +1$. Wir zeigen zuerst, daß R', N' von Null verschieden sind.

Ist $\left(\frac{n\lambda}{p}\right) = -1$, so nimmt der Ausdruck $-n\lambda + y^2$ $\frac{p-1}{2}$ von Null verschiedene Werte an, die nicht sämtlich quadratische Reste sind, da $-n\lambda$ nicht darunter ist, also ist $N' > 0$. Ist $\left(\frac{n\lambda}{p}\right) = +1$, so wird $-n\lambda + y^2$ einmal Null und nimmt außerdem $\frac{p-3}{2}$ verschiedene Werte an, die nicht sämtlich quadratische Reste sein können, denn, da die Summe aller quadratischen Reste (mod. p) kongruent Null ist, würde die Summe jener $\frac{p-3}{2}$ quadratischen Reste dem nicht unter ihnen befindlichen quadratischen Reste $-n\lambda$ entgegengesetzt sein (mod. p), und durch Addition aller Ausdrücke $-n\lambda + y^2$ entstände die unmögliche Kongruenz

$$-\frac{p-1}{2}\cdot n\lambda \equiv n\lambda \pmod{p}.$$

Also ist wieder $N' > 0$.

Daß aber in beiden Fällen auch $R' > 0$ ist[1]) folgt so: Wäre im Gegenteil jeder der von Null verschiedenen Ausdrücke $-n\lambda + y^2$ quadratischer Nichtrest, so entstünde aus zwei Kongruenzen

$$-n\lambda + y^2 \equiv \nu, \quad -n\lambda + y'^2 \equiv \nu'$$

durch Multiplikation die dritte:

$$-n\lambda\,(n\lambda \pm yy')^2 + \left(n\lambda\,(y \pm y')\right)^2 \equiv -n\lambda\cdot\nu\nu',$$

wo wenigstens eine der Zahlen $n\lambda \pm yy'$ durch p nicht teilbar ist, da $\lambda \overline{\gtrless} i \overline{\gtrless} \frac{p-1}{2}$ es nicht ist. Wenn nun mit σ ihr Sozius bezeichnet und $n\sigma\lambda\,(y \pm y') = z$ gesetzt wird, so kommt dann

---

1) Das Folgende setzt $\frac{p-1}{2} \overline{\gtrless} 3$ also $p \overline{\gtrless} 7$ voraus. Ist aber $p = 3$, so kann wegen der vorausgesetzten Gleichung $\left(\frac{-n\lambda}{p}\right) = +1$ nur $\left(\frac{n\lambda}{p}\right) = -1$ und dann $N' = 1$, $R' = 0$ sein; für $p = 5$ dagegen kann nur $\left(\frac{n\lambda}{p}\right) = +1$ und dann wieder $N' = 1$, $R' = 0$ sein. In beiden Fällen bestehen also die weiter unten erhaltenen Beziehungen (55a) ebenfalls.

(54) $$-n\lambda + z^2 \equiv -n\lambda\cdot\nu\nu'\sigma^2,$$

d. h. kongruent einem quadratischen Reste, gegen die Voraussetzung. Also ist in der Tat immer auch $R' > 0$.

Nachdem dies festgestellt ist, betrachte man die N' verschiedenen Kongruenzen

$$-n\lambda + y^2 \equiv \nu, \quad -n\lambda + y'^2 \equiv \nu', \; \cdots$$

Durch Multiplikation der ersten mit den, falls $N' > 1$ ist, $N' - 1$ folgenden erhält man $N' - 1$ Kongruenzen von der Form

$$-n\lambda + z^2 \equiv \varrho,$$

wo ϱ ein quadratischer Rest, also ist $R' \geqq N' - 1$, ein Resultat, das auch, falls $N' = 1$ ist, zutreffend ist, da $R' > 0$. Wird aber eine jener N' Kongruenzen mit allen R' Kongruenzen der letzteren Art multipliziert, so findet man gleichermaßen R' Kongruenzen von der Form

$$-n\lambda + z^2 \equiv \nu,$$

wo ν ein quadratischer Nichtrest, mithin ist $N' \geqq R'$. Da nun der Ausdruck (52) im gegenwärtig betrachteten Falle stets ungerade ist, also nicht $R' = N'$ sein kann, so folgt

(55) $$R' = N' - 1.$$

Man findet daher jetzt durch Verbindung von (52) und (55)

(55a) $$R' = \frac{1}{4}\left(p - \left(\frac{n\lambda}{p}\right)\right) - 1, \quad N' = \frac{1}{4}\left(p - \left(\frac{n\lambda}{p}\right)\right).$$

So gelangt man zu den Resultaten:

Ist $\left(\frac{-\lambda}{p}\right) = 1$, so ist

$$O = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right), \quad R = \frac{p - 4 - \left(\frac{-1}{p}\right)}{4}, \quad N = \frac{p - \left(\frac{-1}{p}\right)}{4},$$

wenn aber $\left(\frac{-\lambda}{p}\right) = -1$, so ist

(53a) $$O = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right), \quad R = \frac{p - \left(\frac{-1}{p}\right)}{4}, \quad N = \frac{p - 4 - \left(\frac{-1}{p}\right)}{4}.$$

Die in den beiden unterschiedenen Fällen gefundenen Tatsachen lassen sich schließlich folgendermaßen aussprechen:

Ist $n = \varrho$ quadratischer Rest (mod. p), so finden die Formeln statt:

(56) $$\begin{cases} O = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{\lambda}{p}\right)\right) \\ R = \frac{p - 1 + \left(\frac{-\lambda}{p}\right) - \left(\frac{\lambda}{p}\right)}{4} - \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right) \end{cases}$$

$$N = \frac{p-1+\left(\frac{-\lambda}{p}\right)-\left(\frac{\lambda}{p}\right)}{4};$$

ist dagegen $n = \nu$ quadratischer Nichtrest (mod. p), so ist zu setzen

$$(57)\quad \begin{cases} O = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right) \\ R = \dfrac{p-1-\left(\frac{-\lambda}{p}\right)+\left(\frac{\lambda}{p}\right)}{4} \\ N = \dfrac{p-1-\left(\frac{-\lambda}{p}\right)+\left(\frac{\lambda}{p}\right)}{4} - \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right). \end{cases}$$

9. Wenn man jetzt auch in der Rekursionsformel (I) die eben unterschiedenen beiden Fälle, welche n bieten kann, gesondert betrachtet, so ergeben sich durch Beachtung der vorigen Formeln bei den einzelnen Gliedern der Rekursionsformel die nachstehenden Gleichungen:

$$(58)\quad i\cdot(\varrho)_i = \sum_{\lambda=1}^{i}(-1)^{\lambda-1}\left[\frac{p-3-\left(\frac{-\lambda}{p}\right)-\left(\frac{\lambda}{p}\right)}{4}\cdot(\varrho)_{i-\lambda}+\frac{p-1+\left(\frac{-\lambda}{p}\right)-\left(\frac{\lambda}{p}\right)}{4}\cdot(\nu)_{i-\lambda} + \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right)\cdot(0)_{i-\lambda}\right]$$

$$(59)\quad i\cdot(\nu)_i = \sum_{\lambda=1}^{i}(-1)^{\lambda-1}\left[\frac{p-1-\left(\frac{-\lambda}{p}\right)+\left(\frac{\lambda}{p}\right)}{4}\cdot(\varrho)_{i-\lambda}+\frac{p-3+\left(\frac{-\lambda}{p}\right)+\left(\frac{\lambda}{p}\right)}{4}\cdot(\nu)_{i-\lambda} + \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right)\cdot(0)_{i-\lambda}\right].$$

Da endlich, wenn n durch p teilbar ist, das allgemeine Glied (48) der Rekursionsformel sich auf

$$(-1)^{\lambda-1}\cdot\sum_{e}(-\lambda e)_{i-\lambda}$$

reduziert, $-\lambda e$ aber $\frac{p-1}{2}$ mal quadratischer Rest oder Nichtrest ist, je nachdem $\left(\frac{-\lambda}{p}\right) = +1$ oder -1 ist, kann man den vorigen beiden Formeln die dritte hinzufügen:

$$(60)\quad i\cdot(0)_i = \sum_{\lambda=1}^{i}(-1)^{\lambda-1}\left[\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right)\cdot p'\cdot(\varrho)_{i-\lambda}+\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right)\cdot p'\cdot(\nu)_{i-\lambda}\right],$$

in welcher p' zur Abkürzung für $\frac{p-1}{2}$ gesetzt ist und mit der nun alle möglichen Fälle erschöpft sind.

Mit diesen Formeln darf das in Nr. 8 gestellte Problem, nämlich die Bestimmung der dort definierten Anzahl $(n)_i$ als gelöst betrachtet werden, insofern sie gestatten, die Werte dieses Symbols allmählich für die wachsenden Werte des Index i zu berechnen. Doch fehlt hier noch, was bei der früheren Aufgabe durch die Formel (36) erreicht worden ist, daß aus den erhaltenen Formeln ein expliziter Ausdruck für $(n)_i$ hergeleitet werde, eine Aufgabe, die noch ungelöst ist und nicht leicht zu sein scheint. Davon also hier absehend, wollen wir nicht unterlassen, eine interessante Anwendung der erhaltenen Resultate auf die Lehre von der Kreisteilung nach *v. Sterneck* noch mitzuteilen.

Bezeichnen, wie üblich, η_0, η_1 die beiden aus den Wurzeln der Kreisteilungsgleichung (8) gebildeten $\frac{p-1}{2}$-gliedrigen Perioden

$$\eta_0 = \sum_\varrho r^\varrho, \quad \eta_1 = \sum_\nu r^\nu,$$

worin die Summationen sich resp. auf alle quadratischen Reste ϱ und Nichtreste $\nu < p$ erstrecken, so sollen die Gleichungen aufgestellt werden, denen die in jeder dieser Perioden enthaltenen Wurzeln Genüge leisten. Sei

$$x^{\frac{p-1}{2}} + M_1 \cdot x^{\frac{p-3}{2}} + M_2 \cdot x^{\frac{p-5}{2}} + \cdots + M_{\frac{p-1}{2}} = 0 \tag{61}$$

die erste dieser Gleichungen mit den Wurzeln r^ϱ; dann ist

$$(-1)^i \cdot M_i = \sum r^{\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_i}, \tag{62}$$

wo die Summation über alle Kombinationen aus i verschiedenen der quadratischen Reste ϱ (mod. p) zu erstrecken ist. Da sich unter diesen Kombinationen, wie in Nr. 8 bemerkt worden, jeder Rest $(\varrho)_i$ mal, jeder Nichtrest $(\nu)_i$ mal und die Null $(0)_i$ mal vorfinden muß, nimmt die Gleichung (62) die Gestalt an

$$(-1)^i \cdot M_i = (0)_i + (\varrho)_i \cdot \eta_0 + (\nu)_i \cdot \eta_1. \tag{63}$$

Nach der Theorie der Kreisteilung ist aber bekanntlich

$$\eta_0 = \frac{-1+P}{2}, \quad \eta_1 = \frac{-1-P}{2}, \tag{64}$$

worin P zur Abkürzung steht für $+\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p}$. So kommt, wenn

$$\sigma_i = (\varrho)_i + (\nu)_i, \quad \delta_i = (\varrho)_i - (\nu)_i \tag{65}$$

geschrieben wird,

$$(66) \qquad (-1)^i M_i = -\frac{1}{2}\sigma_i + P\cdot\frac{1}{2}\delta_i + (0)_i,$$

also

$$(67) \qquad 2i\cdot M_i = (-1)^i\cdot[-i\sigma_i + P\cdot i\delta_i + 2i\cdot(0)_i].$$

Aus den Formeln (58) und (59) fließen aber diese beiden anderen:

$$i\cdot\sigma_i = \sum_{\lambda=1}^{i}(-1)^{\lambda-1}\left[\frac{p-2}{2}\cdot\sigma_{i-\lambda} - \frac{1}{2}\left(\frac{-\lambda}{p}\right)\cdot\delta_{i-\lambda} + (0)_{i-\lambda}\right]$$

$$i\cdot\delta_i = \sum_{\lambda=1}^{i}(-1)^{\lambda-1}\left[-\frac{1}{2}\cdot\delta_{i-\lambda} - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\cdot\sigma_{i-\lambda} + \left(\frac{\lambda}{p}\right)\cdot(0)_{i-\lambda}\right].$$

Durch Substitution dieser Werte und des Wertes (60) in die vorige Formel entsteht die Gleichung

$$2i\cdot M_i$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{i}(-1)^{i-\lambda}\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot\sigma_{i-\lambda} - \frac{p}{2}\left(\frac{-\lambda}{p}\right)\cdot\delta_{i-\lambda} + (0)_{i-\lambda}\right]$$

$$+ P\cdot\sum_{\lambda=1}^{i}(-1)^{i-\lambda}\cdot\left[\frac{1}{2}\delta_{i-\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\cdot\sigma_{i-\lambda} - \left(\frac{\lambda}{p}\right)\cdot(0)_{i-\lambda}\right],$$

der man mit Rücksicht auf (66) leicht folgende Gestalt gibt:

$$(68) \qquad 2i\cdot M_i = \sum_{\lambda=1}^{i} M_{i-\lambda}\cdot\left(1 - P\cdot\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right).$$

So hat man eine Rekursionsformel erhalten, um die Koeffizienten der Gleichung (61) allmählich zu berechnen. Aus dieser Gleichung erhält man bekanntlich die andere, welche die Wurzeln r^ν der zweiten Periode η_1 zu Wurzeln hat, indem man in ihren Koeffizienten das Vorzeichen der Quadratwurzel P entgegengesetzt nimmt.

Ganz ähnlich, wie wir im vorhergehenden die Anzahl $(n)_i$ der Zerfällungen der Zahl n in i quadratische Reste (mod. p) ermittelt haben, ließe sich auch die Anzahl ihrer Zerfällungen in i quadratische Nichtreste (mod. p), welche wir $(\bar{n})_i$ nennen wollen, herleiten. Doch bedarf es solcher Herleitung nicht, da sich $(\bar{n})_i$ unmittelbar aus $(n)_i$ folgern läßt. Es ist nämlich zunächst leicht wieder einzusehen, daß auch $(\bar{n})_i$ für alle quadratischen Reste n und ebenso für alle quadratischen Nichtreste n je den gleichen Wert hat. Ist aber

$$n \equiv e_h + e_k + e_l + \cdots \pmod{p}$$

eine Zerfällung von n in i verschiedene quadratische Reste und ν irgendein quadratischer Nichtrest, so ergibt sich aus dieser Zerfällung durch Multiplikation mit ν eine Zerfällung der Zahl $n' \equiv n\nu$ (mod. p),

welche den entgegengesetzten quadratischen Charakter hat wie n, in i verschiedene quadratische Nichtreste, wie denn auch umgekehrt aus jeder Zerfällung dieser Zahl n' in i Nichtreste eine Zerfällung der Zahl n von entgegengesetztem quadratischen Charakter in i quadratische Reste hervorgeht. Demzufolge ergeben sich sogleich die beiden Gleichungen

$$(69) \qquad (\varrho)_i = (\bar{\nu})_i, \quad (\nu)_i = (\bar{\varrho})_i,$$

während drittens

$$(70) \qquad (0)_i = (\bar{0})_i$$

sein wird. Mit diesen Formeln erledigt sich daher ohne weiteres die auf das Elementensystem der Nichtreste bezügliche Aufgabe.

Noch wollen wir bemerken, daß man ganz ähnlich wie im vorigen, aber auf Grund der allgemeinen Rekursionsformel (II) zu Gleichungen gelangen kann, welche den Gleichungen (58) bis (60) entsprechen und die Anzahl $[n]_i$ der Zerfällungen von n in i gleiche oder verschiedene quadratische Reste (bezw. Nichtreste) (mod. p) zu berechnen verstatten. Doch können wir hier nur kurz auf die betreffenden Stellen der Arbeit von *v. Sterneck* verweisen, ebenso wie es mit Bezug auf seine Untersuchungen über die Anzahl der Zerfällungen einer Zahl in kubische oder höhere Potenzreste (mod. p) geschehen mag, welche, wie er für kubische Reste ausführlich, für höhere Potenzreste andeutungsweise dargetan hat, durch völlig analoge Betrachtungen ermittelt werden kann.

10. Noch einmal zum Elementensysteme der quadratischen Reste zurückkehrend, fügen wir hier noch die Hauptresultate der darauf bezüglichen Untersuchung *Sterns* an. Bei ihr handelt es sich um die Bestimmung der Gesamtzahl aller möglichen Zerfällungen einer Zahl n in verschiedene quadratische Reste (mod. p). Da die Anzahl der Zerfällungen in irgendeine bestimmte Anzahl i solcher Reste für jeden quadratischen Rest n die gleiche, und ebenso für jeden quadratischen Nichtrest n, so wird dies auch gelten für jene Gesamtanzahl aller Zerfällungen: für jeden quadratischen Rest $n = \varrho$ beträgt sie

$$(71) \qquad (\varrho) = \sum_{i=1}^{p'} (\varrho)_i,$$

für jeden quadratischen Nichtrest $n = \nu$

$$(72) \qquad (\nu) = \sum_{i=1}^{p'} (\nu)_i,$$

wo wieder p' zur Abkürzung steht für $\frac{p-1}{2}$; endlich erhält man für

jede durch p teilbare Zahl die Gesamtzahl jener Zerfällungen durch die Formel

(73) $$(0) = \sum_{i=1}^{p'} (0)_i.$$

Nun beträgt, da jede Summe verschiedener der p' quadratischen Reste notwendig entweder der Null oder einem quadratischen Reste oder Nichtreste (mod. p) kongruent sein muß, die ganze Anzahl aller aus verschiedenen der p' quadratischen Reste (mod. p) möglichen Summen

$$(0) + p' \cdot \big((\varrho) + (\nu)\big);$$

da sie andererseits offenbar gleich

$$p' + \frac{p'(p'-1)}{1 \cdot 2} + \frac{p'(p'-1)(p'-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + 1 = 2^{p'} - 1$$

ist, so folgt zwischen den Anzahlen (ϱ), (ν), (0) die Beziehung

(74) $$1 + (0) + p'\big((\varrho) + (\nu)\big) = 2^{p'}.$$

Unterscheidet man ferner die geraden von den ungeraden Zerfällungen, so wird auch die Anzahl aller ersteren sowohl, wie die aller letzteren und daher auch deren Unterschied für jeden quadratischen Rest und desgleichen für jeden quadratischen Nichtrest je der gleiche sein. Nennt man $(\varrho)'$ diesen Unterschied für jeden quadratischen Rest, $(\nu)'$ für jeden quadratischen Nichtrest und $(0)'$ für die durch p teilbaren Zahlen, so finden sich daher die Formeln

(75) $$(\varrho)' = \sum_{i=1}^{p'} (-1)^i \cdot (\varrho)_i$$

(76) $$(\nu)' = \sum_{i=1}^{p'} (-1)^i \cdot (\nu)_i$$

(77) $$(0)' = \sum_{i=1}^{p'} (-1)^i \cdot (0)_i.$$

Hiernach beträgt der Unterschied zwischen der Anzahl aller aus einer geraden und derjenigen aller aus einer ungeraden Anzahl von quadratischen Resten (mod. p) gebildeten Summen einerseits

$$(0)' + p'\big((\varrho)' + (\nu)'\big),$$

andererseits offenbar

$$-\frac{p'}{1} + \frac{p'(p'-1)}{1 \cdot 2} - \frac{p'(p'-1)(p'-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + (-1)^{p'} = -1$$

und somit geht folgende Beziehung:

(78) $$1 + (0)' + p'\big((\varrho)' + (\nu)'\big) = 0$$

zwischen den Anzahlen $(0)'$, $(\varrho)'$, $(\nu)'$ hervor.

Wir entnehmen nun der Lehre von der Kreisteilung die bekannte Formel:

$$\prod_{\varrho}(x - r^{\varrho}) = \frac{1}{2}\left(Y(x) + Z(x)\cdot\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot p}\right), \tag{79}$$

in welcher links über alle inkongruenten quadratischen Reste $\varrho < p$ von p zu multiplizieren ist und die Funktionen $Y(x)$, $Z(x)$ zur Rechten ganze ganzzahlige Funktionen von x bedeuten. Setzen wir darin zuerst $x = -1$, so bedeuten $Y(-1)$, $Z(-1)$ ganze Zahlen, die wir kurz y, z nennen wollen, und man erhält

$$(-1)^{p'}\cdot\prod_{\varrho}(1 + r^{\varrho}) = \frac{y + Pz}{2}. \tag{80}$$

Da aber andererseits

$$\prod_{\varrho}(x - r^{\varrho}) = x^{\frac{p-1}{2}} + M_1 x^{\frac{p-3}{2}} + \cdots + M_{\frac{p-1}{2}} \tag{81}$$

ist, so findet sich auch

$$\prod_{\varrho}(1 + r^{\varrho}) = 1 + \sum_{i=1}^{p'}(-1)^i M_i,$$

d. i. nach (63)

$$\prod_{\varrho}(1 + r^{\varrho}) = 1 + \sum_{i=1}^{p'}\left((0)_i + (\varrho)_i\eta_0 + (\nu)_i\eta_1\right)$$

oder

$$\prod_{\varrho}(1 + r^{\varrho}) = 1 + (0) + (\varrho)\cdot\eta_0 + (\nu)\cdot\eta_1$$

oder endlich mit Beachtung der Gleichungen (64)

$$\prod_{\varrho}(1 + r^{\varrho}) = 1 + (0) - \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\delta P, \tag{80 a}$$

worin zur Abkürzung

$$\sigma = (\varrho) + (\nu),\quad \delta = (\varrho) - (\nu) \tag{82}$$

gesetzt ist. Die Vergleichung der Formeln (80), (80 a) führt die neue Gleichung

$$1 + (0) - \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\delta P = (-1)^{p'}\cdot\left(\frac{y}{2} + \frac{z}{2}\cdot P\right)$$

herbei, welche sogleich in die beiden folgenden zerfällt:

$$1 + (0) - \frac{1}{2}\sigma = (-1)^{p'}\cdot\frac{y}{2},\quad \delta = (-1)^{p'}\cdot z. \tag{83}$$

Verbinden wir die erstere von ihnen mit der Gleichung (74), so erhalten wir

(84) $$\sigma = \frac{2^{p'+1} - (-1)^{p'} y}{p}$$

und aus den so gefundenen Werten von σ und δ die folgenden Ausdrücke:

(85) $$(\varrho) = \frac{2^{p'+1} + (-1)^{p'+1} y}{2p} + (-1)^{p'} \cdot \frac{z}{2}$$

$$(\nu) = \frac{2^{p'+1} + (-1)^{p'+1} y}{2p} - (-1)^{p'} \cdot \frac{z}{2},$$

zu denen nun nach (83) als dritter der Ausdruck

(85a) $$(0) = \frac{2^{p'+1} - (p-1)(-1)^{p'+1} y}{2p} - 1$$

hinzutritt.

Setzen wir dagegen in (79) nunmehr $x = 1$, so werden wieder $Y(x)$, $Z(x)$ zu ganzen Zahlen, welche wir kurz mit y', z' bezeichnen wollen, und man erhält

(86) $$\prod_{\varrho} (1 - r^{\varrho}) = \frac{1}{2}(y' + z'P),$$

andererseits aus (81)

$$\prod_{\varrho} (1 - r^{\varrho}) = 1 + M_1 + M_2 + \cdots + M_{\frac{p-1}{2}},$$

d. h. nach Einsetzung der aus (63) sich ergebenden Werte von M_1, $M_2, \ldots, M_{\frac{p-1}{2}}$

$$\prod_{\varrho} (1 - r^{\varrho}) = 1 + \sum_{i=1}^{p'} (-1)^i \cdot \big((0)_i + (\varrho)_i \eta_0 + (\nu)_i \eta_1\big)$$

$$= 1 + (0)' + (\varrho)' \cdot \eta_0 + (\nu)' \cdot \eta_1$$

oder endlich, wenn zur Abkürzung

(87) $$\sigma' = (\varrho)' + (\nu)', \quad \delta' = (\varrho)' - (\nu)'$$

gesetzt wird,

(86a) $$\prod_{\varrho} (1 - r^{\varrho}) = 1 + (0)' - \frac{\sigma'}{2} + \frac{\delta'}{2} \cdot P.$$

Durch Vergleichung von (86), (86a) kommt jetzt

$$1 + (0)' - \frac{1}{2}\sigma' + \frac{1}{2}\delta' \cdot P = \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}z' \cdot P,$$

d. h.

(88) $$1 + (0)' - \frac{1}{2}\sigma' = \frac{1}{2}y', \quad \delta' = z',$$

Gleichungen, deren erstere in Verbindung mit (78)

(89) $$\sigma' = -\frac{y'}{p}$$

ergibt. Aus dieser Gleichung erkennt man, daß y' ein Vielfaches von

p sein muß, und wenn wir deshalb $y' = -pt'$ setzen, so kommt einfach

$$\sigma' = t' \tag{90}$$

und nun aus den erhaltenen Werten für σ', δ'

$$(\varrho)' = \frac{t' + z'}{2}, \quad (\nu)' = \frac{t' - z'}{2}, \tag{91}$$

zwei Gleichungen, denen sich wegen (78) die dritte

$$(0)' = -\frac{p-1}{2} \cdot t' - 1 \tag{91 a}$$

hinzugesellt.

11. Handeln wir zuerst von dem Falle $p = 4k + 3$. Da in diesem Falle im ganzen die Zahlen $-\nu$ mit den Zahlen ϱ (mod. p) übereinstimmen und $\Sigma\nu \equiv 0$ (mod. p) ist, so ist

$$\prod_{\varrho}(1 - r^{\varrho}) = \prod_{\nu}(1 - r^{-\nu}) = -\prod_{\nu}(1 - r^{\nu}).$$

Andererseits ist nach (4)

$$\prod_{h=1}^{p-1}(1 - r^{h}) = \prod_{\varrho}(1 - r^{\varrho}) \cdot \prod_{\nu}(1 - r^{\nu}) = p.$$

Demnach ergibt sich zunächst

$$\prod_{\varrho}(1 - r^{\varrho}) = \pm\, i\sqrt{p}. \tag{92}$$

Um über das Vorzeichen der rechten Seite zu entscheiden, schreiben wir das Produkt zur Linken, indem wir für r seinen Wert

$$r = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$$

einsetzen, in der Form

$$\prod_{\varrho}\left(1 - \cos\frac{2\varrho\pi}{p} - i\sin\frac{2\varrho\pi}{p}\right) = (-2i)^{p'} \cdot e^{\frac{\pi i \Sigma\varrho}{p}} \cdot \prod_{\varrho}\sin\frac{\varrho\pi}{p}.$$

Da hier das Produkt $\prod_{\varrho}\sin\frac{\varrho\pi}{p}$ zugleich mit seinen einzelnen Faktoren positiv ist, hat das fragliche Produkt das gleiche Vorzeichen wie

$$(-i)^{p'} \cdot e^{\frac{\pi i \Sigma\varrho}{p}} = (-i)^{p'} \cdot (-1)^{\frac{\Sigma\varrho}{p}},$$

d. h. das Vorzeichen von $(-1)^{\frac{p^2-1}{8} + \Sigma\varrho}$. Man darf daher die Formel (92) in folgender Form schreiben:

$$\prod_{\varrho}(1 - r^{\varrho}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8} + \Sigma\varrho} \cdot i\sqrt{p}. \tag{93}$$

Ferner ist

$$\prod_{\varrho}(1 + r^{\varrho}) \cdot \prod_{\varrho}(1 - r^{\varrho}) = \prod_{\varrho}(1 - r^{2\varrho}),$$

also, je nachdem 2 quadratischer Rest oder Nichtrest von p, d. h. $p = 8\varkappa + 7$ oder $p = 8\varkappa + 3$ ist, gleich dem Produkte $\prod_{\varrho}(1 - r^{\varrho})$ oder $\prod_{\nu}(1 - r^{\nu}) = -\prod_{\varrho}(1 - r^{\varrho})$. Daraus folgt jederzeit

$$(94) \qquad \prod_{\varrho}(1 + r^{\varrho}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Vergleicht man diese Resultate mit den Formeln (80) und (86), in denen jetzt $P = i\sqrt{p}$ zu setzen ist, so finden sich ohne weiteres die Werte

$$y = -2 \cdot (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}, \quad z = 0$$

$$y' = 0, \quad z' = 2 \cdot (-1)^{\frac{p^2-1}{8} + \Sigma\varrho}, \quad t' = 0$$

und daraus dann die nachstehenden Anzahlen

$$(95) \qquad \begin{cases} (\varrho) = (\nu) = \dfrac{2^{\frac{p-1}{2}} - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{p} \\ (0) = \dfrac{2^{\frac{p-1}{2}} - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{p} + (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} - 1 \end{cases}$$

und

$$(96) \qquad \begin{cases} (0)' = -1 \\ (\varrho)' = (-1)^{\frac{p^2-1}{8} + \Sigma\varrho}, \quad (\nu)' = -(-1)^{\frac{p^2-1}{8} + \Sigma\varrho}. \end{cases}$$

Für jede durch p nicht teilbare Zahl n ist also

$$(97) \qquad (n)' = \left(\frac{n}{p}\right) \cdot (-1)^{\frac{p^2-1}{8} + \Sigma\varrho},$$

während

$$(98) \qquad (n) = \frac{2^{\frac{p-1}{2}} - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{p}$$

ist. Im Falle $p = 8\varkappa + 7$ ist sogar für jede ganze Zahl n ohne Unterschied die Anzahl ihrer Zerfällungen in verschiedene quadratische Reste (mod. p) die gleiche, nämlich

$$(n) = \frac{2^{\frac{p-1}{2}} - 1}{p}.$$

Nunmehr sei zweitens $p = 4k + 1$. In diesem Falle lassen die Formeln (91), (91a) keine weitere Vereinfachung zu. Was die Formeln (85), (85a) anbelangt, so unterscheiden wir die beiden Fälle $p = 8\varkappa + 1$ und $p = 8\varkappa + 5$.

Im ersteren von beiden ist

$$(99) \qquad \prod_{\varrho}(1 + r^{\varrho}) \cdot \prod_{\varrho}(1 - r^{\varrho}) = \prod_{\varrho}(1 - r^{2\varrho})$$

identisch mit $\prod_{\varrho}(1 - r^{\varrho})$, mithin, da dies Produkt von Null verschieden,

$$\prod_{\varrho}(1 + r^{\varrho}) = 1,$$

demnach wegen (80)

$$y = 2, \; z = 0,$$

woraus sich nach den Formeln (85), (85a)

$$(100) \qquad (0) = (\varrho) = (\nu) = \frac{2^{\frac{p-1}{2}} - 1}{p}$$

ergibt. Im Falle $p = 8\varkappa + 1$ ist daher wieder wie im Falle $p = 8\varkappa + 7$ für jede ganze Zahl n ohne Unterschied

$$(n) = \frac{2^{\frac{p-1}{2}} - 1}{p}.$$

Falls dagegen zweitens $p = 8\varkappa + 5$ ist, nimmt die Gleichung (99) die Gestalt an

$$(101) \qquad \prod_{\varrho}(1 + r^{\varrho}) \cdot \prod_{\varrho}(1 - r^{\varrho}) = \prod_{\nu}(1 - r^{\nu}).$$

Da nun, wenn die Reste ϱ durch die Nichtreste ν, d. h. die Wurzeln r^{ϱ} der Periode η_0 durch die Wurzeln r^{ν} der Periode η_1 ersetzt werden, in der Grundformel (79) aus der Kreisteilung die Quadratwurzel zur Rechten ihr Vorzeichen wechselt, so ergibt sich auch aus (86)

$$\prod_{\nu}(1 - r^{\nu}) = \frac{1}{2}(y' - z' \cdot P)$$

und folglich liefert (101) zwischen den Zahlen y, z, y', z' die Beziehung

$$(102) \qquad \frac{1}{2}(y + Pz)(y' + Pz') = y' - Pz',$$

während aus

$$\prod_{\varrho}(1 - r^{\varrho}) \cdot \prod_{\nu}(1 - r^{\nu}) = \prod_{h=1}^{p-1}(1 - r^{h}) = p$$

die Gleichung

$$\frac{1}{4}(y'^2 - P^2 z'^2) = \frac{1}{4}(y'^2 - pz'^2) = p$$

hervorgeht. Aus (102) aber erschließt man die Gleichungen

$$yy' + pzz' = 2y', \quad yz' + y'z = -2z'$$

und durch Elimination von y aus diesen weiter die Beziehung

$$z = \frac{-z'y'}{p}. \tag{103}$$

Nach einer Bemerkung von *L. Dirichlet* (Journ. f. r. u. a. Math. 18, S. 270, s. auch des Verf. Lehre v. d. Kreisteilung S. 298, wo $-z$ an Stelle von z zu lesen ist) ist y' positiv, dagegen z' negativ; der vorigen Gleichung zufolge hat daher z einen positiven Wert. Aus den Formeln (85) erschließt man also, daß in diesem Falle

$$(\varrho) > (\nu)$$

ist, ein Umstand, durch welchen der Fall $p = 8\varkappa + 5$ sich von den drei übrigen Fällen $p = 8\varkappa + 1, 3, 7$, in welchen stets

$$(\varrho) = (\nu)$$

war, wesentlich unterscheidet.

12. Wir behandeln endlich an dritter Stelle, indem wir auch jetzt den Modulus als eine ungerade Primzahl p voraussetzen, das Elementensystem $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$ mittels der in Nr. 1 angegebenen Methode von *Stern*.

Sei also wieder x eine beliebige p^{te} Einheitswurzel und, während immer $p' = \frac{p-1}{2}$ gesetzt wird,

$$\prod_{h=1}^{p'}(1 + x^h) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{p-1}x^{p-1}, \tag{104}$$

so daß, wenn man $\alpha_p + 1 = \alpha_0$ schreibt, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p$ die Anzahl der Zerfällungen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ und p oder Null in verschiedene Summanden der Reihe $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$ (mod. p) bedeuten. Ebenso findet sich

$$\prod_{h=1}^{p'}(1 - x^h) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_{p-1}x^{p-1}, \tag{105}$$

worin $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1}$ und β_p, wenn $\beta_0 = 1 + \beta_p$ gesetzt wird, den Unterschied der Anzahlen bedeuten, wie oft die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ und p oder Null in eine gerade und in eine ungerade Anzahl verschiedener Summanden jener Reihe (mod. p) zerfällt werden können.

Zur Bestimmung der Zahlen α_i setzen wir in (104) einmal $x = 1$, das anderemal $x = r$ und gewinnen so die Beziehungen

$$2^{p'} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1} \tag{106}$$

$$\prod_{h=1}^{p'} (1 + r^h) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \cdots + \alpha_{p-1} r^{p-1}. \tag{107}$$

Nun ist

$$\prod_{h=1}^{p'} (1 + r^h) = r^{\Sigma h} \cdot \prod_{h=1}^{p'} (1 + r^{-h}) = r^{\Sigma h} \cdot \prod_{h=p'+1}^{p-1} (1 + r^h)$$

und, da

$$\sum h = 1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{p-1}{2} = \frac{p^2-1}{8} \tag{108}$$

und nach Nr. 1 (4a)

$$\prod_{h=1}^{p-1} (1 + r^h) = 1$$

ist, so geht die obige Gleichung in die folgende über:

$$\prod_{h=1}^{p'} (1 + r^h)^2 = r^{\frac{p^2-1}{8}};$$

demnach ist

$$\prod_{h=1}^{p'} (1 + r^h) = \pm\, r^{\frac{p^2-1}{16}}.$$

Um hier über das unbestimmte Vorzeichen zu entscheiden, schreibe man

$$\prod_{h=1}^{p'} (1 + r^h) = r^{\frac{1}{2}\Sigma h} \cdot \prod_{h=1}^{p'} \left(r^{\frac{h}{2}} + r^{-\frac{h}{2}} \right) = 2^{p'} \cdot r^{\frac{p^2-1}{16}} \cdot \prod_{h=1}^{p'} \cos \frac{h\pi}{p},$$

woraus zu ersehen ist, daß $r^{\frac{p^2-1}{16}}$ mit positivem Faktor multipliziert, also

$$\prod_{h=1}^{p'} (1 + r^h) = +\, r^{\frac{p^2-1}{16}} \tag{109}$$

ist. Wenn nun $\frac{p^2-1}{8}$ gerade, d. h. $\left(\frac{2}{p}\right) = +1$ ist, so nenne man γ den kleinsten positiven Rest der ganzen Zahl $\frac{p^2-1}{16}$, so daß

$$\frac{p^2-1}{16} \equiv \gamma \pmod{p}; \tag{110}$$

ist dagegen $\frac{p^2-1}{8}$ ungerade, d. h. $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, so bezeichne man mit γ den kleinsten positiven Rest der ganzen Zahl $\frac{p^2-1}{16} + \frac{p}{2}$, so daß

$$\frac{p^2-1}{16} + \frac{p}{2} \equiv \gamma \pmod{p}. \tag{110a}$$

Im ersteren Falle ist $r^{\frac{p^2-1}{16}} = r^\gamma$, während sich im zweiten Falle $r^{\frac{p^2-1}{16}} = -r^\gamma$ ergibt. Daher kann (109) in der Form

$$\prod_{h=1}^{p'}(1 + r^h) = \left(\frac{2}{p}\right) \cdot r^\gamma$$

geschrieben werden, und daraus folgt wegen (107) die Beziehung

$$\left(\frac{2}{p}\right) \cdot r^\gamma = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \cdots + \alpha_{p-1} r^{p-1},$$

welche wegen der Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichung die Gleichheit aller Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von r, d. h. die Gleichungen

$$(111) \qquad \alpha_0 = \alpha_1 \cdots = \alpha_{\gamma-1} = \alpha_\gamma - \left(\frac{2}{p}\right) = \alpha_{\gamma+1} \cdots = \alpha_{p-1}$$

erfordert. Verbindet man diese mit der Gleichung (106), so erhält man sogleich die folgenden Wertbestimmungen:

$$(112) \qquad \begin{cases} \alpha_\gamma = \dfrac{2^{p'} - \left(\frac{2}{p}\right)}{p} + \left(\frac{2}{p}\right) \\[2ex] \alpha_p = \dfrac{2^{p'} - \left(\frac{2}{p}\right)}{p} - 1 \\[2ex] \alpha_i = \dfrac{2^{p'} - \left(\frac{2}{p}\right)}{p} \quad (i \text{ von } p, \gamma \text{ verschieden}) \end{cases}$$

für die gesuchten Anzahlen.

Verfährt man, um die Zahlen β_i zu bestimmen, genau wie zuvor jetzt mit der Gleichung (105), so gelangt man zunächst zu den Beziehungen

$$(113) \qquad 0 = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{p-1}$$

$$(114) \qquad \prod_{h=1}^{p'}(1 - r^h) = \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \cdots + \beta_{p-1} r^{p-1}.$$

Da nun

$$\prod_{h=1}^{p'}(1 - r^h) = r^{\Sigma h} \cdot (-1)^{p'} \cdot \prod_{h=1}^{p'}(1 - r^{-h}) = r^{\Sigma h} \cdot (-1)^{p'} \cdot \prod_{h=p'+1}^{p-1}(1 - r^h)$$

geschrieben werden kann, findet sich wegen (4) und (108)

$$\prod_{h=1}^{p'}(1 - r^h)^2 = r^{\frac{p^2-1}{8}} \cdot (-1)^{p'} p$$

und folglich

$$\prod_{h=1}^{p'}(1 - r^h) = \pm r^{\frac{p^2-1}{16}} \cdot \sqrt{(-1)^{p'} \cdot p}.$$

Da ferner

$$\prod_{h=1}^{p'}(1-r^h) = 2^{p'}\cdot(-i)^{p'}\cdot r^{\frac{p^2-1}{16}}\prod_{h=1}^{p'}\sin\frac{h\pi}{p}$$

gesetzt werden kann, bestimmt sich leicht das Vorzeichen der rechten Seite als dasjenige von $(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$, so daß genau

$$\prod_{h=1}^{p'}(1-r^h) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\cdot r^{\frac{p^2-1}{16}}\cdot\sqrt{(-1)^{p'}\cdot p}$$

zu setzen ist, oder dem Obigen zufolge noch einfacher

$$\prod_{h=1}^{p'}(1-r^h) = r^\gamma\cdot\sqrt{(-1)^{p'}\cdot p}.$$

Ersetzt man hier endlich die Quadratwurzel zur Rechten durch den ihr bekanntlich gleichen Ausdruck

$$\sum_\varrho r^\varrho - \sum_\nu r^\nu,$$

worin ϱ, ν, wie früher, die quadratischen Reste, resp. Nichtreste (mod. p) bedeuten, welche positiv und kleiner als p sind, so geht aus (114) die Gleichung

$$\text{(114a)}\qquad r^\gamma\left(\sum_\varrho r^\varrho - \sum_\nu r^\nu\right) = \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \cdots + \beta_{p-1}r^{p-1}$$

hervor, welche wieder erfordert, daß die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von r sämtlich gleichen Wert haben. Da nun die Zahlen $\varrho+\gamma$, $\nu+\gamma$ sämtliche Reste (mod. p) mit Ausnahme des Restes γ darstellen, finden sich so die folgenden Gleichungen:

$$\beta_0 - \varepsilon_0 = \beta_1 - \varepsilon_1 \cdots = \beta_\gamma = \beta_{\gamma+1} - \varepsilon_{\gamma+1} \cdots = \beta_{p-1} - \varepsilon_{p-1},$$

in welchen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ lauter Einheiten, zur Hälfte positiv, zur anderen Hälfte negativ, bedeuten. Ihre Verbindung mit (113) liefert sogleich die Werte:

$$\text{(115)}\qquad \left|\begin{array}{l}\beta_\gamma = 0\\ \beta_i = \varepsilon_i \quad (i \gtrless \gamma).\end{array}\right.$$

Für β_0 ergibt sich der Wert $+1$. Die Einheit ε_0 hat nämlich das Vorzeichen desjenigen Gliedes zur Linken von (114a), für welches $\gamma + n \equiv 0$ (mod. p), d. h. $n \equiv -\gamma$ (mod. p) ist; nun ist stets $2\gamma \equiv \frac{p^2-1}{8}$ (mod. p), also $4\gamma \equiv \frac{p^2-1}{4}$ und

$$\frac{p^2-1}{4} = \frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2} = \frac{p-1}{2}\left(p - \frac{p-1}{2}\right) \equiv -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

folglich

$$-4\gamma \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \pmod{p},$$

d. h. $\left(\frac{-\gamma}{p}\right) = 1$. Demnach ist auch $\left(\frac{n}{p}\right) = 1$, d. h. n eine der Zahlen ϱ und daher $\varepsilon_0 = +1$. Aus $\beta_0 = 1$ folgt endlich $\beta_p = 0$. Diesen Werten der Zahlen β_i zufolge gestattet die Zahl γ ebensoviel gerade wie ungerade Zerfällungen in verschiedene Summanden der Reihe 1, 2, 3, ..., $\frac{p-1}{2}$ (mod. p), nämlich nach (112)

$$\frac{2^{p'} - \left(\frac{2}{p}\right)}{2p} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{p}\right)$$

Zerfällungen von jeder der beiden Arten. Für jede andere der Zahlen 1, 2, 3, ..., $p-1$ ist die Anzahl der Zerfällungen der einen Art um eine Einheit größer als die der anderen Art; welche Anzahl jedesmal die überwiegende ist, dies aufzuweisen übergehen wir hier der Kürze halber und verweisen den Leser in bezug hierauf wie auf manche andere Einzelheiten der Untersuchung auf die *Stern*sche Arbeit selbst.

13. Wir müssen uns darauf beschränken, noch von der eigenartigen Verwendung, welche *Stern* in seiner Arbeit von den voraufgehenden Resultaten gemacht hat, das Wesentliche hier mitzuteilen.

Bezeichnen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\frac{p-1}{2}}$ positive oder negative Einheiten, so wollen wir jeden Ausdruck

$$\varepsilon_1\cdot 1 + \varepsilon_2\cdot 2 + \cdots + \varepsilon_{\frac{p-1}{2}}\cdot\frac{p-1}{2}, \tag{116}$$

d. i. jedes aus den Zahlen 1, 2, 3, ..., $\frac{p-1}{2}$ gebildete Aggregat kurz eine Form nennen und zwar eine gerade oder ungerade Form, je nachdem die Anzahl der negativen Glieder oder Einheiten gerade oder ungerade ist. Solcher Formen gibt es im ganzen

$$1 + \frac{p'}{1} + \frac{p'(p'-1)}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{p'}{1} + 1 = 2^{p'}$$

und darunter ebensoviel gerade als ungerade, nämlich

$$1 + \frac{p'(p'-1)}{1\cdot 2} + \frac{p'(p'-1)(p'-2)(p'-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots = 2^{p'-1}$$

gerade und

$$\frac{p'}{1} + \frac{p'(p'-1)(p'-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = 2^{p'-1}$$

ungerade Formen.

Als Hauptformen bezeichnen wir diejenigen Ausdrücke (116), welche (mod. p) kongruent mit $\frac{p^2-1}{8}$ sind; zu ihnen gehört, da

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{p-1}{2} = \frac{p^2-1}{8} \tag{117}$$

ist, die Form mit lauter positiven Gliedern, die, weil jede andere

Hauptform mindestens ein negatives Glied enthalten muß, von diesen, welche negative Hauptformen heißen sollen, als positive Hauptform unterschieden werden soll. Die Anzahl der negativen Hauptformen ist ebenso groß, wie die Anzahl der aus verschiedenen Summanden der Reihe $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$ gebildeten Summen, welche der Null kongruent sind (mod p). Denn, ist

$$e_1 + e_2 + \cdots \equiv 0 \pmod{p}$$

eine solche Summe, so entsteht, wenn sie zwiefach von der Gleichung (117) subtrahiert wird, links eine Form, in welcher die Zahlen e_1, $e_2, \ldots$ negativ, alle übrigen positiv genommen sind, und deren Wert kongruent $\frac{p^2-1}{8}$ (mod p) ist, es entsteht also eine negative Hauptform und zwar eine gerade oder eine ungerade, je nachdem jene Summe aus einer geraden oder ungeraden Anzahl verschiedener der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$ besteht. Da es α_p solche Summen, darunter aber wegen $\beta_p = 0$ ebensoviel gerade wie ungerade gibt, so entstehen also

$$\text{(118)} \qquad \frac{1}{2}\alpha_p = \frac{2^{p'} - \left(\frac{2}{p}\right)}{2p} - \frac{1}{2}$$

gerade und ebensoviel ungerade negative Hauptformen. Auf die genannte Weise entsteht aber auch jede negative Hauptform; denn, sind $e_1, e_2, e_3, \ldots$ die negativen Glieder einer solchen, so wird der Unterschied zwischen der positiven und dieser negativen Hauptform einerseits gleich

$$2(e_1 + e_2 + e_3 + \ldots),$$

andererseits kongruent Null (mod. p) sein, woraus auch die Summe

$$e_1 + e_2 + e_3 + \cdots \equiv 0 \pmod{p},$$

d. i. als eine der gedachten, der Null kongruenten Summen aus verschiedenen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$ hervorgeht Setzt man also kurz

$$\text{(119)} \qquad \frac{1}{2}\alpha_p = \lambda,$$

so beträgt, die positive Hauptform mit eingerechnet, die Anzahl aller Hauptformen $1 + 2\lambda$, unter welchen $1 + \lambda$ gerade und λ ungerade Formen sind.

Wir suchen ferner die Anzahl der Formen, welche kongruent Null sind (mod p). Sie beträgt

$$\alpha_\gamma = \frac{2^{p'} - \left(\frac{2}{p}\right)}{p} + \left(\frac{2}{p}\right).$$

Ist nämlich

$$e_1 + e_2 + e_3 + \cdots$$

eine Summe aus verschiedenen Zahlen der Reihe 1, 2, 3, . . ., $\frac{p-1}{2}$, welche kongruent γ ist (mod. p), so erhält man durch zwiefache Subtraktion derselben von der positiven Hauptform, da 2γ stets kongruent $\frac{p^2-1}{8}$ ist, eine Form, welche der Null kongruent ist (mod. p), und umgekehrt entsteht auf solche Weise auch wieder jede der gedachten Formen aus der positiven Hauptform. Da zudem die entstehenden Formen offenbar gerade oder ungerade sind, je nachdem jene Summen aus einer geraden oder ungeraden Anzahl Summanden bestehen, und es wegen $\beta_\gamma = 0$ von jeder dieser Arten gleich viele gibt, so gibt es auch gleich viel gerade wie ungerade Formen, welche der Null kongruent sind, nämlich, wenn

$$\frac{1}{2}\alpha_\gamma = \mu \tag{120}$$

gesetzt wird, μ gerade und μ ungerade solcher Formen.

14. Um nun auch die Anzahl der Formen zu bestimmen, welche einen der übrigen Reste (mod. p) lassen, bedürfen wir einer Vorbetrachtung.

Sei

$$\varepsilon_1 \cdot 1 + \varepsilon_2 \cdot 2 + \cdots + \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} \cdot \frac{p-1}{2} \equiv s \pmod{p} \tag{121}$$

eine Form, welche den Rest s läßt, und k irgendeine durch p nicht teilbare Zahl. Multipliziert man mit dieser Zahl k die vorstehende Kongruenz und setzt, wie im *Gauß*ischen Lemma der Theorie der quadratischen Reste

$$1 \cdot k \equiv \eta_1 \cdot k_1, \quad 2k \equiv \eta_2 \cdot k_2, \quad \ldots, \quad \frac{p-1}{2} k \equiv \eta_{\frac{p-1}{2}} \cdot k_{\frac{p-1}{2}},$$

wo die rechten Seiten die absolut kleinsten Reste der bezüglichen Produkte, also $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\frac{p-1}{2}}$ positive oder negative Einheiten und $k_1, k_2, \ldots, k_{\frac{p-1}{2}}$ verschiedene Zahlen der Reihe 1, 2, 3, . . ., $\frac{p-1}{2}$, zusammen also diese gesamte Reihe bedeuten, so ist bekanntlich jenem Lemma zufolge

$$\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{k}{p}\right),$$

die Kongruenz (121) aber erhält die Gestalt

$$\varepsilon_1 \eta_1 \cdot k_1 + \varepsilon_2 \eta_2 \cdot k_2 + \cdots + \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} \eta_{\frac{p-1}{2}} \cdot k_{\frac{p-1}{2}} \equiv t \pmod{p},$$

wo $t \equiv sk$ gedacht ist. Aus der zuerst betrachteten Form ist somit eine neue entstanden, und da

$$\prod_{h=1}^{p'} \varepsilon_h \eta_h = \left(\frac{k}{p}\right) \cdot \prod_{h=1}^{p'} \varepsilon_h$$

ist, so wird das Produkt der Einheiten für beide Formen gleichen oder entgegengesetzten Wert haben, d. h. aber: die beiden Formen werden gleicher oder verschiedener Art, entweder zugleich gerade resp. ungerade, oder die eine gerade, die andere ungerade sein, je nachdem k quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist. Ist s eine nicht durch p teilbare Zahl, so wird bei diesem Vorgange der Rest der Form, der sich in $t \equiv sk$ verwandelt, seinen quadratischen Charakter je nach diesen beiden Fällen behalten oder wechseln.

Nunmehr sei $s = \frac{p^2-1}{8}$, d. h. die Form (121) eine Hauptform, und t irgendeine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Da $\frac{p^2-1}{8}$ nicht durch p teilbar ist, kann ein Wert k so bestimmt werden, daß $t \equiv \frac{p^2-1}{8} \cdot k$ (mod. p). Demnach entsteht aus jeder der $1 + 2\lambda$ Hauptformen eine Form, welche kongruent t ist (mod. p), durch Multiplikation mit k. Die so entstehenden $1 + 2\lambda$ Formen sind auch alle voneinander verschieden, denn entstünde aus zwei verschiedenen Hauptformen f und f' dieselbe Form, so würden offenbar durch Multiplikation dieser letzteren mit dem Sozius k' von k wieder die Hauptformen f und f' hervorgehen, diese also nicht verschieden sein können. Endlich erschöpfen jene $1 + 2\lambda$ Formen aber auch alle Formen, welche kongruent t sein können. Denn aus einer Form, welche den Rest t läßt, muß durch Multiplikation mit k' eine solche entstehen, die den Rest $k't \equiv \frac{p^2-1}{8}$ (mod. p) läßt, d. h. eine Hauptform ist, aus der nun umgekehrt jene durch Multiplikation mit k hervorgeht. Es gibt demnach genau $1 + 2\lambda$ Formen mit dem Reste t.

Welche dieser Formen nun gerade, welche ungerade sind, hängt einerseits davon ab, welcher Art die Hauptform ist, aus der sie entstehen, andererseits von dem Werte von $\left(\frac{k}{p}\right)$, welcher wegen der Kongruenzen

$$t \equiv \frac{p^2-1}{8} \cdot k \equiv 2\gamma k \pmod{p}$$

mit demjenigen von $\left(\frac{2\gamma t}{p}\right)$ oder, da $\left(\frac{-\gamma}{p}\right) = 1$ gefunden worden, mit dem Werte von $\left(\frac{-2t}{p}\right)$ gleich ist. Ist $\left(\frac{-2t}{p}\right) = +1$, so werden die $1 + \lambda$ geraden Hauptformen ebensoviel gerade, die λ ungeraden Hauptformen ebensoviel ungerade Formen mit dem Reste t liefern; ist $\left(\frac{-2t}{p}\right) = -1$, so verhält es sich umgekehrt: jene liefern $1 + \lambda$

ungerade, diese λ gerade Formen mit dem Reste t. Oder man erhält folgenden Satz:

Ist $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$, so lassen jeden quadratischen Rest genau $1 + \lambda$ gerade und λ ungerade Formen, dagegen jeden quadratischen Nichtrest genau λ gerade und $1 + \lambda$ ungerade Formen. Im Falle $\left(\frac{-2}{p}\right) = -1$ gilt umgekehrt für jeden quadratischen Rest das letztere, für jeden quadratischen Nichtrest das erstere.

Oder man darf auch sagen: Die geraden Formen geben den Rest t

$$\frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{-2t}{p}\right)\right) + \lambda \text{ mal},$$

die ungeraden Formen

$$\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{-2t}{p}\right)\right) + \lambda \text{ mal}.$$

Man kann endlich noch bemerken, daß aus jeder Form (116) durch Multiplikation mit 2 eine aus den Zahlen $2, 4, 6, \ldots, p-1$ ebenso gebildete Form gleicher Art, die nämlich zugleich mit jener eine gerade oder eine ungerade ist, hervorgeht, daß aber der Rest, welchen diese letztere läßt, mit dem Reste der ersteren gleichen oder entgegengesetzten quadratischen Charakter hat, je nachdem $\left(\frac{2}{p}\right) = +1$ oder -1 ist. Mit Beachtung hiervon schließt man aus dem letzten Satze den anderen Satz:

Ist $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, so lassen jeden quadratischen Rest genau $1 + \lambda$ gerade und λ ungerade Formen, dagegen jeden quadratischen Nichtrest λ gerade und $1 + \lambda$ ungerade Formen der neuen Art. Für $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ verhält es sich umgekehrt.

Nimmt man aber eine der neuen Formen mit entgegengesetztem Vorzeichen und ersetzt dann die Zahlen $-2, -4, \ldots, -(p-1)$ durch die ihnen (mod. p) kongruenten Zahlen $p-2, p-4, \ldots, 3, 1$, so entsteht eine aus den letzteren Zahlen ebenso gebildete und zugleich mit jener Form gerade und ungerade Form, während der Rest, den jene läßt, denselben oder den entgegengesetzten quadratischen Charakter hat wie der Rest der neuen Form, je nachdem $\left(\frac{-1}{p}\right) = +1$ oder -1 ist. Infolge davon fließt aus dem zuletzt ausgesprochenen Satze noch der folgende, der von allen bisher erhaltenen der einfachste ist.

Die geraden aus den Zahlen $1, 3, 5, \ldots, p-2$ gebildeten Formen lassen jeden quadratischen Rest $1 + \lambda$ mal, die ungeraden Formen λ mal, dagegen lassen die geraden Formen

jeden quadratischen Nichtrest λ mal, die ungeraden Formen $1+\lambda$ mal. Zudem gibt es μ gerade und ebensoviel ungerade Formen, welche den Rest Null lassen.

Mit diesem eleganten schon *Eisenstein* bekannten *Stern*schen Satze beschließen wir die Behandlung der relativen Zerfällungen einer Zahl (mod. m), und wenden uns nun wieder zu Untersuchungen, welche die absoluten Zerfällungen betreffen.

Sechstes Kapitel.

Rekursionsformeln.

1. In diesem Abschnitte werden wir von einer ganzen Kategorie von Rekursionsformeln handeln, deren analytische Quelle die gleiche ist, wie sie *Euler* für die Zerfällung der Zahlen benutzt hat: die Entwicklung unendlicher Produkte in Potenzreihen. Sie beziehen sich auf die mannigfaltigsten zahlentheoretischen Funktionen. Wir heben darunter hervor die Anzahl

$$C_s = N\left(s = \sum a_i\right) \tag{1}$$

der Zerfällungen der Zahl s in lauter verschiedene positive Summanden, welche nach Kap. 3, Nr. 4 der Anzahl ihrer Zerfällungen in gleiche oder verschiedene aber ungerade Summanden:

$$C_s = N\left(s = \sum k_i u_i\right) \tag{1a}$$

gleich ist; ferner die Anzahl

$$C_s^{(u)} = N\left(s = \sum u_i\right) \tag{2}$$

der Zerfällungen der Zahl s in verschiedene ungerade Summanden, sowie die Anzahl

$$\Gamma_s = N\left(s = \sum k_i a_i\right) \tag{3}$$

ihrer Zerfällungen in positive Summanden überhaupt. Da aus der Gleichung $s = \sum k_i u_i$ sich

$$s \equiv \sum k_i \pmod{2}$$

ergibt, folgt aus (1a) offenbar die Beziehung

$$N\left(s = \sum k_i u_i;\ (-1)^{\Sigma k_i}\right) = (-1)^s \cdot C_s; \tag{4}$$

desgleichen, wenn man mit λ die Anzahl der Elemente in der Gleichung $s = \sum u_i$ bezeichnet, so daß $s \equiv \lambda \pmod{2}$ wird, aus (2) die Beziehung

$$N\left(s = \sum_1^{\lambda} u_i;\ (-1)^{\lambda}\right) = (-1)^s \cdot C_s^{(u)}. \tag{5}$$

Wir bezeichnen ferner nach dem Vorgange von *Liouville* mit $\zeta(s)$ die Anzahl der Teiler von s, mit

$$\zeta_1(s) = \sum_{s=d\delta} d \tag{6}$$

die Summe dieser Teiler, und allgemeiner mit

$$\zeta_m(s) = \sum_{s=d\delta} d^m \tag{7}$$

die Summe der m^{ten} Potenzen aller Teiler von s, so daß $\zeta_0(s) = \zeta(s)$.

Mit

$$\zeta_1^u(s) = \sum_{s=uv} u \tag{8}$$

$$\zeta_1^g(s) = \sum_{s=g\gamma} g \tag{9}$$

sei die Summe der ungeraden resp. der geraden Teiler von s bezeichnet, so daß $\zeta_1^u(s) = \zeta_1(s)$ ist, sooft s eine ungerade Zahl, und

$$\delta_1(s) = \zeta_1^u(s) - \zeta_1^g(s) \tag{10}$$

bedeute den Unterschied dieser beiden Summen; endlich sei $\varrho\,(s)$ der Unterschied zwischen der Anzahl der Teiler von s, welche die Form $4k+1$ haben, und der Anzahl derjenigen von der Form $4k+3$, so daß

$$\varrho(s) = \sum_{s=uv} (-1)^{\frac{u-1}{2}} \tag{11}$$

gesetzt werden kann, wenn die Summe auf sämtliche ungeraden Teiler von s ausgedehnt wird; demzufolge wird

$$\varrho(s) = \sum_{s=d\delta} (-1)^{\frac{d-1}{2}}, \tag{11a}$$

falls s eine ungerade Zahl, und die Summe über sämtliche Teiler dieser Zahl erstreckt ist.

2. Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet der *Legendre-Euler*sche Pentagonalzahlensatz oder die Gleichung (167) des 3ten Kapitels:

$$\prod_{h=1}^{\infty}(1-x^h) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}. \tag{12}$$

Verbindet man sie mit der Formel

$$\prod_{h=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^h} = \sum_{m=0}^{\infty}\Gamma_m \cdot x^m$$

durch Multiplikation, so erhält man zuvörderst die Beziehung

$$1 = \sum_{n,m} (-1)^n \Gamma_m \cdot x^{\frac{3n^2 \pm n}{2} + m},$$

die, wenn alle Glieder zusammengefaßt werden, welche dieselbe Potenz x^s ergeben, die Gestalt

$$1 = \sum_{s=0}^{\infty} \left(x^s \cdot \sum_n (-1)^n \cdot \Gamma_{s - \frac{3n^2 \pm n}{2}} \right)$$

annimmt, wo die auf n bezügliche Summation so weit fortzusetzen ist, als $s - \frac{3n^2 \pm n}{2} \gtreqless 0$ bleibt. Hieraus folgt aber durch Vergleichung gleicher Potenzen von x auf beiden Seiten für jeden positiven Wert von s die von *Euler* (Novi Comment. Petrop. 3, S. 155) gegebene und von *Zeller* (Acta Math. 4, S. 415) wiederholte Rekursionsformel:

$$(13) \qquad \sum_n (-1)^n \cdot \Gamma_{s - \frac{3n^2 \pm n}{2}} = 0,$$

der man auch folgende Gestalt geben kann:

$$(14) \qquad \Gamma_s = \sum_n (-1)^n \cdot \left[\Gamma_{s - \frac{3n^2 + n}{2}} + \Gamma_{s - \frac{3n^2 - n}{2}} \right],$$

worin die Summation über alle positiven ganzen Zahlen n auszudehnen ist, für welche die Indices der Funktion Γ nicht negativ werden; der Index Null tritt offenbar dann und nur dann auf, wenn s eine Pentagonalzahl, $s = \frac{3m^2 \pm m}{2}$ ist, und dann ist $\Gamma_0 = 1$ zu setzen.

Dieser Formel hat *Stern* (Journ. f. Math. 21, S. 177) zwei andere an die Seite gesetzt, welche sich auf die Funktion C_s beziehen. Die letztere ist der Entwicklungskoeffizient des Produkts

$$(15) \qquad \prod_{h=1}^{\infty} (1 + x^h) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n.$$

Schreibt man aber

$$\prod_{h=1}^{\infty} (1 + x^h) = \frac{\prod_{h=1}^{\infty} (1 - x^{2h})}{\prod_{h=1}^{\infty} (1 - x^h)}$$

und benutzt die Beziehung (12), so erhält man aus (15) die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot x^{3m^2 \pm m}}{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot x^{\frac{3m^2 \pm m}{2}}},$$

aus welcher die neue:

$$\sum_{n,m}(-1)^m\cdot C_n\cdot x^{n+\frac{3m^2\pm m}{2}}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\cdot x^{3m^2\pm m}$$

oder, wenn links alle Glieder zusammengefaßt werden, welche dieselbe Potenz x^s ergeben, diese andere:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left(x^s\cdot\sum_m(-1)^m C_{s-\frac{3m^2\pm m}{2}}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\cdot x^{3m^2\pm m}$$

hervorgeht. Vergleicht man hier die Koeffizienten gleicher Potenzen von x auf beiden Seiten, so ergibt sich der Satz:

Die Summe

$$\sum_n(-1)^n\cdot C_{s-\frac{3n^2\pm n}{2}}, \tag{16}$$

ausgedehnt über alle Zahlen $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, für welche $s-\frac{3n^2\pm n}{2}$ nicht negativ wird, ist gleich $(-1)^m$ oder Null, je nachdem s das Doppelte einer Pentagonalzahl, $s=3m^2\pm m$ ist oder nicht ist. Unter C_0 ist 1 zu verstehen.

Seinen zweiten Satz erhielt *Stern* durch Verbindung zweier anderen analytischen Formeln, deren eine die *Euler*sche Gleichung (10) des dritten Kapitels:

$$\prod_{h=1}^{\infty}(1+x^h)=\prod_u\frac{1}{1-x^u}\quad (u>0 \text{ und ungerade}),$$

deren zweite die von *Gauss* (summatio quarundam serierum singularium, art. 8) gegebene Beziehung

$$\prod_{h=1}^{\infty}\frac{1-x^{2h}}{1-x^{2h-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{17}$$

ist. Mit Rücksicht auf (12) und (15) nimmt diese die Gestalt an:

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n^2\pm n}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

wo die linke Seite auch in der Form

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left(x^s\cdot\sum_n(-1)^n C_{s-3n^2\mp n}\right)$$

geschrieben werden kann, und man findet daraus den Satz:

Die Summe

$$\sum_n(-1)^n C_{s-3n^2\mp n},$$

ausgedehnt über alle $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, für welche $s-3n^2\mp n$ nicht negativ wird, ist 1 oder 0, je nachdem s eine Trigonalzahl, $s=\frac{m\,m+1)}{2}$ ist oder nicht ist.

3. Eine besonders berühmt gewordene, auf die Summe der Teiler einer Zahl bezügliche Rekursionsformel erhielt *Euler*[1]) aus der Gleichung (12) durch einen Prozeß, welcher der logarithmischen Differenzierung gleichkommt. So entsteht daraus zunächst die Formel

$$\sum_{h=1}^{\infty} \log.(1-x^h) = \log. \sum (-1)^n \cdot x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}$$

und nun, da

$$x \cdot d \log.(1-x^h) = \frac{-h \cdot x^h}{1-x^h} = -\sum_{i=1}^{\infty} h x^{ih},$$

also

$$x \cdot \sum_h d \log.(1-x^h) = -\sum_{i,h} h x^{ih} = -\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_1(n) x^n$$

ist, die folgende Beziehung:

$$(18) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_1(n) x^n = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3n^2 \pm n}{2} x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}}.$$

Wenn aber hier der Nenner fortgeschafft und in der dann links auftretenden Doppelsumme alle Glieder mit derselben Potenz x^s zusammengefaßt werden, so findet sich

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(x^s \cdot \sum_n (-1)^n \zeta_1\left(s - \frac{3n^2 \pm n}{2}\right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3n^2 \pm n}{2} \cdot x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}$$

und demgemäß folgender Satz:

Die Summe

$$\sum_n (-1)^n \cdot \zeta_1\left(s - \frac{3n^2 \pm n}{2}\right),$$

ausgedehnt über alle $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, für welche $s - \frac{3n^2 \pm n}{2}$ positiv ist, ist $(-1)^{m-1} \cdot \frac{3m^2 \pm m}{2}$ oder Null, je nachdem s eine Pentagonalzahl, $s = \frac{3m^2 \pm m}{2}$ ist oder nicht ist. Man darf diesen Satz auch als Gleichung schreiben:

$$(19) \qquad \sum_n (-1)^n \cdot \zeta_1\left(s - \frac{3n^2 \pm n}{2}\right) = 0,$$

---

1) *Euler:* Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs. Observatio de summis divisorum. Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observati. Commentat. arithm. collectae I, S. 234, 146; II, S. 639.

wenn man die Summation über alle $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ausgedehnt denkt, für welche $s - \frac{3n^2 \pm n}{2}$ nicht negativ ist, und übereinkommt, unter dem Zeichen $\zeta_1(0)$, welches nur dann auftreten wird, falls s eine Pentagonalzahl, $s = \frac{3m^2 \pm m}{2}$ ist, diese Zahl s selbst zu verstehen.

Durch Multiplikation der Gleichung (18) mit der anderen:

$$\prod_{h=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^h} = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n \cdot x^n$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung (12) entsteht ferner die folgende:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_1(n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3n^2 \pm n}{2} x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}},$$

deren rechte Seite in der Form

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(x^s \cdot \sum_n (-1)^{n-1} \cdot \frac{3n^2 \pm n}{2} \cdot \Gamma_{s - \frac{3n^2 \pm n}{2}} \right)$$

geschrieben werden kann. Daher erschließt man aus ihr die Beziehung

$$\zeta_1(s) = \sum_n (-1)^{n-1} \cdot \frac{3n^2 \pm n}{2} \cdot \Gamma_{s - \frac{3n^2 \pm n}{2}}, \tag{20}$$

in welcher die Summation auf alle Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ zu erstrecken ist, für welche $s - \frac{3n^2 \pm n}{2}$ nicht negativ wird. Diese letzte Formel verdankt man *Zeller* (Acta Math. 4, S. 416).

Durch Vergleichung des aus (19) entnommenen Wertes von $\zeta_1(s)$ mit dem in (20) gegebenen findet sich noch die von *Stern* (Acta Math. 6, S. 327) erwähnte Gleichheit

$$\sum_n (-1)^{n-1} \cdot \frac{3n^2 \pm n}{2} \Gamma_{s - \frac{3n^2 \pm n}{2}} = \sum_n (-1)^{n-1} \cdot \zeta_1\left(s - \frac{3n^2 \pm n}{2}\right), \tag{20a}$$

in welcher beiderseits von $n = 1$ an zu summieren ist.

Ferner entsteht durch Multiplikation der Gleichung (18) mit dieser anderen:

$$\frac{\prod_1^{\infty} (1 - x^{2h})}{\prod_1^{\infty} (1 - x^h)} = \prod_1^{\infty} (1 + x^h) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n,$$

wenn dabei

$$\prod_{h=1}^{\infty}(1-x^{2h})=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n^2\pm n}$$

gesetzt wird, die folgende:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n^2\pm n}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_1(n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n^2\pm n}{2}x^{\frac{3n^2\pm n}{2}}.$$

Wenn hier die Multiplikationen ausgeführt und die Koeffizienten gleich hoher Potenzen rechts und links verglichen werden, so geht folgende mit (20a) analoge Gleichung hervor:

$$\text{(20b)}\quad \sum_n(-1)^n\cdot\zeta_1(s-3n^2\mp n)=\sum_n(-1)^{n-1}\cdot\frac{3n^2\pm n}{2}\,C_{s-\frac{3n^2\pm n}{2}},$$

wo links von $n=0$, rechts von $n=1$ an so weit fortzuschreiten ist, als das Argument von ζ_1 positiv, der Index von C nicht negativ wird (*Stern*, Acta Math. 6, S. 328).

4. Geht man, statt von der Gleichung (12), von der folgenden:

$$\prod_{h=1}^{\infty}(1-x^{2h})=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{3n^2\pm n}$$

aus, so entsteht durch deren logarithmische Differenzierung statt (18) diese Beziehung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_1^g(2n)\cdot x^{2n}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(3n^2\pm n)x^{3n^2\pm n}}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{3n^2\pm n}}$$

und aus ihr der neue Satz: Die Summe

$$\sum_n(-1)^n\cdot\zeta_1^g(s-3n^2\mp n),\quad (s\text{ gerade})$$

ausgedehnt über alle Zahlen $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, für welche $s-3n^2\mp n$ positiv bleibt, ist $(-1)^{m-1}\cdot(3m^2\pm m)$ oder Null, je nachdem s das Doppelte einer Pentagonalzahl, $s=3m^2\pm m$ ist oder nicht ist. Dieser Satz kann wieder in Gestalt einer Rekursionsformel gefaßt werden:

$$\text{(21)}\qquad \sum_n(-1)^n\cdot\zeta_1^g(s-3n^2\mp n)=0,$$

worin die Summation über alle $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, für welche $s-3n^2\mp n$ nicht negativ ist, zu erstrecken und unter dem Zeichen $\zeta_1^g(0)$, welches nur dann auftritt, wenn $s=3m^2\mp m$ ist, die Zahl s selbst zu verstehen ist. — Ähnlicherweise liefert die Formel

$$\prod_u \frac{1}{1-x^u} = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n^{(u)} \cdot x^n$$

die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_1^u(n) \cdot x^n = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \Gamma_n^{(u)} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n^{(u)} x^n}$$

und hieraus den Satz: Die Summe

$$\sum_n \zeta_1^u(n) \cdot \Gamma_{s-n}^{(u)},$$

ausgedehnt über alle $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, für welche $s - n$ nicht negativ wird, hat den Wert $s \cdot \Gamma_s^{(u)}$, in Zeichen:

$$(22) \qquad \sum_n \zeta_1^u(n) \cdot \Gamma_{s-n}^{(u)} = s \cdot \Gamma_s^{(u)}.$$

Die gleiche Behandlung der *Gauss*ischen Formel (17) aber führt zu der Gleichung

$$(23) \qquad -\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_1^g(2n) x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_1^u(n) x^n = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sum_{n=0}^{\infty} x^{\frac{n(n+1)}{2}}},$$

deren linke Seite einfacher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_1(n) x^n$$

geschrieben werden kann, und hieraus zu dem Satze: Die Summe

$$\sum_n \delta_1\left(s - \frac{n(n+1)}{2}\right),$$

ausgedehnt über alle $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, für welche $s - \frac{n(n+1)}{2}$ positiv bleibt, ist gleich $\frac{m(m+1)}{2}$ oder Null, je nachdem s eine Trigonalzahl, $s = \frac{m(m+1)}{2}$ ist oder nicht ist, mit anderen Worten: es besteht die Gleichung

$$(24) \qquad \sum_n \delta_1\left(s - \frac{n(n+1)}{2}\right) = 0,$$

wenn die Summation so weit fortgesetzt wird, als das Argument der Funktion δ_1 nicht negativ wird, und für das Zeichen $\delta_1(0)$, das nur dann auftritt, wenn s eine Trigonalzahl ist, der Wert $-s$ gesetzt wird.

Die letzten drei Sätze finden sich zuerst bei *Stern* (a. a. O.), der dritte derselben später auch in einer Arbeit von *J. W. L. Glaisher*

(Proceedings of London Math. Soc. 15, 1883/4, S. 104). Hier wird der Formel (24) noch eine beachtenswerte andere an die Seite gesetzt. Um sie zu erhalten, multipliziere man in der Gleichung (23) Zähler und Nenner der rechten Seite mit

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Das Produkt im Zähler ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(x^n \sum_{i} \frac{i(i+1)}{2}\Big) \tag{25}$$
$$0 < \frac{i(i+1)}{2} \overline{\overline{<}}\, n;$$

ist also $\frac{k(k+1)}{2}$ die größte, die Zahl n nicht überschreitende Trigonalzahl, in Zeichen:

$$\frac{k(k+1)}{2} \overline{\overline{<}}\, n < \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \tag{26}$$

so wird

$$\sum_{i} \frac{i(i+1)}{2} = 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6},$$
$$0 < \frac{i(i+1)}{2} \overline{\overline{<}}\, n$$

der Ausdruck (25) also gleich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k+1)(k+2)}{6} \cdot x^n.$$

Desgleichen ist das entwickelte Produkt im Nenner gleich

$$\sum_{n=0}^{\infty} (k+1) \cdot x^n,$$

wo ebenso wie zuvor die Zahl k durch die Ungleichheiten (26) bestimmt wird. Somit findet sich zunächst

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_1(n) x^n = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{k(k+1)(k+2)}{6} \cdot x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (k+1) \cdot x^n} \tag{27}$$

$$= \frac{x + x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 4x^5 + 10x^6 + 10x^7 + 10x^8 + 10x^9 + \cdots}{1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + \cdots};$$

durch Multiplikation mit dem Nenner entsteht aber zur Linken eine Doppelsumme; werden in ihr die Glieder zusammengefaßt, welche dieselbe Potenz x^s ergeben, und nun die Koeffizienten gleicher Potenzen von x auf beiden Seiten verglichen, so erhellt das folgende Ergebnis:

Der Ausdruck

$$(28)\quad \begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad \delta_1(s) \\ +2\cdot\delta_1(s-1)+2\cdot\delta_1(s-2) \\ +3\cdot\delta_1(s-3)+3\cdot\delta_1(s-4)+3\cdot\delta_1(s-5) \\ +4\cdot\delta_1(s-6)+4\cdot\delta_1(s-7)+4\cdot\delta_1(s-8)+4\cdot\delta_1(s-9) \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

fortgesetzt, solange die Argumente der Funktion δ_1 noch positiv bleiben, ist gleich

$$\frac{(m-1)m(m+1)}{6}=\frac{m^3-m}{6},$$

wenn m durch die Ungleichheiten

$$(28\text{a})\qquad \frac{(m-1)m}{2} \overline{\overline{<}}\, s < \frac{m(m+1)}{2}$$

bestimmt gedacht wird.

5. Wir suchen nun diese auf analytischem Wege hergeleiteten Sätze auch rein arithmetisch zu begründen, indem wir uns zu diesem Zwecke der schon mehrfach benutzten Abhandlung von *K. Th. Vahlen* (Journ. f. Math. 112, S. 1) anschließen.

Zunächst ist eine Reihe allgemeiner Formeln zu beweisen, die wir in der Folge als *Vahlen*sche Grundformeln bezeichnen werden.

Man denke sich irgendeine Zerfällung:

$$(29)\qquad s=\sum c_i a_i$$

der positiven ganzen Zahl s in positive Elemente, deren jedes mehrfach auftreten darf, und nenne ν die Anzahl der voneinander verschiedenen Elemente a_i. Indem man λ beliebige $\bar{a}_i$ der letzteren aus der Summe herauszieht, nimmt die Zerfällung die Form an

$$(30)\qquad s=\sum_1^{\lambda}\bar{a}_i+\sum k_i a_i,$$

worin die Elemente $\bar{a}_i$ nicht von den a_i verschieden zu sein brauchen und die Koeffizienten k_i derjenigen a_i, die zu jenen zählen, um 1 kleiner sind, als die entsprechenden c_i. Alle Zerfällungen (30), welche in solcher Weise aus der gedachten Zerfällung (29) hervorgehen können, mögen die Gruppe der letzteren heißen. Die Zerfällungen (30), welche einer anderen Gruppe angehören, sind ersichtlich von den vorigen verschieden, denn in einer anderen Zerfällung (29) von s sind entweder zwar die gleichen Elemente a_i, aber andere Koeffizienten c_i vorhanden, oder aber sie besteht aus anderen Elementen a_i. Andererseits gehört jede Zerfällung (30) einer bestimmten Gruppe an, d. h. sie entsteht aus einer bestimmten Zerfällung von der Form (29). Nun betrachte man alle möglichen Zerfällungen von s von der

Form (30) und zähle jede von ihnen positiv oder negativ, je nachdem λ gerade oder ungerade ist, d. i. so oft, als $(-1)^\lambda$ angibt; man bilde also in *Vahlen*scher Bezeichnung die Anzahldifferenz

$$N\left(s=\sum_1^\lambda \bar{a}_i+\sum k_i a_i;\ (-1)^\lambda\right).$$

Die erste der *Vahlen*schen Grundformeln lautet dann:

$$N\left(s=\sum_1^\lambda \bar{a}_i+\sum k_i a_i;\ (-1)^\lambda\right)=0. \tag{31}$$

Diese auf sämtliche Zerfällungen von der Form (30) bezügliche Formel wird bewiesen sein, wenn gezeigt wird, daß sie gilt, wenn sie nur auf alle Zerfällungen einer beliebigen Gruppe bezogen wird. Handelt es sich aber um die Gruppe einer bestimmten Zerfällung (29), so kann λ nur die Werte $0, 1, 2, \ldots, \nu$ erhalten, und jedem Werte λ dieser Reihe entsprechen $\binom{\nu}{\lambda}$ Zerfällungen der Gruppe, die mithin zur Anzahldifferenz (31) den Beitrag $\binom{\nu}{\lambda}\cdot(-1)^\lambda$ liefern. Zusammen geben also sämtliche Zerfällungen der Gruppe den Beitrag

$$1-\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}-\binom{\nu}{3}+\cdots+(-1)^\nu\cdot\binom{\nu}{\nu}=(1-1)^\nu=0,$$

was zu beweisen war. —

Die Betrachtungen, durch welche die Formel (31) gewonnen worden ist, bleiben offenbar durchweg in Kraft, wenn die Elemente a_i, statt als beliebige positive ganze Zahlen, sämtlich als positive ungerade Zahlen u_i vorausgesetzt werden, und man kann daher sogleich nachstehende zweite Formel schreiben:

$$N\left(s=\sum_1^\lambda \bar{u}_i+\sum k_i u_i;\ (-1)^\lambda\right)=0, \tag{32}$$

welcher nach dem *Euler*schen Satze in Nr. 4 des dritten Kapitels auch die Gestalt

$$N\left(s=\sum_1^\lambda \bar{u}_i+\sum a_i;\ (-1)^\lambda\right)=0 \tag{32a}$$

gegeben werden kann.

Durch eine Betrachtung derselben Art überzeugt man sich von der Richtigkeit auch der folgenden Formel:

$$N\left(s=\sum \bar{a}_i+\sum k_i a_i;\ (-1)^{\Sigma k_i}\right)=0. \tag{33}$$

6. Nunmehr sei

$$s = \sum k_i a_i \tag{34}$$

irgendeine Zerfällung von s, bei welcher die ν verschiedenen Elemente a_i nicht öfter als zweimal auftreten; von ihnen mögen μ zweifach, die μ' anderen nur einfach vorhanden sein. Denkt man sich dann die Zerfällung in die Form

$$s = \sum_1^\lambda \bar{a}_i + \sum a_i \tag{35}$$

gesetzt, wo sowohl die λ Elemente $\bar{a}_i$ als auch die Elemente a_i unter sich verschieden gedacht werden, während die $\bar{a}_i$ von den a_i nicht verschieden zu sein brauchen, so leuchtet ein, daß die μ zweimal auftretenden Elemente sämtlich zu den $\bar{a}_i$ gehören müssen, so daß $\lambda = \mu + \lambda'$ gesetzt werden kann, wo λ' einen der Werte $0, 1, 2, \ldots, \mu'$ hat, während die μ' einfach auftretenden Elemente sich derartig auf die beiden Summen verteilen, daß λ' von ihnen zur ersten gezählt sind. Wir nennen wieder alle so für die bestimmte Zerfällung (34) möglichen Zerfällungen von der Form (35) die Gruppe derselben und können sämtliche Zerfällungen dieser Form in solche Gruppen verteilt denken. Wird nun wieder jede derartige Zerfällung $(-1)^\lambda$ mal gezählt, d. h. die Anzahldifferenz

$$N\left(s = \sum_1^\lambda \bar{a}_i + \sum a_i;\ \ (-1)^\lambda\right) \tag{36}$$

gebildet, so besteht folgende Gleichung:

$$N\left(s = \sum_1^\lambda \bar{a}_i + \sum a_i;\ \ (-1)^\lambda\right) = N\left(s = 2\sum_1^\nu a_i;\ \ (-1)^\nu\right). \tag{37}$$

Beschränkt man sich nämlich zunächst nur auf diejenigen Zerfällungen (35), welche die Gruppe von (34) bilden, so kann λ' nur die Werte $0, 1, 2, \ldots, \mu'$ annehmen, und jedem dieser Werte entsprechen $\binom{\mu'}{\lambda'}$ Zerfällungen, also der Beitrag

$$\binom{\mu'}{\lambda'} \cdot (-1)^\lambda = \binom{\mu'}{\lambda'} (-1)^{\lambda'} \cdot (-1)^\mu$$

zur Anzahldifferenz (36); alle die gedachten Zerfällungen geben also, wenn μ' von Null verschieden ist, den Gesamtbeitrag

$$(-1)^\mu \cdot \left[1 - \binom{\mu'}{1} + \binom{\mu'}{2} - \cdots + (-1)^{\mu'} \binom{\mu'}{\mu'}\right] = 0.$$

Nur, wenn $\mu' = 0$, mithin auch $\lambda' = 0$ und die Anzahl der zwiefach auftretenden Elemente der Zahl ν aller verschiedenen Elemente gleich, d. h. die Zerfällung (34) von der Form

$$s = 2 \cdot \sum_1^\nu a_i$$

und $\lambda = \mu = \nu$ ist, liefert die dann einzige Zerfällung

$$s = \sum_1^\nu a_i + \sum_1^\nu a_i$$

der zugehörigen Gruppe den Betrag $(-1)^\nu$, und die auf sie beschränkte Anzahldifferenz (36) ist ihm gleich. Aus diesem Verhalten für die einzelnen Gruppen ergibt sich die zu beweisende Formel (37).

Betrachte man weiter die Zerfällungen von der Form

$$(38) \qquad s = \sum_1^{\lambda'} a_i' + \sum_1^{\lambda''} a_i'',$$

in denen nicht nur die Elemente jeder Summe für sich, sondern auch die der ersten von denen der zweiten verschieden und λ', λ'' als gleichartige Zahlen, beide gerade oder beide ungerade, gedacht werden. Wenn jede solche Zerfällung positiv oder negativ gezählt wird, je nachdem $\frac{\lambda' - \lambda''}{2}$ gerade oder ungerade ist, so findet sich die Anzahldifferenz

$$(39) \qquad N\left(s = \sum_1^{\lambda'} a_i' + \sum_1^{\lambda''} a_i''; \ (-1)^{\frac{\lambda' - \lambda''}{2}}\right) = 0.$$
$$a_i' \gtrless a_i''$$

Denkt man sich nämlich zunächst alle diejenigen Zerfällungen (38), in denen die Anzahl $\lambda = \lambda' + \lambda''$ sowohl, wie die Gesamtheit der a_i', a_i'', die durch $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ bezeichnet werde, dieselbe ist, so daß

$$s = \sum_1^\lambda a_i$$

gesetzt werden kann, so entstehen sie alle aus dieser letzteren, indem die λ Elemente a_i auf alle Weise in zwei Gruppen verteilt werden; bezeichnen λ', λ'' je die Anzahl der Elemente derselben, so gibt es $\binom{\lambda}{\lambda'}$ entsprechende Verteilungen und der Beitrag derselben zur Anzahldifferenz (39) beträgt

$$\binom{\lambda}{\lambda'} \cdot (-1)^{\frac{\lambda' - \lambda''}{2}} = (-1)^{\frac{\lambda}{2}} \cdot (-1)^{\lambda'} \binom{\lambda}{\lambda'},$$

folglich ist der Gesamtbeitrag all der gedachten Zerfällungen

$$(-1)^{\frac{\lambda}{2}} \cdot \sum_{\lambda'=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda'} \binom{\lambda}{\lambda'} = (-1)^{\frac{\lambda}{2}} (1 - 1)^\lambda = 0.$$

Hieraus folgt die Gleichung (39), da sie bei Beschränkung auf die besondere Kategorie gilt, offenbar auch für alle möglichen Zerfällungen von der Form (38). Diese Gleichung bleibt ersichtlich auch dann richtig, wenn die a_i', a_i'' als ungerade vorausgesetzt werden.

Brauchen dagegen in den Zerfällungen (38) die Elemente der ersten Summe nicht von denen der zweiten Summe verschieden zu sein, so findet sich unter den sonst gleichen Voraussetzungen durch eine Betrachtung, welche derjenigen ganz ähnlich ist, die zur Formel (37) geführt hat, nachstehende Gleichung:

$$(40)\qquad N\left(s = \sum_1^{\lambda'} a_i' + \sum_1^{\lambda''} a_i'';\ (-1)^{\frac{\lambda' - \lambda''}{2}}\right) = N\left(s = 2\sum a_i\right).$$
$$a_i' \gtreqless a_i''$$

Offenbar bleibt diese auch bestehen, wenn alle a_i, a_i', a_i'' ungerade gedacht werden.

Diese Grundformeln gestatten sogleich, einen interessanten Zerfällungssatz herzuleiten. Betrachten wir die Anzahldifferenz

$$(41)\qquad N\left(s = \sum_1^{\lambda} u_i + \sum \bar{a}_i + \sum k_i a_i;\ (-1)^{\lambda + \Sigma k_i}\right),$$

wo die u_i verschiedene ungerade, und sowohl die a_i wie die $\bar{a}_i$ verschiedene, doch sonst beliebige ganze positive Zahlen sind. Der Grundformel (32a) zufolge wird für alle Zerfällungen der gedachten Art, bei denen der Teil $\sum k_i a_i$ derselbe ist, ihr zu der Anzahldifferenz (41) gelieferter Beitrag verschwinden, mit Ausnahme der besonderen Zerfällungen von der Form

$$s = \sum k_i a_i,$$

für welche $\lambda = 0$ ist, und somit ergibt sich im ganzen der Ausdruck (41) gleich

$$(42)\qquad N\left(s = \sum k_i a_i;\quad (-1)^{\Sigma k_i}\right).$$

In derselben Weise erkennt man aber auf Grund der Formel (33) seine Gleichheit mit

$$N\left(s = \sum_1^{\lambda} u_i;\ (-1)^{\lambda}\right),$$

d. h., da $s \equiv \lambda$ mod. 2) gefunden wird, mit

$$(43)\qquad (-1)^s \cdot N\left(s = \sum u_i\right).$$

Die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (42) und (43) gibt den durch die Gleichung

$$(44)\qquad N\left(s=\sum u_i\right)=(-1)^s\cdot N\left(s=\sum k_i a_i;\quad (-1)^{\Sigma k_i}\right)$$

ausgedrückten Satz: daß jede Zahl ebenso oft in verschiedene ungerade Elemente zerfällbar ist, als der Unterschied zwischen der Anzahl ihrer geraden und derjenigen ihrer ungeraden Zerfällungen in beliebige, beliebig oft genommene Elemente beträgt.

7. Wir nehmen nun wieder zum Ausgangspunkte unserer weiteren Betrachtungen den *Euler*schen Pentagonalzahlensatz, dessen arithmetischer Inhalt, wenn zur Abkürzung

$$\tilde{\omega}_n=\frac{3n^2\pm n}{2}$$

gesetzt wird, in der Gleichung

$$(45)\qquad N\left(s=\sum_1^\nu a_i;\quad (-1)^\nu\right)=N\left(s=\tilde{\omega}_n;\quad (-1)^n\right)$$

zum Ausdrucke kommt. Unterscheidet man bei den Elementen a_i die geraden g_i von den ungeraden u_i und bezeichnet mit λ die Anzahl der ersteren, mit μ die Anzahl der letzteren, so daß

$$\sum_1^\nu a_i=\sum_1^\lambda g_i+\sum_1^\mu u_i$$

und

$$s\equiv\mu\pmod{2}$$

wird, so findet sich offenbar die Beziehung

$$(46)\quad N\left(s=\sum_1^\nu a_i;\ (-1)^\nu\right)=(-1)^s\cdot N\left(s=\sum_1^\lambda g_i+\sum_1^\mu u_i;\ (-1)^\lambda\right),$$

durch welche zunächst der Unterschied zwischen der Anzahl der geraden und der der ungeraden Zerfällungen einer Zahl in verschiedene positive Elemente einen neuen Ausdruck erhält.

Schreibt man aber die Zerfällungen

$$s=\sum_1^\lambda \bar{a}_i+\sum k_i a_i,$$

auf welche sich die Grundformel (31) bezieht, in der Form

$$s=s'+\sum_1^\lambda \bar{a}_i,$$

so wird der Gesamtbeitrag, welchen alle diejenigen Zerfällungen, bei denen der Bestandteil s' der gleiche ist, zur Anzahldifferenz

$$(47)\qquad N\left(s=\sum_1^\lambda \bar{a}_i+\sum k_i a_i;\quad (-1)^\lambda\right)$$

liefern, in Gemäßheit von (45) gleich

$$N\left(s-s'=\tilde{\omega}_n;\quad (-1)^n\right)$$

sein. Um also die gesamte Anzahldifferenz (47) zu bilden, hat man für alle Differenzen $s-\tilde{\omega}_n$, welche $\geqq 0$ sind, die sämtlichen Zerfällungen

$$s-\tilde{\omega}_n=\sum k_i a_i$$

zu bilden, und jede derselben $(-1)^n$ mal zu zählen. So erhält man den Ausdruck

$$\sum_n (-1)^n\cdot N\left(s-\tilde{\omega}_n=\sum k_i a_i\right),$$

d. i. nach (3) die Summe

$$\sum_n (-1)^n\cdot \Gamma_{s-\tilde{\omega}_n},$$

und die Grundformel (31) führt zu der Gleichung

$$(48)\qquad \sum_n (-1)^n\cdot \Gamma_{s-\tilde{\omega}_n}=0,$$

die mit der Rekursionsformel (13) oder (14) identisch ist.

Behandelt man in gleicher Weise die Grundformel (37), so geht auf Grund des Pentagonalzahlensatzes ihre linke Seite über in

$$\sum_n (-1)^n\cdot N\left(s-\tilde{\omega}_n=\sum a_i\right)=\sum_n (-1)^n\cdot C_{s-\tilde{\omega}_n},$$

während die rechte Seite, welche nur für ein gerades s von Null verschieden ist, nach demselben Satze gleich

$$N\left(s=2\,\tilde{\omega}_m;\quad (-1)^m\right)$$

gefunden wird. Demnach geht die Gleichung

$$(49)\qquad \sum_n (-1)^n\cdot C_{s-\tilde{\omega}_n}=N\left(s=2\,\tilde{\omega}_m;\quad (-1)^m\right)$$

hervor, in welcher die Summation wieder über alle $n=0,1,2,3,\ldots$ zu erstrecken ist, für welche $s-\tilde{\omega}_n\geqq 0$ bleibt, und die mit dem ersten der *Stern*schen Sätze in Nr. 2 identisch ist.

Ferner nimmt die Formel (46) zunächst diese Gestalt an:

$$N\left(s=\tilde{\omega}_m;\quad (-1)^m\right)=(-1)^s\cdot N\left(s=2\sum_1^\lambda a_i+\sum u_i;\ (-1)^\lambda\right),$$

wo die rechte Seite, welche sich nur für diejenigen Zerfällungen, bei denen $s-\sum u_i$ gerade ist, von Null unterscheidet und daher auch

$$(-1)^s \cdot N\left(\frac{s - \sum u_i}{2} = \sum_1^\lambda a_i;\ (-1)^\lambda\right)$$

geschrieben werden kann, mittels des Pentagonalzahlensatzes auf den Ausdruck

$$(-1)^s \cdot \sum_n (-1)^n \cdot N\left(s - 2\,\tilde{\omega}_n = \sum u_i\right),$$

d. i. auf

$$(-1)^s \cdot \sum_n (-1)^n C^{(u)}_{s-2\tilde{\omega}_n}$$

zurückkommt. Die vorige Gleichung verwandelt sich also in die folgende:

$$(50) \qquad \sum_n (-1)^n \cdot C^{(u)}_{s-2\tilde{\omega}_n} = N\left(s = \tilde{\omega}_m;\ (-1)^{s+m}\right),$$

eine Rekursionsformel von analoger Gestalt, wie die schon analytisch erhaltenen beiden voraufgehenden.

8. Bevor wir andere Formeln dieser Art aufsuchen, beweisen wir auf einfache Weise einen allgemeinen Umkehrsatz.

Sei $f(s)$ eine für jeden nicht negativen ganzen Wert von s definierte Funktion und k eine gegebene positive ganze Zahl. Besteht dann zwischen $f(s)$ und einer anderen Funktion $F(s)$ für jedes eben bezeichnete s die Beziehung

$$(51) \qquad \sum_n (-1)^n \cdot f(s - k\tilde{\omega}_n) = F(s),$$

wo die Summation wieder so weit ausgedehnt gedacht wird, als die Argumente $s - k\tilde{\omega}_n \geqq 0$ bleiben, so gilt zugleich die umgekehrte Beziehung

$$(52) \qquad \sum_h F(s - kh) \cdot \Gamma_h = f(s).$$

In der Tat nimmt die links stehende Summe nach Einsetzen des aus (51) entnommenen Wertes von $F(s - kh)$ den Ausdruck einer Doppelsumme an:

$$\sum_{n,h} (-1)^n \cdot f\left(s - k\,(h + \tilde{\omega}_n)\right) \cdot \Gamma_h,$$

welche, wenn alle Glieder zusammengefaßt werden, in denen $h + \tilde{\omega}_n$ den gleichen Wert i hat, in die Gestalt

$$\sum_i \left(f(s - ki) \cdot \sum_n (-1)^n \Gamma_{i-\tilde{\omega}_n}\right)$$

übergeht, wo nun, sobald i von Null verschieden ist, der Formel (48) zufolge die innere Summe verschwindet, und demnach die ganze Doppelsumme auf das eine Glied $f(s)$ sich zusammenzieht.

Man erkennt ebenso, daß aus der vorausgesetzten Gleichung (52) rückwärts wieder die Gleichung (51) hervorgeht, mithin eine jede von ihnen die andere nach sich zieht.

Die Anwendung dieses Satzes auf die Rekursionsformeln (49) und (50) ergibt ohne weiteres nachstehende neue Beziehungen:

$$\sum_h N\left(s - h = 2\tilde{\omega}_m;\ (-1)^m\right) \cdot \Gamma_h = C_s$$

$$\sum_h N\left(s - 2h = \tilde{\omega}_m;\ (-1)^{s+m}\right) \cdot \Gamma_h = C_s^{(u)}.$$

Da die unter dem Summenzeichen stehenden Anzahldifferenzen aber nur für diejenigen Zahlen h von Null verschieden, nämlich resp. $(-1)^m$ und $(-1)^{s+m}$ sind, für welche $s - h = 2\tilde{\omega}_m$ resp. $s - 2h = \tilde{\omega}_m$ ist, lassen sich diese Gleichungen schreiben, wie folgt:

$$(53)\qquad \begin{cases} C_s = \sum_m (-1)^m \cdot \Gamma_{s-2\tilde{\omega}_m} \\ (-1)^s \cdot C_s^{(u)} = \sum_m (-1)^m \cdot \Gamma_{\frac{s-\tilde{\omega}_m}{2}}, \end{cases}$$

wo die letztere Summation nur über diejenigen $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ zu erstrecken ist, für welche $\frac{s-\tilde{\omega}_m}{2}$ eine ganze Zahl $\geqq 0$ wird. Durch nochmalige Anwendung des Umkehrsatzes auf die erste dieser Formeln erhält man weiter die folgende:

$$(54)\qquad \Gamma_s = \sum_h C_{s-2h} \cdot \Gamma_h.$$

9. Nunmehr betrachten wir die Anzahldifferenz

$$(55)\qquad N\left(s = \sum_1^\lambda a_i + k a_0;\ (-1)^\lambda a_0\right).$$

Hierbei bedeutet k eine beliebige positive ganze Zahl und a_0 ein positives ganzzahliges Element, das auch einem der unter sich verschiedenen Elemente a_i gleich sein darf, und jede der bezeichneten Zerfällungen von s ist a_0 oder $-a_0$ mal zu zählen, je nachdem λ gerade oder ungerade ist. Dem Pentagonalzahlensatze zufolge ist für die Gesamtheit der Zerfällungen, bei denen der Bestandteil ka_0 derselbe ist,

$$N\left(s = \sum_1^\lambda a_i + k a_0;\ (-1)^\lambda a_0\right) = a_0 \cdot N\left(s - k a_0 = \tilde{\omega}_n;\ (-1)^n\right);$$

sie liefern also dann und nur dann einen von Null verschiedenen Beitrag, und zwar den Beitrag $(-1)^n \cdot a_0$ zu (55), wenn a_0 ein Teiler einer der Zahlen $s - \tilde{\omega}_n$:

$$ka_0 = s - \tilde{\omega}_n$$

ist, und demnach wird der gesamte Ausdruck (55) gleich der Summe

$$\sum_n (-1)^n \cdot \zeta_1(s - \tilde{\omega}_n), \tag{56}$$

wo die Summation so weit fortzusetzen ist, als das Argument $s - \tilde{\omega}_n$ noch positiv bleibt.

Andererseits entspricht der Zerfällung

$$s = \sum_1^\lambda a_i + ka_0, \tag{57}$$

bei welcher a_0 einem der Elemente a_i gleich ist, eine zweite Zerfällung

$$s = \sum_1^{\lambda-1} a_i + (k+1)a_0$$

und die Beiträge dieser beiden Zerfällungen zum Ausdrucke (55), nämlich

$$(-1)^\lambda a_0 \text{ und } (-1)^{\lambda-1} a_0,$$

heben sich auf. Ist aber a_0 in der Zerfällung (57) von den a_i verschieden, so entspricht ihr, falls $k > 1$ ist, eine zweite Zerfällung

$$s = \sum_0^\lambda a_i + (k-1)a_0$$

und beider Beiträge

$$(-1)^\lambda a_0 \text{ und } (-1)^{\lambda+1} a_0$$

heben sich auf. Somit bleiben nur die Zerfällungen

$$s = \sum_1^\lambda a_i + a_0,$$

bei denen a_0 von den a_i verschieden ist, und der Ausdruck (55) ist dem folgenden gleich:

$$N\left(s = \sum_1^\lambda a_i + a_0;\ (-1)^\lambda a_0\right).$$

Hierbei ist aber s in irgend $\lambda + 1$ voneinander verschiedene Elemente zerfällt, von denen a_0 ein beliebiges bezeichnet; indem man darunter der Reihe nach jedes derselben versteht, erhält man insgesamt den Beitrag

$$(-1)^\lambda \cdot (a_0 + a_1 + \cdots + a_\lambda) = (-1)^\lambda \cdot s$$

und somit darf die vorige Anzahldifferenz einfacher geschrieben werden wie folgt:

$$N\left(s = \sum_0^\lambda a_i;\ (-1)^\lambda s\right),$$

d. i. nach dem Pentagonalzahlensatze gleich

$$s \cdot N\left(s = \tilde{\omega}_m;\ (-1)^{m-1}\right),$$

nämlich Null oder $(-1)^{m-1} \cdot \tilde{\omega}_m$, je nachdem s keine Pentagonalzahl oder eine solche, $s = \tilde{\omega}_m$ ist.

Durch Vergleichung dieses Ergebnisses mit dem Werte (56) entsteht folgende Beziehung:

$$(58) \qquad \sum_n (-1)^n \cdot \zeta_1(s - \tilde{\omega}_n) = 0 \text{ oder } (-1)^{m-1} \cdot \tilde{\omega}_m,$$

je nach den angegebenen beiden Fällen, oder auch allgemein

$$(59) \qquad \sum_n (-1)^n \cdot \zeta_1(s - \tilde{\omega}_n) = 0,$$

wenn man die Summation so weit ausdehnt, als die Argumente $s - \tilde{\omega}_n$ nicht negativ werden, und übereinkommt, unter dem Zeichen $\zeta_1(0)$, welches nur dann auftritt, wenn s eine Pentagonalzahl ist, diese Zahl selbst zu verstehen. Dies ist die in Nr. 3 bereits gegebene *Euler*sche Rekursionsformel für die Summe der Teiler einer Zahl.

Schreibt man für den Wert der Summe (58) wieder

$$s \cdot N\left(s = \tilde{\omega}_m;\ (-1)^{m-1}\right)$$

und wendet dann den Umkehrsatz der vorigen Nummer an, so geht ähnlich wie die Gleichungen (53) folgende mit (20) identische Gleichung:

$$(60) \qquad \sum_n (-1)^{n-1} \cdot \tilde{\omega}_n \Gamma_{s - \tilde{\omega}_n} = \zeta_1(s)$$

hervor. Mit Rücksicht auf die Formel (48) läßt sie sich schreiben:

$$\sum_n (-1)^n \cdot (s - \tilde{\omega}_n) \Gamma_{s - \tilde{\omega}_n} = \zeta_1(s)$$

und ergibt so durch nochmalige Anwendung des Umkehrsatzes die andere Formel:

$$(61) \qquad s \cdot \Gamma_s = \sum_h \zeta_1(s-h) \cdot \Gamma_h = \sum_h \zeta_1(h) \cdot \Gamma_{s-h}.$$

Analog dieser Gleichung, welche sich der von *Stern* gegebenen Formel (22) als gleichartig an die Seite stellt, lassen sich noch (s. *Vahlen*, S. 8) zwei völlig analoge Beziehungen mit Bezug auf die Funktionen C_s und $C_s^{(u)}$ nachweisen, welche lauten:

$$s \cdot C_s = \sum_h \zeta_1^{(u)}(h) \cdot C_{s-h}$$

$$s \cdot C_s^{(u)} = \sum_h (-1)^h \zeta_1^{(u)}(h) \cdot C_{s-h}^{(u)}.$$

10. So haben wir auf arithmetischem Wege einen größeren Teil der zuvor erhaltenen Formeln wieder hergeleitet und noch andere hinzugefügt.[1]) Solcher Rekursionsformeln gibt es noch eine große Menge, doch sind davon bisher die wenigsten aus arithmetischer Grundlage gewonnen, sondern die Mehrzahl aus einer Quelle, die weder arithmetisch noch elementar ist, nämlich aus der Theorie der elliptischen Funktionen geschöpft worden. Wir würden glauben, in unserem Werke eine Lücke zu lassen, wenn wir diese Formeln ganz übergingen. Wollen wir sie aber ableiten, so müssen wir doch eben die Gleichungen, aus denen sie fließen, jener Theorie hier einfach entnehmen.

Neben der Gleichung (12) besteht, wie *Jacobi* (fundamenta nova theoriae funct. ellipt. § 66) gezeigt hat, auch folgende Entwicklung

$$\prod_{h=1}^{\infty}(1-x^h)^3=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(2n+1)x^{\frac{n(n+1)}{2}}. \tag{62}$$

Wird diese logarithmisch differenziert, nimmt man nämlich beiderseits die Logarithmen, differenziert, und multipliziert endlich mit x, so findet man

$$3\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\zeta_1(m)x^m=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\,x^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Indem man nach Multiplikation mit dem Nenner in der zur Linken gebildeten Doppelsumme alle Glieder zusammenfaßt, welche dieselbe Potenz x^s enthalten, erhält man durch Vergleichung gleicher Potenzen von x auf beiden Seiten den neuen Satz:

Die Summe

$$3\cdot\sum_n(-1)^n(2n+1)\cdot\zeta_1\left(s-\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

ist $(-1)^{m-1}(2m+1)\cdot\frac{m(m+1)}{2}$ oder Null, je nachdem s eine Trigonalzahl, $s=\frac{m(m+1)}{2}$ ist oder nicht ist. Man darf dafür auch schreiben:

$$\sum_n(-1)^n(2n+1)\cdot\zeta_1\left(s-\frac{n(n+1)}{2}\right)=0, \tag{63}$$

wenn die Summation über alle Zahlen $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ ausgedehnt wird, für welche $s-\frac{n(n+1)}{2}$ nicht negativ ist, und

1) Eine arithmetische Herleitung der Formel (24) s. bei *Vahlen* a. a. O. S. 18 u. 19.

unter dem Zeichen $\zeta_1(0)$, welches nur dann auftritt, wenn s eine Trigonalzahl, $s = \frac{m(m+1)}{2}$ ist, der Wert

(63 a) $$\zeta_1(0) = \frac{s}{3}$$

verstanden wird. Diese neue Rekursionsformel gab zuerst *Halphèn* (Bull. Soc. Math. de France 5 (1877) S. 158), später auch *Glaisher* (Quart. Journ. Math. 19, S. 220; Proc. London math. Soc. 15, S. 110). Der letztere zog aus derselben *Jacobi*schen Formel einen interessanten Satz, indem er sie mit der *Gauss*ischen Formel (17) in Verbindung setzte. Da dieser zufolge

$$\frac{\prod_{h=1}^{\infty}(1-x^{2h})}{\prod_{h=1}^{\infty}(1-x^{2h-1})} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

und nach *Jacobi*

$$\prod_{h=1}^{\infty}(1-x^h)^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ist, woraus

$$\prod_{h=1}^{\infty}(1-x^{2h})^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{n(n+1)}$$

folgt, so ergibt die Beziehung

$$\frac{\prod_{h=1}^{\infty}(1-x^{2h})}{\prod_{h=1}^{\infty}(1-x^{2h-1})} \cdot \prod_{h=1}^{\infty}(1-x^h) = \prod_{h=1}^{\infty}(1-x^{2h})^2$$

nachstehende Gleichung:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{n(n+1)}\right)^2.$$

Indem man hierin x^8 statt x setzt und darauf mit x^4 multipliziert, nimmt sie die Gestalt an

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{(2n+1)^2}\right)^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{(2n+1)^2}$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2(2n+1)^2}\right)^2.$$

Man verstehe unter $u, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2$ positive ungerade Zahlen; dann folgt durch Ausführung der Multiplikationen:

$$\sum (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u x^{u^2+u_1^2+u_2^2+u_3^2} = \sum (-1)^{\frac{v_1-1}{2}+\frac{v_2-1}{2}} \cdot v_1 v_2 \cdot x^{2(v_1^2+v_2^2)},$$

wo über alle Werte jener Zahlen zu summieren ist. Faßt man nun rechts und links diejenigen Glieder zusammen, in denen die Exponenten von x ein und dieselbe Zahl darstellen, so erhält man folgenden von *Glaisher* gegebenen Satz:

Man denke einerseits alle Darstellungen der Zahl $4s$ als Summe von vier Quadraten positiver ungerader Zahlen:

$$4s = u^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

nehme in jeder von ihnen die Basis u des ersten Quadrates positiv oder negativ, je nachdem sie von der Form $4k+1$ oder $4k+3$ ist, und bilde das Aggregat dieser Zahlen:

$$\sum (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u;$$

man denke andererseits alle Darstellungen der Zahl $2s$ als Summe zweier Quadrate positiver ungerader Zahlen:

$$2s = v_1^2 + v_2^2,$$

nehme für jede von ihnen das Produkt der mit den ebenso bestimmten Vorzeichen gedachten Basen und bilde das Aggregat dieser Produkte:

$$\sum (-1)^{\frac{v_1-1}{2}} v_1 \cdot (-1)^{\frac{v_2-1}{2}} v_2,$$

dann sind diese beiden Aggregate jederzeit einander gleich:

$$\sum (-1)^{\frac{u-1}{2}} u = \sum (-1)^{\frac{v_1-1}{2}} v_1 \cdot (-1)^{\frac{v_2-1}{2}} v_2.$$

Z. B. hat man für die Zahl $100 = 4 \cdot 25$ die Zerfällungen

$$1^2+3^2+3^2+9^2 = 1^2+5^2+5^2+7^2 = 1^2+1^2+7^2+7^2 = 5^2+5^2+5^2+5^2$$

nebst den daraus durch Vertauschung der Summanden hervorgehenden; demnach ist

$$\sum (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u$$

$$= 3\cdot 1 + 6\cdot(-3) + 3\cdot 9 + 3\cdot 1 + 6\cdot 5 + 3\cdot(-7) + 3\cdot 1 + 3\cdot(-7) + 1\cdot 5 = 11.$$

Andererseits gestattet die Zahl $50 = 2 \cdot 25$ die Darstellungen

$$1^2 + 7^2 = 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2,$$

woraus

$$\sum (-1)^{\frac{v_1-1}{2}} v_1 \cdot (-1)^{\frac{v_2-1}{2}} v_2 = 1 \cdot (-7) + (-7) \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 11$$

gefunden wird.

11. *Glaisher* hat noch eine Menge anderer Rekursionsformeln entwickelt, von denen wir im folgenden nur noch eine Auswahl besonders charakteristischer zu geben vermögen; im übrigen sei der Leser auf *Glaisher*s zahlreiche Arbeiten über diesen Gegenstand verwiesen.[1]) Zumeist sind die Gleichungen, aus denen die Formeln gezogen werden, durch Kombination der Potenzreihen für die Potenzen der Ausdrücke

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2K'}{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}$$

erhalten, in denen in *Legendre*scher Ausdrucksweise unter k der Modulus des elliptischen Integrals, unter K das vollständige, unter K' das zum komplementären Modulus k' gehörige vollständige elliptische Integral verstanden ist.

So folgt u. a. aus den beiden Reihen

$$\sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2q^{1/4} \cdot (1 + q^{1 \cdot 2} + q^{2 \cdot 3} + \cdots)$$

und

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 = 16 \cdot \sum_u \zeta_1(u) q^u, \qquad (u > 0 \text{ ungerade})$$

in denen q zunächst gleich $e^{\frac{-\pi K'}{K}}$ ist, demnächst aber als Veränderliche gedacht werden darf, die Beziehung

$$\sum_u \zeta_1(u) q^u = q\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n(n+1)}\right)^4$$

und durch ihre logarithmische Differenzierung in bezug auf q die andere:

$$\frac{\sum_u u\,\zeta_1(u)\,q^u}{\sum_u \zeta_1(u)\,q^u} = 1 + 4 \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\,q^{n(n+1)}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n(n+1)}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 q^{n(n+1)}}{\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)}}.$$

---

1) Außer den schon und noch in der Folge angeführten Arbeiten von *Glaisher* siehe Phil. Magazin (5) 33, S. 54; Messenger of Math. (2) 28, S. 29; Quarterly Journ. 30, S. 166; London Math. Soc. Proceed. 21, S. 395, wo die Funktion $H(n)$ betrachtet wird, welche den Überschuß der Anzahl der Teiler von n von der Form $3k+1$ über die Anzahl derjenigen von der Form $3k+2$ bezeichnet; in Messenger (2) 31, S. 64 findet sich eine darauf bezügliche Tabelle, wie ebenda S. 82 eine solche für den Überschuß der Anzahl der Teiler von n von den Formen $8k+1$, 3 über die Anzahl derjenigen von den Formen $8k+5$, 7. Im Quart. J. 36, S. 305 werden verschiedene Funktionen behandelt, welche auf die Darstellung einer Zahl als Summe von vier Quadraten bezüglich sind.

Durch Multiplikation mit den Nennern und durch Vergleichung der Koeffizienten der Potenz x^{2s+1} auf beiden Seiten findet man hieraus die Gleichheit:

$$\sum_n (2n+1)^2 \cdot \zeta_1\big(2s+1-n(n+1)\big)$$
$$= \sum_n \big(2s+1-n(n+1)\big)\zeta_1\big(2s+1-n(n+1)\big),$$

wo die Summationen über alle $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ auszudehnen sind, für welche die Argumente von ζ_1 positiv bleiben. Man hat also in entwickelter Form

$$\begin{aligned} &(2s+1)\zeta_1(2s+1) + (2s-1)\zeta_1(2s-1) \\ (64)\quad &+ (2s-5)\zeta_1(2s-5) + (2s-11)\zeta_1(2s-11) + \cdots \\ &= \zeta_1(2s+1) + 9\zeta_1(2s-1) + 25\zeta_1(2s-5) + 49\zeta_1(2s-11) + \cdots \end{aligned}$$

oder einfacher

$$(64\text{a})\quad \begin{aligned} &s[\zeta_1(2s+1) + \zeta_1(2s-1) + \zeta_1(2s-5) + \zeta_1(2s-11) + \cdots] \\ &= 5[\zeta_1(2s-1) + 3\zeta_1(2s-5) + 6\zeta_1(2s-11) + \cdots]. \end{aligned}$$

12. Eine andere auf dem zuvor bezeichneten Wege entstehende Formel der elliptischen Funktionentheorie ist die Gleichung

$$(65)\qquad 1 + 4 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \varrho(m) q^m = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) q^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\sum_{m=0}^{\infty} q^{\frac{m(m+1)}{2}}}.$$

Aus ihr geht unschwer die folgende hervor:

$$(66)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \varrho(m) q^m = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot \left[\frac{m+1}{2}\right] q^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\sum_{m=0}^{\infty} q^{\frac{m(m+1)}{2}}}.$$

Man erweitere den Bruch zur Rechten durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit der Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

Dann entsteht im Zähler die Doppelsumme

$$\sum_{m,h} (-1)^m \cdot \left[\frac{m+1}{2}\right] \cdot q^{\frac{m(m+1)}{2}+h},$$

in welcher wir diejenigen Glieder zusammenfassen wollen, in denen der Exponent von q gleichen Wert:

$$\frac{m(m+1)}{2} + h = n$$

hat. Verstehen wir unter k die durch die Ungleichheiten

$$(67) \qquad t_k \overline{\overline{<}} n < t_{k+1},$$

in denen zur Abkürzung t_k die Trigonalzahl $\frac{k(k+1)}{2}$ bezeichnet, bestimmte ganze Zahl, so geht die Doppelsumme über in

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(q^n \cdot \sum_{m=1}^{k}(-1)^m \cdot \left[\frac{m+1}{2}\right]\right).$$

Nun ist, je nachdem $k = 2r-1$ oder $k = 2r$, d. h. je nachdem n zwischen t_{2r-1} und t_{2r} oder zwischen t_{2r} und t_{2r+1} liegt, die Summe

$$\sum_{m=1}^{k}(-1)^m \cdot \left[\frac{m+1}{2}\right] = -\left[\left[\frac{2}{2}\right] - \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{4}{2}\right] - \left[\frac{5}{2}\right] + \cdots + (-1)^{k+1}\left[\frac{k+1}{2}\right]\right]$$

gleich $-\left[\frac{k+1}{2}\right]$ oder Null. Der Zähler zur Rechten von (66) wird also die einfache Summe

$$(68) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot q^n,$$

worin je nach den angegebenen beiden Fällen

$$c_n = -\left[\frac{k+1}{2}\right] \text{ oder Null}$$

ist. — In gleicher Weise verwandelt sich der Nenner von (66) in

$$\sum_{n=0}^{\infty}(k+1)q^n.$$

Wird aber mit ihm die Gleichung (66) multipliziert, so entsteht zur Linken die Doppelsumme

$$\sum_{m,\, n}(-1)^m \varrho(m)(k+1)q^{m+n};$$

als einfache Summe in der Form

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(q^s \cdot \sum_{n}(k+1)(-1)^{s-n}\varrho(s-n)\right)$$

geschrieben und mit (68) verglichen führt sie zu folgendem Ergebnisse, welches dem am Ende von Nr. 4 gegebenen analog ist:

Es ist

$$(69) \qquad \left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad \varrho(s) \\ -2\varrho(s-1) + 2\varrho(s-2) \\ -3\varrho(s-3) + 3\varrho(s-4) - 3\varrho(s-5) \\ +4\varrho(s-6) - 4\varrho(s-7) + 4\varrho(s-8) - 4\varrho(s-9) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad\qquad = (-1)^s \cdot c_s, \end{array}\right.$$

wo, wenn s zwischen t_{2r-1} und t_{2r+1} liegt, $c_s = -r$ oder Null ist, je nachdem s zwischen t_{2r-1} und t_{2r} oder zwischen t_{2r} und t_{2r+1} enthalten ist.

Zur Formel (66) zurückkehrend multiplizieren wir ihre beiden Seiten mit der Reihe

$$1 + q^2 + q^4 + q^6 + \cdots$$

So kommt rechts als neuer Zähler die Summe

$$\sum_{m,h} (-1)^m \cdot \left[\frac{m+1}{2}\right] q^{\frac{m(m+1)}{2} + 2h} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(q^n \cdot \sum (-1)^m \cdot \left[\frac{m+1}{2}\right]\right),$$

wo die innere Summation zur Rechten über alle positiven ganzen Zahlen m auszudehnen ist, für welche

$$\frac{m(m+1)}{2} \overline{\overline{<}}\, n$$

und von gleicher Parität ist mit n. Sei wieder

$$t_k \overline{\overline{<}}\, n < t_{k+1}.$$

Ist nun zunächst n gerade, so muß, damit auch $\frac{m(m+1)}{2}$ gerade sei, m von einer der Formen $4i$ oder $4i-1$ sein; also wird $\left[\frac{m+1}{2}\right] = 2i$. Ist dann k von einer der Formen $4h$, $4h+1$, $4h+2$, so ist der größte für i zulässige Wert h und $4h$ der größte für m, also wird

$$\sum (-1)^m \cdot \left[\frac{m+1}{2}\right] = -2 + 2 - 4 + 4 - \cdots - 2h + 2h = 0.$$

Ist dagegen k von der Form $4h-1$, so ist $4h-1$ der größte Wert für m, also

$$\sum (-1)^m \cdot \left[\frac{m+1}{2}\right] = -2 + 2 - 4 + 4 - \cdots - 2h = -2h.$$

Für den Fall eines ungeraden n muß m, damit auch $\frac{m(m+1)}{2}$ ungerade werde, von einer der Formen $4i+1$ oder $4i+2$ sein, also wird $\left[\frac{m+1}{2}\right] = 2i+1$. Wenn dann k von einer der Formen $4h+2, 3, 4$ ist, kann i höchstens h, und wird der größte für m zulässige Wert $4h+2$ sein, und man findet

$$\sum (-1)^m \cdot \left[\frac{m+1}{2}\right] = -1 + 1 - 3 + 3 - \cdots - (2h+1) + (2h+1) = 0,$$

dagegen ist, wenn k von der Form $4h+1$ ist, $4h+1$ der größte für m zulässige Wert und

$$\sum (-1)^m \cdot \left[\frac{m+1}{2}\right] = -1 + 1 - 3 + 3 - \cdots - (2h+1) = -(2h+1).$$

Dementsprechend wird q^n, wenn n in der Reihe der Trigonalzahlen $t_1, t_2, t_3, \ldots$ zwischen t_{2r} und t_{2r+1} liegt, gleichviel ob n gerade oder

ungerade ist, den Koeffizienten Null erhalten. Liegt aber n zwischen t_{4h-1} und t_{4h}, so haben die Potenzen q^n mit geradem Exponenten den Koeffizienten $-2h$, die mit ungeradem Exponenten den Koeffizienten Null; liegt dagegen n zwischen t_{4h+1} und t_{4h+2}, so haben jene den Koeffizienten Null, diese den Koeffizienten $-(2h+1)$. Bedenkt man, daß die Zahlen

$$t_{2r-1},\ t_{2r-1}+2,\ t_{2r-1}+4,\ \ldots,\ t_{2r-1}+2r-2$$

die zwischen t_{2r-1} und t_{2r} liegenden Zahlen von derselben Parität wie t_{2r-1}, also gerade oder ungerade sind, je nachdem $2r-1$ von der Form $4h-1$ oder $4h+1$ ist, so kann dies folgendermaßen ausgedrückt werden: Der Koeffizient von q^n ist Null oder $-r$, je nachdem die zwischen t_{2r-1} und t_{2r+1} gedachte Zahl n keine oder eine der Zahlen

$$t_{2r-1},\ t_{2r-1}+2,\ t_{2r-1}+4,\ \ldots,\ t_{2r-1}+2r-2$$

ist.

Nachdem dies für die rechte Seite der Gleichung (66) festgestellt ist, betrachten wir die mit der gedachten Potenzreihe multiplizierte linke Seite derselben. Diese ist

$$\sum_{m,h}(-1)^m\varrho(m)q^{m+2h}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(q^n\cdot(-1)^n\sum_h\varrho(n-2h)\Big),$$

oder, wenn zur Abkürzung die innere Summe zur Rechten, ausgedehnt über alle $h=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, für welche das Argument $n-2h>0$ bleibt,

$$\sum_h\varrho(n-2h)=\sigma(n)$$

gesetzt wird, gleich

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sigma(n)q^n.$$

Nach Multiplikation mit dem Nenner geht somit die linke Seite der Formel (66) in die nachstehende Summe über:

$$\sum_{n,m}(-1)^n\sigma(n)\cdot q^{n+\frac{m(m+1)}{2}}$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s q^s\big(\sigma(s)-\sigma(s-1)-\sigma(s-3)+\sigma(s-6)+\sigma(s-10)-\cdots\big).$$

Demnach ergibt sich durch Vergleichung mit dem zuvor angegebenen Werte des Koeffizienten von q^n zur Rechten der Formel der Satz:

Der nach den Trigonalzahlen fortschreitende Ausdruck

(70) $\quad \sigma(s)-\sigma(s-1)-\sigma(s-3)+\sigma(s-6)+\sigma(s-10)-\cdots$

ist gleich Null oder gleich $(-1)^{s-1}\cdot r$, je nach den beiden zuvor unterschiedenen beiden Fällen, wobei r durch die Ungleichheiten $t_{2r-1} \overline{\overline{<}}\, s < t_{2r+1}$ bestimmt gedacht ist.

13. Bevor wir in der Ableitung neuer Sätze weitergehen können, müssen wir zwei Hilfsbetrachtungen einfügen, welche die Summen gleicher Potenzen der natürlichen Zahlen betreffen.

Neben der bekannten Sinusentwickelung

$$\sin nx = \frac{nx}{1!} - \frac{n^3x^3}{3!} + \frac{n^5x^5}{5!} - \cdots$$

besteht (s. etwa *Saalschütz*, Vorles. über die *Bernoulli*schen Zahlen, S. 12) die Gleichung

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{B_1}{2!}2^2x^2 - \frac{B_2}{4!}2^4x^4 - \frac{B_3}{6!}2^6x^6 - \cdots,$$

worin die Koeffizienten $B_1, B_2, B_3, \ldots$ die *Bernoulli*schen Zahlen bezeichnen. Multipliziert man diese beiden Gleichungen ineinander, so entsteht die Formel

$$(71)\qquad \frac{\sin nx}{\sin x}\cdot\cos x$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h\cdot x^{2h}\left(\frac{n^{2h+1}}{(2h+1)!} + 2^2\frac{B_1}{2!}\frac{n^{2h-1}}{(2h-1)!} - 2^4\frac{B_2}{4!}\frac{n^{2h-3}}{(2h-3)!}\cdots \pm 2^{2h}\frac{B_h}{(2h)!}\right).$$

Nun hat man bekanntlich

für gerades n

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = 2\cos x + 2\cos 3x + \cdots + 2\cos(n-1)x,$$

woraus durch Multiplikation mit $\cos x$ und bei Beachtung der Formel

$$2\cos(2h-1)x\cdot\cos x = \cos(2h-2)x + \cos 2hx$$

die Gleichung

$$(72)\quad \frac{\sin nx}{\sin x}\cdot\cos x = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + \cdots + 2\cos(n-2)x + \cos nx$$

hervorgeht. Dagegen ist

für ungerades n

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + \cdots + 2\cos(n-1)x,$$

woraus man in gleicher Weise

$$(73)\quad \frac{\sin nx}{\sin x}\cdot\cos x = 2\cos x + 2\cos 3x + \cdots + 2\cos(n-2)x + \cos nx$$

erhält. Ersetzt man nun in diesen Formeln (72), (73) die Kosinus durch ihre bekannten Potenzreihen, so ergibt sich als Koeffizient von x^{2h} im ersten Falle

$$\frac{(-1)^h}{(2h)!}\Big(2\left(2^{2h}+4^{2h}+\cdots+(n-2)^{2h}\right)+n^{2h}\Big),$$

im zweiten Falle

$$\frac{(-1)^h}{(2h)!}\Big(2\left(1^{2h}+3^{2h}+\cdots+(n-2)^{2h}\right)+n^{2h}\Big).$$

Durch Vergleichung mit dem Koeffizienten von x^{2h} in (71) folgt nun der Satz:

Für gerades n ist die Summe

$$2^{2h}+4^{2h}+\cdots+(n-2)^{2h}+n^{2h},$$

für ungerades n die Summe

$$1^{2h}+3^{2h}+\cdots+(n-2)^{2h}+n^{2h}$$

gleich ein- und derselben Funktion

$$(74)\quad \begin{cases} \varphi_h(n)=\frac{1}{2(2h+1)}\Big(n^{2h+1}+\binom{2h+1}{1}n^{2h}+\binom{2h+1}{2}2^2B_1n^{2h-1} \\ \qquad\qquad -\binom{2h+1}{4}2^4B_2n^{2h-3} \\ \qquad +\binom{2h+1}{6}2^6B_3n^{2h-5}-\cdots\pm\binom{2h+1}{2h}2^{2h}B_h\Big). \end{cases}$$

Man schließt hieraus eine, für unsern Zweck zwar entbehrliche, aber an sich bemerkenswerte Beziehung. Offenbar ist für jedes n

$$1^{2h}+2^{2h}+3^{2h}+\cdots+n^{2h}=\varphi_h(n)+\varphi_h(n-1),$$

andererseits ist derselbe Ausdruck gleich

$$2^{-2h}\left(2^{2h}+4^{2h}+6^{2h}+\cdots+(2n)^{2h}\right)=2^{-2h}\cdot\varphi_h(2n).$$

Also besteht für jedes n die Gleichheit

$$(75)\qquad \varphi_h(2n)=2^{2h}\left(\varphi_h(n)+\varphi_h(n-1)\right).$$

Bezeichnet wieder $S_n^{(k)}$, wie im ersten Kapitel, die Summe

$$S_n^{(k)}=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k,$$

so erkennt man ferner durch Induktion aus den für $k=2,4,6$ bestehenden Werten der Potenzsummen $S_n^{(2)}, S_n^{(4)}, S_n^{(6)}$ das Stattfinden einer allgemeinen Beziehung von der Form:

$$(76)\quad \frac{S_n^{(2h)}}{S_n^{(1)}}=A_2\cdot S_n^{(2h-2)}+A_4\cdot S_n^{(2h-4)}+\cdots+A_{(2h-2)}\cdot S_n^{(2)}+A_{2h}\left(S_n^{(0)}+\frac{1}{2}\right),$$

die bestätigt wird, wenn man ihre Koeffizienten A_i passend bestimmen kann. Zu diesem Zwecke hat man nur die durch die Formel (54) des ersten Kapitels gegebenen Werte der Potenzsummen beiderseits

einzusetzen, und gewinnt dann durch Vergleichung derselben Potenzen von n auf den beiden Seiten der Formel nach einiger Rechnung die folgenden Werte:

$$(77)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}A_2 = \frac{2h-1}{2h+1} \\ \frac{1}{2}A_4 = \frac{2h-1}{2h+1} - \binom{2h}{1}\cdot\frac{B_1}{1} \\ \frac{1}{2}A_6 = \frac{2h-1}{2h+1} - \binom{2h}{1}\cdot\frac{B_1}{1} + \binom{2h}{3}\cdot\frac{B_2}{2} \\ \frac{1}{2}A_8 = \frac{2h-1}{2h+1} - \binom{2h}{1}\cdot\frac{B_1}{1} + \binom{2h}{3}\cdot\frac{B_2}{2} - \binom{2h}{5}\cdot\frac{B_3}{3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

durch welche die Gleichheit (76) hergestellt wird.

14. Nunmehr können wir eine Reihe von Sätzen mitteilen, welche *Glaisher* in den Proceed. London Math. Soc. 22 (1891), S. 359/410 entwickelt hat. Die Grundlage, von welcher er ausgeht, ist nachstehende, aus der Theorie der elliptischen Z-Funktionen gezogene Gleichung:

$$(78)\quad \begin{aligned} S\cdot[1-(1+2\cos x)q + (1+2\cos x+2\cos 2x)q^3 \\ -(1+2\cos x+2\cos 2x+2\cos 3x)q^6+\cdots] \end{aligned}$$
$$= \sin x\cdot q - (\sin x + 2\sin 2x)q^3 + (\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x)q^6 - \cdots,$$

worin zur Abkürzung

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(q^n \sum_{n=d\delta} \sin dx\Big)$$

gesetzt ist; die hierin vorhandene innere Summe ist über alle Teiler d von n zu beziehen. Schreibt man, um das Gesetz der einzelnen Reihen klarer auszudrücken, diese Formel in der Gestalt:

$$(79)\quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}\Big(q^n\sum_{n=d\delta}\sin dx\Big)\cdot\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h(1+2\cos x+2\cos 2x+\cdots+2\cos hx)q^{\frac{h(h+1)}{2}} \\ \qquad = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m-1}\cdot(\sin x + 2\sin 2x+\cdots+m\sin mx)q^{\frac{m(m+1)}{2}}, \end{cases}$$

so läßt sich zunächst die Doppelsumme auf der linken Seite, indem man die Glieder mit derselben Potenz q^s zusammenfaßt, als einfache Potenzreihe schreiben, wie folgt:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left[q^s\cdot\left(\sum_h(-1)^h\cdot(1+2\cos x+\cdots+2\cos hx)\sum_{s-\frac{h(h+1)}{2}=d\delta}\sin dx\right)\right],$$

wo die auf h bezügliche Summation über alle $h = 0, 1, 2, 3, \ldots$ zu

erstrecken ist, für welche $s - \frac{h(h+1)}{2}$ positiv bleibt, und nun der Koeffizient von q^s mit Beachtung der Formel

$$2 \sin ax \cos bx = \sin (a+b)x + \sin (a-b)x$$

durch den Ausdruck

$$\sum_h \left((-1)^h \sum_{s - \frac{h(h+1)}{2} = d\delta} \Big(\sin dx + \sin (d+1)x + \sin (d-1)x + \cdots + \sin (d+h)x + \sin (d-h)x \Big) \right)$$

d. i., ausführlich geschrieben, durch

$$(80) \quad \begin{aligned} &\sum_{s=d\delta} \sin dx - \sum_{s-1=d\delta} \big(\sin dx + \sin (d+1)x + \sin (d-1)x\big) \\ &+ \sum_{s-3=d\delta} \big(\sin dx + \sin (d+1)x + \sin (d-1)x + \sin (d+2)x + \sin (d-2)x\big) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ersetzt werden kann. Vergleicht man ihn aber mit dem Koeffizienten von q^s auf der rechten Seite der Gleichung (79), so ergibt sich leicht folgendes:

Der Ausdruck (80) ist Null für jeden Wert von s, der keine Trigonalzahl ist, dagegen ist er für eine Trigonalzahl

$$s = \frac{m(m+1)}{2}$$

gleich dem Werte

$$(81) \quad (-1)^{m-1} \cdot (\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \cdots + m \sin mx).$$

Nun haben die Argumente der Sinusfunktion, welche in dieser merkwürdigen Gleichheit auftreten, nicht die mindeste Beziehung zu den Eigenschaften dieser Funktion, und so läßt die Formel den Schluß zu, daß die in ihr ausgesprochene Beziehung nicht sowohl zwischen den Sinus jener Argumente, als vielmehr zwischen den letzteren selbst stattfinde. Man kann mit *Glaisher* aus der Gleichheit des Ausdrucks (80) mit Null resp. mit (81) einen Zahlensatz ablesen, der sich folgendermaßen ausspricht:

Versteht man allgemein unter dem Zeichen

$$G_m\big(\varphi(d),\ \psi(d),\ \chi(d),\ \cdots\big)$$

die Gesamtheit der Werte

$$\varphi(d),\ \psi(d),\ \chi(d),\ \cdots$$

für alle Teiler d von m, sowie unter

$$-G_m\big(\varphi(d),\ \psi(d),\ \chi(d),\ \cdots\big)$$

die Gesamtheit der für alle diese Teiler d gebildeten Werte

$$-\varphi(d),\quad -\psi(d),\quad -\chi(d),\quad \cdots,$$

so heben sich in der durch die Formel

$$(82)\begin{cases} G_s(d) - G_{s-1}(d, d+1, d-1) + G_{s-3}(d, d+1, d-1, d+2, d-2) \\ \qquad - G_{s-6}(d, d+1, d-1, d+2, d-2, d+3, d-3) \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

bezeichneten Gesamtheit sämtliche Zahlen auf, falls s keine Trigonalzahl ist, ist dagegen s eine Trigonalzahl, $s = \frac{m(m+1)}{2}$, so bleibt darin, mit dem Vorzeichen von $(-1)^{m-1}$ genommen, eine Eins, zwei Zweien, drei Dreien, $\cdots$, m Zahlen m.

Sei z. B. $s = 9$, so gibt die Formel (82) folgendes System von Zahlen:

$$1, 3, 9 - \begin{Bmatrix} 2, 3, 5, 9 \\ 1, 2, 4, 8 \\ 0, 1, 3, 7 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3, 4, 5, 8 \\ 2, 3, 4, 7 \\ 1, 2, 3, 6 \\ 0, 1, 2, 5 \\ -1, 0, 1, 4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 4, 6 \\ 3, 5 \\ 2, 4 \\ 1, 3 \\ 0, 2 \\ -1, 1 \\ -2, 0 \end{Bmatrix},$$

in welchem, da 9 keine Trigonalzahl ist, sämtliche Zahlen sich heben.

Ist dagegen $s = 10$, d. i. die Trigonalzahl $\frac{4 \cdot 5}{2}$, so erhält man das System:

$$1, 2, 5, 10 - \begin{Bmatrix} 2, 4, 10 \\ 1, 3, 9 \\ 0, 2, 8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3, 9 \\ 2, 8 \\ 1, 7 \\ 0, 6 \\ -1, 5 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 4, & 5, 7 \\ 3, & 4, 6 \\ 2, & 3, 5 \\ 1, & 2, 4 \\ 0, & 1, 3 \\ -1, & 0, 2 \\ -2, & -1, 1 \end{Bmatrix}$$

und es verbleiben in ihm nur die Zahlen

$$-1,\ -2,\ -2,\ -3,\ -3,\ -3,\ -4,\ -4,\ -4,\ -4.$$

Abgesehen von den weiteren Folgerungen, die wir aus diesem eigenartigen Zahlensatze ableiten wollen, ist er auch deswegen sehr beachtenswert, weil er offenbar, wenn die Teiler aller Zahlen $s-1$, $s-3$, $s-6$, ... bekannt sind, sogleich alle Teiler der Zahl s selbst finden lehrt; es sind diejenigen Zahlen, welche in der Gesamtheit (82),

wenn vom ersten Gliede $G_s(d)$ abgesehen wird, nach eventueller Ausscheidung der im Satze zuletzt bezeichneten Zahlen noch verbleiben.

15. Offenbar aber darf man nun in dem Zahlensatze die darin auftretenden Zahlen $d, d \pm 1, d \pm 2, \ldots$ durch ein und dieselbe Funktion $f(d), f(d \pm 1), f(d \pm 2), \ldots$ derselben ersetzen, vorausgesetzt, daß sie für gleiche aber entgegengesetzte Argumente ebenfalls gleiche und entgegengesetzte Werte hat; mit anderen Worten: in dem für den Ausdruck (80) geltenden Satze darf die Sinusfunktion durch eine beliebige andere ungerade Funktion ersetzt werden, z. B. $\sin x$ durch x^n, wenn n ungerade ist. Auf diese Weise geht dann (80), wenn speziell $x = 1$ gewählt wird, über in den Ausdruck:

$$\sum_{s=d\delta} d^n - \sum_{s-1=d\delta}[d^n + (d+1)^n + (d-1)^n]$$
$$+ \sum_{s-3=d\delta}[d^n + (d+1)^n + (d-1)^n + (d+2)^n + (d-2)^n]$$
$$- \cdots\cdots\cdots$$
$$= \sum_{s=d\delta} d^n - \sum_{s-1=d\delta}\left[3\,d^n + 2\binom{n}{2}d^{n-2}\cdot 1^2 + 2\binom{n}{4}d^{n-4}\cdot 1^4 + \cdots\right]$$
$$+ \sum_{s-3=d\delta}\left[5\,d^n + 2\binom{n}{2}d^{n-2}(1^2+2^2) + 2\binom{n}{4}d^{n-4}(1^4+2^4) + \cdots\right]$$
$$- \cdots\cdots\cdots,$$

welcher also verschwindet, sooft s keine Trigonalzahl ist, dagegen, falls $s = \frac{m(m+1)}{2}$ eine solche ist, dem Werte

$$(-1)^{m-1}\cdot[1^{n+1} + 2^{n+1} + 3^{n+1} + \cdots + m^{n+1}]$$

gleich ist. Benutzt man das *Liouville*sche Zeichen $\zeta_n(s)$, um die Summe der n^{ten} Potenzen aller Teiler der Zahl s zu bezeichnen, und versteht unter $\tau(s)$ die Eins oder die Null, je nachdem s eine Trigonalzahl $s = \frac{m(m+1)}{2}$ ist oder nicht ist, so darf man dem erhaltenen Ergebnisse in folgender Formel Ausdruck geben:

$$(83)\left\{\begin{aligned}
&\zeta_n(s) - 3\,\zeta_n(s-1) + 5\,\zeta_n(s-3) - 7\,\zeta_n(s-6) + \cdots\\
&= 2\cdot\binom{n}{2}\left[1^2\cdot\zeta_{n-2}(s-1) - (1^2+2^2)\cdot\zeta_{n-2}(s-3) + (1^2+2^2+3^2)\cdot\zeta_{n-2}(s-6)\cdots\right]\\
&+ 2\cdot\binom{n}{4}\left[1^4\cdot\zeta_{n-4}(s-1) - (1^4+2^4)\cdot\zeta_{n-4}(s-3) + (1^4+2^4+3^4)\cdot\zeta_{n-4}(s-6)\cdots\right]\\
&+ \cdots\cdots\cdots\\
&+ 2\cdot\binom{n}{n-1}\left[1^{n-1}\cdot\zeta_1(s-1) - (1^{n-1}+2^{n-1})\cdot\zeta_1(s-3) + (1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1})\cdot\zeta_1(s-6)\cdots\right]\\
&\qquad + \tau(s)\cdot(-1)^{m-1}(1^{n+1} + 2^{n+1} + \cdots + m^{n+1});
\end{aligned}\right.$$

die linke Seite sowohl, wie die einzelnen Klammern auf der rechten sind so weit fortzusetzen, als die Argumente der ζ-Funktionen noch positiv bleiben. Die weitere Fortsetzung würde in dem Falle, wo das supplementäre Glied von Null verschieden d. h. wenn s eine Trigonalzahl $\frac{m(m+1)}{2}$ ist, auf Funktionen mit dem Argumente Null führen und links das Glied

$$(-1)^m \cdot (2m+1)\zeta_n(0) = -(-1)^{m-1} \cdot 2\left(S_m^{(0)} + \frac{1}{2}\right)\zeta_n(0),$$

rechts aber insgesamt den Ausdruck

$$(-1)^{m-1} \cdot 2\left[\binom{n}{2} S_m^{(2)} \zeta_{n-2}(0) + \binom{n}{4} S_m^{(4)} \zeta_{n-4}(0) + \cdots + \binom{n}{n-1} S_m^{(n-1)} \cdot \zeta_1(0)\right]$$

$$= (-1)^{m-1} \cdot 2\left[\binom{n}{1}\zeta_1(0) \cdot S_m^{(n-1)} + \binom{n}{3}\zeta_3(0) \cdot S_m^{(n-3)} + \cdots + \binom{n}{n-2}\zeta_{n-2}(0) \cdot S_m^{(2)}\right]$$

liefern. Andererseits ist nach Formel (76), wenn darin $n = m$ und $2h = n + 1$ gesetzt wird,

$$(-1)^{m-1}(1^{n+1} + 2^{n+1} + 3^{n+1} + \cdots + m^{n+1})$$

$$= (-1)^{m-1} \cdot \frac{m(m+1)}{2}\left[A_2 \cdot S_m^{(n-1)} + A_4 \cdot S_m^{(n-3)} + \cdots + A_{n-1} \cdot S_m^{(2)} + A_{n+1}\left(S_m^{(0)} + \frac{1}{2}\right)\right].$$

Man sieht hieraus, daß man, statt in der Formel (83) das supplementäre Glied zu schreiben, die linke Seite sowie die einzelnen Klammern zur Rechten bis zu den Gliedern mit dem Argumente Null fortsetzen darf, vorausgesetzt, daß man die ζ-Funktionen, deren Argument Null ist, durch nachstehende Formeln:

$$2 \cdot \binom{n}{1} \cdot \zeta_1(0) = s \cdot A_2$$

$$2 \cdot \binom{n}{3} \cdot \zeta_3(0) = s \cdot A_4$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$2\binom{n}{n-2} \cdot \zeta_{n-2}(0) = s \cdot A_{n-1}$$

$$2 \cdot \zeta_n(0) = s \cdot A_{n+1}$$

d. i. nach den Formeln (77), in denen $2h = n + 1$ zu denken ist, durch die Gleichungen

$$(84)\quad \begin{cases} \binom{n}{1} \cdot \zeta_1(0) = s \cdot \frac{n}{n+2} \\ \binom{n}{3} \cdot \zeta_3(0) = s\left(\frac{n}{n+2} - \binom{n+1}{1}\frac{B_1}{1}\right) \\ \binom{n}{5} \cdot \zeta_5(0) = s\left(\frac{n}{n+2} - \binom{n+1}{1}\frac{B_1}{1} + \binom{n+1}{3}\frac{B_2}{2}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

usw. bestimmt.

Die Formel (83) schreibt sich demnach gleichmäßig für die beiden unterschiedenen Fälle, ob s Trigonalzahl ist oder nicht, folgendermaßen:

Bei ungeradem n ist

$$(85)\begin{cases} \zeta_n(s) - 3\,\zeta_n(s-1) + 5\,\zeta_n(s-3) - 7\,\zeta_n(s-6) + \cdots \\ = 2\cdot\binom{n}{2}\Big[1^2\cdot\zeta_{n-2}(s-1) - (1^2+2^2)\zeta_{n-2}(s-3) + (1^2+2^2+3^2)\zeta_{n-2}(s-6)\cdots\Big] \\ + 2\cdot\binom{n}{4}\Big[1^4\cdot\zeta_{n-4}(s-1) - (1^4+2^4)\zeta_{n-4}(s-3) + (1^4+2^4+3^4)\zeta_{n-4}(s-6)\cdots\Big] \\ + \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 2\cdot\binom{n}{n-1}\Big[1^{n-1}\cdot\zeta_1(s-1) - (1^{n-1}+2^{n-1})\zeta_1(s-3) + (1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1})\zeta_1(s-6)\cdots\Big], \end{cases}$$

wo beiderseits so weit fortzuschreiten ist, als die Argumente der ζ-Funktionen nicht negativ werden, und für die darin auftretenden Funktionen mit dem Argumente Null die durch (84) bestimmten Werte zu setzen sind.

Eine sehr einfache Gestalt erhält diese allgemeine Formel in dem Falle, wo $n = 1$ ist, sie lautet dann [s. Formel (63)]:

$$(86)\qquad \zeta_1(s) - 3\,\zeta_1(s-1) + 5\,\zeta_1(s-3) - 7\,\zeta_1(s-6)\cdots = 0,$$

vorausgesetzt, daß man links so weit fortschreitet, als das Argument der Funktion ζ_1 nicht negativ wird, und unter dem Zeichen $\zeta_1(0)$, das nur dann auftritt, wenn s eine Trigonalzahl, $s = \frac{m(m+1)}{2}$ ist, den Wert

$$\frac{s}{3} = \frac{m(m+1)}{6}$$

versteht.

Was der Formel (85) ein ganz besonderes Interesse verleiht, ist der Umstand, wie durch dieselbe zwischen den Summen ungerader Potenzen der Teiler gewisser Zahlen und den Summen der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen ein merkwürdiger Zusammenhang festgestellt wird.

16. Setzt man in der Formel (79) $2x$ statt x und multipliziert sie dann mit $\sin x$, so geht der Koeffizient des allgemeinen Gliedes der rechtsstehenden Summe über in:

$$(-1)^{m-1}[\sin 2x \sin x + 2 \sin 4x \sin x + 3 \sin 6x \sin x + \cdots + m \sin 2mx \sin x]$$
$$= \frac{(-1)^{m-1}}{2}\cdot\begin{bmatrix} -\cos 3x - 2\cos 5x - 3\cos 7x \cdots - m\cos(2m+1)x \\ +\cos x + 2\cos 3x + 3\cos 5x \cdots + m\cos(2m-1)x \end{bmatrix}$$
$$= \frac{(-1)^{m-1}}{2}\cdot[\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos(2m-1)x - m\cos(2m+1)x]$$

und derjenige des allgemeinen Gliedes der zweiten Summe links in:

$$(-1)^h(\sin x + 2\cos 2x \sin x + 2\cos 4x \sin x + \cdots + 2\cos 2hx \sin x)$$
$$= (-1)^h \begin{pmatrix} \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin(2h+1)x \\ - \sin x \quad - \sin 3x - \cdots - \sin(2h-1)x \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^h \cdot \sin(2h+1)x.$$

Auf solche Weise entsteht aus (79) die neue Formel:

$$(87)\begin{cases} 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(q^n \sum_{n=d\delta} \sin 2dx\right)\cdot \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h \sin(2h+1)x \cdot q^{\frac{h(h+1)}{2}} \\ = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\cdot \\ \cdot\left(\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2m-1)x - m\cos(2m+1)x\right) q^{\frac{m(m+1)}{2}}. \end{cases}$$

Schreibt man hier die Doppelsumme zur Linken als eine einfache Potenzsumme, so erhält q^s den Koeffizienten

$$\sum_h \left((-1)^h \sum_{s-\frac{h(h+1)}{2}=d\delta} 2\sin 2dx \cdot \sin(2h+1)x\right)$$
$$= \sum_h \left((-1)^h \sum_{s-\frac{h(h+1)}{2}=d\delta}\left(\cos(2d-2h-1)x - \cos(2d+2h+1)x\right)\right),$$

die Summation über alle $h = 0, 1, 2, 3, \ldots$ erstreckt, für welche $s - \frac{h(h+1)}{2}$ positiv bleibt, und durch Vergleichung mit dem Koeffizienten derselben Potenz zur Rechten erhält man den Satz: der Ausdruck

$$(88)\begin{cases} \sum_{s=d\delta}\left(\cos(2d-1)x - \cos(2d+1)x\right) - \sum_{s-1=d\delta}\left(\cos(2d-3)x - \cos(2d+3)x\right) \\ + \sum_{s-3=d\delta}\left(\cos(2d-5)x - \cos(2d+5)x\right) - \sum_{s-6=d\delta}\left(\cos(2d-7)x - \cos(2d+7)x\right) \\ + \cdots \end{cases}$$

ist Null, sooft s keine Trigonalzahl ist, dagegen gleich $(-1)^{m-1}\cdot\left(\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2m-1)x - m\cos(2m+1)x\right)$, wenn s eine Trigonalzahl $\frac{m(m+1)}{2}$ ist.

Aus diesem Ergebnisse liest man nun wieder folgenden Zahlensatz ab, in welchem unter dem Zeichen $|x|$, wie üblich, der numerische Wert von x und das Symbol G_m in gleicher Weise zu verstehen ist, wie in voriger Nummer: In der durch die Formel

$$(89)\begin{cases} G_s(2d+1, -|2d-1|) - G_{s-1}(2d+3, -|2d-3|) \\ + G_{s-3}(2d+5, -|2d-5|) - G_{s-6}(2d+7, -|2d-7|) \\ + \cdots \end{cases}$$

ausgedrückten Gesamtheit von Zahlen heben sich alle Zahlen gegenseitig auf, falls s keine Trigonalzahl ist; wenn dagegen s eine Trigonalzahl $\frac{m(m+1)}{2}$ ist, so bleiben, mit dem Vorzeichen von $(-1)^m$ genommen, die Zahlen

$$1, 3, 5, \ldots, 2m-1 \text{ und } m \text{ mal die Zahl } -(2m+1).$$

Infolgedessen darf man in (88) die Funktion $\cos x$ durch irgendeine andere gerade Funktion, z B., unter n eine ungerade Zahl verstehend, durch x^{n+1} ersetzen. Für $x=1$ geht dann aus (88) folgende neue Beziehung hervor: Der Ausdruck

$$(90)\begin{cases} \sum\limits_{s=d\delta}[(2d+1)^{n+1}-(2d-1)^{n+1}]-\sum\limits_{s-1=d\delta}[(2d+3)^{n+1}-(2d-3)^{n+1}] \\ +\sum\limits_{s-3=d\delta}[(2d+5)^{n+1}-(2d-5)^{n+1}]-\sum\limits_{s-6=d\delta}[(2d+7)^{n+1}-(2d-7)^{n+1}] \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ist Null resp. gleich

$$(91)\qquad (-1)^m\cdot[1^{n+1}+3^{n+1}+5^{n+1}+\cdots+(2m-1)^{n+1}-m\cdot(2m+1)^{n+1}].$$

Mittels des binomischen Satzes und bei Verwendung des *Liouville*schen Zeichens $\zeta_n(s)$ nimmt das allgemeine Glied des Ausdrucks (90) die Gestalt an:

$$\begin{aligned}(-1)^h\cdot\Big[2\binom{n+1}{1}&\cdot 2^n(2h+1)\,\zeta_n\Big(s-\frac{h(h+1)}{2}\Big) \\ &+2\binom{n+1}{3}\cdot 2^{n-2}(2h+1)^3\zeta_{n-2}\Big(s-\frac{h(h+1)}{2}\Big) \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+2\binom{n+1}{n}\cdot 2(2h+1)^n\zeta_1\Big(s-\frac{h(h+1)}{2}\Big)\Big]\end{aligned}$$

d. h. $2^{n+1}(n+1)$ mal dem Ausdruck

$$(92)\begin{cases}(-1)^h\cdot\Big[(2h+1)\zeta_n\Big(s-\frac{h(h+1)}{2}\Big)+\frac{\binom{n}{2}}{2^2\cdot 3}(2h+1)^3\zeta_{n-2}\Big(s-\frac{h(h+1)}{2}\Big) \\ \qquad +\frac{\binom{n}{4}}{2^4\cdot 5}(2h+1)^5\zeta_{n-4}\Big(s-\frac{h(h+1)}{2}\Big)\cdots \\ \qquad +\frac{\binom{n}{n-1}}{2^{n-1}\cdot n}(2h+1)^n\zeta_1\Big(s-\frac{h(h+1)}{2}\Big)\Big].\end{cases}$$

Somit ergibt sich dann die Summe dieser Ausdrücke (92) gleich Null resp. gleich dem Werte

$$\frac{(-1)^{m+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)}\cdot[m(2m+1)^{n+1}-1^{n+1}-3^{n+1}-\ldots-(2m-1)^{n+1}],$$

der, wenn zur Abkürzung $2m+1=p$ gesetzt wird, in der Form

$$\frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{2^{n+1}\cdot(n+1)}\left[\frac{p+1}{2}p^{n+1}-1^{n+1}-3^{n+1}-\cdots-p^{n+1}\right]$$

oder nach (74), wenn dort $2h = n+1$ und $n = p$ gesetzt wird, in der Form

$$(93)\quad \left\{ (-1)^{\frac{p+1}{2}}\cdot\left[\frac{p^{n+2}}{2^{n+2}(n+2)}-\frac{B_1}{1}\cdot\frac{p^n}{2^{n+1}}+\frac{\binom{n}{2}}{3}\cdot\frac{B_2}{2}\cdot\frac{p^{n-2}}{2^{n-1}}-\frac{\binom{n}{4}}{5}\cdot\frac{B_3}{3}\cdot\frac{p^{n-4}}{2^{n-3}}+\cdots\mp\frac{B_{\frac{n+1}{2}}}{\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{p}{2^2}\right]\right.$$

geschrieben werden kann. Nun schreitet zwar der Ausdruck (90) nur so weit fort, als die Differenz $s-\frac{h(h+1)}{2}>0$ bleibt. Setzte man ihn jedoch in dem Falle, wo s eine Trigonalzahl $\frac{m(m+1)}{2}$ ist, fort, bis jene Differenz verschwindet d. h. bis $h = m$, so träte zu ihm der für $h = m$ gebildete Ausdruck (92) hinzu, der bei umgekehrter Ordnung seiner Glieder geschrieben werden kann, wie folgt:

$$(-1)^{\frac{p+1}{2}}\cdot\left[-\frac{\binom{n}{1}}{2^{n-1}n}\zeta_1(0)p^n-\frac{\binom{n}{3}}{2^{n-3}(n-2)}\zeta_3(0)p^{n-2}-\frac{\binom{n}{5}}{2^{n-5}(n-4)}\zeta_5(0)p^{n-4}+\cdots-\zeta_n(0)p\right].$$

Indem man also übereinkommt, die ζ-Funktionen mit dem Argumente Null durch nachstehende Formeln:

$$\frac{\binom{n}{1}}{2^{n-1}\cdot n}\cdot\zeta_1(0)=\frac{-B_1}{1\cdot 2^{n+1}}$$

$$\frac{\binom{n}{3}}{2^{n-3}\cdot(n-2)}\cdot\zeta_3(0)=\frac{\binom{n}{2}}{3}\cdot\frac{B_2}{2\cdot 2^{n-1}}$$

$$\frac{\binom{n}{5}}{2^{n-5}\cdot(n-4)}\cdot\zeta_5(0)=-\frac{\binom{n}{4}}{5}\cdot\frac{B_3}{3\cdot 2^{n-3}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

zu definieren, d. h.

$$(94)\quad \left\{\begin{array}{l}\zeta_1(0)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{B_1}{1},\ \zeta_3(0)=\frac{1}{4}\cdot\frac{B_2}{2},\ \zeta_5(0)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{B_3}{3},\ \ldots,\\ \qquad\qquad \zeta_n(0)=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{1}{4}\frac{B_{\frac{n+1}{2}}}{\frac{n+1}{2}}\end{array}\right.$$

zu setzen, darf man das supplementäre Glied (93) auf sein Anfangsglied beschränken und dafür den Ausdruck (90) so weit fortsetzen, als die Differenz $s - \frac{h(h+1)}{2}$ nicht negativ wird. So erhält man endlich, ausführlicher schreibend, den mit (85) korrespondierenden Satz:

Wird bei ungeradem n der Ausdruck

$$(95)\begin{cases} \zeta_n(s) - 3\zeta_n(s-1) + 5\zeta_n(s-3) - 7\zeta_n(s-6) + \cdots \\ + \frac{\binom{n}{2}}{2^2 \cdot 3}[\zeta_{n-2}(s) - 3^3\zeta_{n-2}(s-1) + 5^3\zeta_{n-2}(s-3) - 7^3\zeta_{n-2}(s-6) + \cdots] \\ + \frac{\binom{n}{4}}{2^4 \cdot 5}[\zeta_{n-4}(s) - 3^5\zeta_{n-4}(s-1) + 5^5\zeta_{n-4}(s-3) - 7^5\zeta_{n-4}(s-6) + \cdots] \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{\binom{n}{n-1}}{2^{n-1} \cdot n}[\zeta_1(s) - 3^n\zeta_1(s-1) + 5^n\zeta_1(s-3) - 7^n\zeta_1(s-6) + \cdots] \end{cases}$$

so weit fortgesetzt, als die Argumente der ζ-Funktionen nicht negativ werden, und versteht man unter den ζ-Funktionen mit dem Argumente Null, welche nur auftreten, wenn s eine Trigonalzahl, $s = \frac{m(m+1)}{2}$ ist, die in (94) angegebenen Werte, so erhält man Null, sooft s keine Trigonalzahl ist, dagegen, wenn $s = \frac{m(m+1)}{2}$ eine solche ist, den Wert

$$(-1)^{m+1} \cdot \frac{(2m+1)^{n+2}}{2^{n+2} \cdot (n+2)}.$$

17. Indem *Glaisher* die Formeln (79) und (87) durch Multiplikation mit verschiedenen Faktoren umformt, gewinnt er noch andere, durch deren mit der früheren analoge Behandlung er Sätze von ähnlicher Beschaffenheit wie die zuvor gegebenen ableitet. Nach einem derselben ist der Ausdruck

$$\begin{aligned} &\zeta_n(s) - 2\big(\zeta_n(s-1) + \zeta_n(s-2)\big) + 3\big(\zeta_n(s-3) + \zeta_n(s-4) + \zeta_n(s-5)\big) \\ &\qquad - 4\big(\zeta_n(s-6) + \cdots + \zeta_n(s-9)\big) + \cdots \\ &+ \frac{\binom{n}{2}}{3}\Big[\zeta_{n-2}(s) - 2^3\big(\zeta_{n-2}(s-1) + \zeta_{n-2}(s-2)\big) + 3^3\big(\zeta_{n-2}(s-3) + \zeta_{n-2}(s-4) + \zeta_{n-2}(s-5)\big) \\ &\qquad - 4^3\big(\zeta_{n-2}(s-6) + \cdots + \zeta_{n-2}(s-9)\big) + \cdots\Big] \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{\binom{n}{n-1}}{n} \cdot \Big[\zeta_1(s) - 2^n\big(\zeta_1(s-1) + \zeta_1(s-2)\big) + 3^n\big(\zeta_1(s-3) + \zeta_1(s-4) + \zeta_1(s-5)\big) \\ &\qquad - 4^n\big(\zeta_1(s-6) + \cdots + \zeta_1(s-9)\big) + \cdots\Big] \end{aligned}$$

$$(96) \quad = (-1)^k \cdot \left[\frac{k^{n+2}}{2(n+1)} - B_1 k^n + 2^2 \cdot \frac{\binom{n}{2}}{3} \cdot \frac{B_2}{2} k^{n-2} - 2^4 \cdot \frac{\binom{n}{4}}{3} \cdot \frac{B_3}{3} k^{n-4} + \cdots\right],$$

wenn $\frac{k(k+1)}{2}$ die nächste oberhalb s gelegene Trigonalzahl bezeichnet. In dem besonderen Falle $n=1$ gibt diese Formel den Satz:

Der Ausdruck

$$(97) \quad \begin{cases} \zeta_1(s) \\ -2\zeta_1(s-1)-2\zeta_1(s-2) \\ +3\zeta_1(s-3)+3\zeta_1(s-4)+3\zeta_1(s-5) \\ -4\zeta_1(s-6)-4\zeta_1(s-7)-4\zeta_1(s-8)-4\zeta_1(s-9) \\ +\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

ist gleich $(-1)^k\cdot\frac{k^3-k}{6}$, ein Satz, welcher mit den in den Formeln (28) und (69) ausgesprochenen Sätzen ersichtlich gleicher Art ist.

Noch andere Sätze ähnlichen Charakters, in denen aber statt der Funktion $\zeta_n(s)$ die mit einer Potenz von s multiplizierte Funktion $s^r\cdot\zeta_n(s)$ auftritt, hat derselbe Forscher in einer im Messenger of Math. (2) 21 (1892), S. 49 befindlichen Arbeit mitgeteilt. Aus dem gleichen Gebiete der Theorie der elliptischen Funktionen hat er ferner im Quart. Journ. of Math. 20 (1885), S. 97 teils zwischen den Funktionen $\varrho(s)$, $\zeta_1(s)$, teils zwischen diesen und einer anderen, von ihm durch $\chi(s)$ bezeichneten Funktion, die zur Lehre von den komplexen ganzen Zahlen von der Form $a+b\sqrt{-1}$ Bezug hat, Beziehungen hergeleitet, welche sich den in (28), (69) und (97) gegebenen an die Seite stellen, u. a. mehr. Wir müssen uns aber versagen, hier noch weiter in diese den Elementen so fernliegenden Betrachtungen uns zu vertiefen, und den Leser auf die angeführten Stellen verweisen.

Siebentes Kapitel.

Zerfällungen in gleichnamige Potenzen.

1. Bereits in Nr. 1 des dritten Kapitels ist der Aufgabe Erwähnung getan, daß eine Zahl s in Summanden von einer vorgeschriebenen besonderen Natur zerfällt werden solle. Wir heben unter den Zerfällungen dieser Art diejenigen hervor, bei welchen die Summanden Potenzzahlen eines bestimmten Grades sein sollen, die Zerfällung also die allgemeine Gestalt haben würde:

$$s = x^m + y^m + z^m + \cdots.$$

Der einfachste Fall dieser Aufgabe wäre die Zerfällung der Zahl s in eine Summe von Quadraten:

$$s = x^2 + y^2 + z^2 + \cdots,$$

und wir untersuchen dabei zuvörderst die Möglichkeit, eine gegebene Zahl s als Summe zweier Quadrate, also in der Form

$$s = x^2 + y^2 \tag{1}$$

darzustellen. Nicht jede Zahl gestattet eine solche Darstellung. Ist z. B. s von der Form $4k + 3$, so ist die Gleichung (1) unmöglich, da aus ihr die Kongruenz

$$3 \equiv x^2 + y^2 \pmod{4}$$

hervorginge, welche nicht stattfinden kann, da jedes Quadrat nur einen der Reste 0, 1, also die Summe $x^2 + y^2$ nur einen der Reste 0, 1, 2 (mod. 4) lassen kann. Auch nicht jede Zahl s von der Form $4k + 1$ läßt eine Darstellung (1) zu. Ist jedoch s eine Primzahl p dieser Form, so kann stets

$$p = x^2 + y^2$$

gesetzt werden, wovon wir uns zunächst mittelst einer von *Lagrange* angestellten Betrachtung überzeugen.

Da -1 bezüglich einer solchen Primzahl quadratischer Rest ist, gibt es eine durch p nicht teilbare Zahl z der Art, daß $z^2 \equiv -1$ oder $z^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ist, oder allgemeiner ausgedrückt: es gibt durch p nicht teilbare Zahlen x, y, für welche die Summe $x^2 + y^2$ durch p aufgeht, so daß

$$x^2 + y^2 = p \cdot m \tag{2}$$

gesetzt werden kann. Ist nun nicht schon $m = 1$, so darf doch $m < p$ gedacht werden, denn aus vorstehender Gleichung folgt für irgendwelche ganzzahligen Werte von ξ, η die andere Gleichung:

$$(x - p\xi)^2 + (y - p\eta)^2 = p \cdot m',$$

wo m' ganzzahlig; jene Werte ξ, η aber können so gewählt werden, daß $x - p\xi$, $y - p\eta$, ohne zu verschwinden, absolut kleiner als $\frac{p}{2}$ werden, und dann ergäbe sich:

$$p \cdot m' < 2 \cdot \frac{p^2}{4} \quad \text{also} \quad m' < p;$$

man darf daher gleich in (2) die x, y so denken, daß $m < p$. Alsdann können x, y nicht beide durch m teilbar sein, da sonst $p \cdot m$ durch m^2, p durch m aufginge, was nicht sein kann, da $m < p$ und von 1 verschieden ist. Dies vorausgeschickt, folgern wir aus (2) für irgendwelche ganzzahligen x_1, y_1 die Gleichung

$$(x - mx_1)^2 + (y - my_1)^2 = m \cdot m_1, \tag{3}$$

wo m_1 eine ganze Zahl, und können nun wieder x_1, y_1 so wählen, daß $x - mx_1$, $y - my_1$, ohne beide zu verschwinden, absolut kleiner als $\frac{m}{2}$, mithin

$$m \cdot m_1 < 2 \cdot \frac{m^2}{4}, \quad m_1 < m$$

wird.

Man beachte nun die Identität

$$(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = (xx' \pm yy')^2 + (xy' \mp x'y)^2, \tag{4}$$

derzufolge das Produkt zweier Summen von zwei Quadraten wieder eine solche Summe ist. Multipliziert man demgemäß die Gleichungen (2) und (3) miteinander, so kann mit Rücksicht auf (2) der neuen Gleichung leicht die Gestalt gegeben werden:

$$(p - xx_1 - yy_1)^2 + (yx_1 - y_1x)^2 = p \cdot m_1, \tag{5}$$

worin $m_1 < m < p$, mithin die Basen der Quadrate nicht beide durch m_1 teilbar sind, falls $m_1 > 1$. Man kann daher jetzt mit dieser Gleichung verfahren, wie mit der Gleichung (2) usw., und muß schließlich so zu einer Gleichung gelangen von der Form

$$x^2 + y^2 = p$$

d. h. zu einer Darstellung von p als Summe zweier Quadrate.

Ist ferner

$$s = 2^h \cdot p^{\alpha} p'^{\alpha'} p''^{\alpha''} \ldots \tag{6}$$

eine Zahl, welche außer etwa durch 2 nur durch Primfaktoren $p, p', p'', \ldots$ von der Form $4k + 1$ teilbar ist, so wird, da nicht nur jeder dieser letzteren, sondern auch $2 = 1^2 + 1^2$ die Summe zweier Quadratzahlen ist, sich durch Zusammensetzung nach Formel (4) auch s als eine solche Summe ergeben. Jede solche Zahl s läßt sich also in zwei Quadratzahlen zerfällen.

Man unterscheidet nun eigentliche und uneigentliche Darstellungen (1), je nachdem darin x, y teilerfremd sind, oder einen von 1 verschiedenen größten gemeinsamen Teiler d haben. Setzt man für die letzteren $x = dx'$, $y = dy'$, so daß x', y' teilerfremd sind, so muß s durch d^2 teilbar und

$$\frac{s}{d^2} = x'^2 + y'^2 \tag{7}$$

eine eigentliche Darstellung von $\frac{s}{d^2}$ sein, wie denn auch umgekehrt aus einer solchen sich eine Darstellung

$$s = x^2 + y^2$$

ergibt, in welcher $x = dx'$, $y = dy'$ den größten gemeinsamen Teiler d haben. Daher finden sich sämtliche Darstellungen von s als Summe

zweier Quadrate, wenn für alle quadratischen Teiler d^2 von s die eigentlichen Darstellungen der Zahlen $\frac{s}{d^2}$ bestimmt werden.

Ist nun

$$s = s' \cdot q^b \cdot q'^{b'} \cdots, \tag{8}$$

wo s' außer etwa durch 2 nur durch Primfaktoren von der Form $4k+1$ aufgeht, während $q, q', \ldots$ Primfaktoren von der Form $4k+3$ sind, so wird in jedem der Quotienten $\frac{s}{d^2}$ jeder der letzteren, dessen Exponent in der Zerlegung (8) ungerade ist, in ungerader Potenz auftreten und daher wird jeder Quotient $\frac{s}{d^2}$ mindestens einen dieser Primfaktoren enthalten, wenn auch nur einer der Exponenten $b, b', \ldots$ ungerade ist. Alsdann ist aber eine eigentliche Darstellung (7) unmöglich; denn, träte etwa q als Faktor von $\frac{s}{d^2}$ auf, so ergäbe sich aus (7) die Kongruenz

$$x'^2 + y'^2 \equiv 0 \quad \text{oder} \quad x'^2 \equiv -y'^2 \pmod{q},$$

derzufolge -1 quadratischer Rest von q wäre, während doch q von der Form $4k+3$ ist. Dann ist also die Zahl s nicht als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar. Sind dagegen alle Exponenten $b, b', \ldots$ gerade, d. h. ist s von der Form

$$s = s' \cdot Q^2,$$

wo s' keine, Q aber nur Primfaktoren von der Form $4k+3$ enthält, so gestattet allein der Quotient $\frac{s}{Q^2} = s'$ Darstellungen in der Form $x^2 + y^2$, und somit s ebensoviel Darstellungen in derselben Form, die aus den vorigen hervorgehen, indem ihre darstellenden Zahlen x, y durch Q multipliziert werden.

Hiernach läßt sich der Satz aussprechen:

Ist $s = s' \cdot s''$ und s' außer etwa durch 2 nur durch Primfaktoren von der Form $4k+1$, s'' nur durch solche von der Form $4k+3$ teilbar, so kann s als Summe zweier Quadratzahlen nur dann dargestellt werden, wenn s'' eine Quadratzahl ist, und gestattet alsdann ebensoviel Darstellungen wie die Zahl s'.

2. Diese Betrachtungen gehören einer allgemeinen Theorie an, deren Entwicklung in diesem Werke nicht gegeben werden kann, der Theorie der „binären quadratischen Formen“

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

wo a, b, c gegebene ganze Zahlen bezeichnen. Die Hauptaufgabe dieser Theorie besteht in der Untersuchung der Bedingungen, unter

welchen eine gegebene ganze Zahl s durch eine Form der angegebenen Art darstellbar, nämlich die Gleichung

$$s = ax^2 + bxy + cy^2 \tag{9}$$

in ganzen Zahlen x, y auflösbar ist, sowie in der Auffindung ihrer Lösungen, insbesondere auch in der Bestimmung von deren Anzahl. Offenbar ist $x^2 + y^2$ eine ganz spezielle Form der bezeichneten Art, und wir könnten daher der Lehre von den quadratischen Formen die Sätze über die Zerfällbarkeit der Zahlen in zwei Quadratzahlen und über die mögliche Anzahl der Zerfällungen, wie wir in Kap. 3, Nr. 24 getan haben, ohne weiteres entnehmen. Unter anderem lehrt jene Theorie den folgenden Satz:

Ist u eine ungerade Zahl, so hat die Gleichung

$$2u = x^2 + y^2 \tag{10}$$

nur dann, wie wir schon wissen, ganzzahlige Auflösungen, wenn $u = P \cdot Q^2$, P eine nur aus Primfaktoren von der Form $4k + 1$, Q eine nur aus Primfaktoren von der Form $4k + 3$ bestehende Zahl ist, und sie hat in diesem Falle soviel Auflösungen in positiven ganzen Zahlen x, y, welche notwendig ungerade sind, da wegen (10) $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$ sein muß, als die Anzahl der Teiler von P beträgt.

Um diesem Satze zunächst einen bequemeren Ausdruck zu geben, stellen wir folgende Betrachtung an. Sei

$$u = a^\alpha b^\beta \ldots a'^{\alpha'} b'^{\beta'} \ldots \tag{11}$$

die Zerlegung einer ungeraden Zahl u in ihre Primfaktoren, wo $a, b, \ldots$ von der Form $4k + 1$, $a', b', \ldots$ von der Form $4k + 3$ sein mögen. Entwickelt man das Produkt

$$\Pi = \begin{array}{l} (1 + a + a^2 + \cdots + a^\alpha) \\ \cdot (1 + b + b^2 + \cdots + b^\beta) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot (1 - a' + a'^2 - \cdots + (-1)^{\alpha'} a'^{\alpha'}) \\ \cdot (1 - b' + b'^2 - \cdots + (-1)^{\beta'} b'^{\beta'}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot, \end{array} \tag{12}$$

so erhält man offenbar jeden Teiler von u mit einer Potenz von -1 multipliziert, deren Exponent die Anzahl derjenigen seiner Primfaktoren angibt, welche die Form $4k + 3$ haben. Je nachdem diese Anzahl aber gerade oder ungerade ist, ist einerseits die Potenz von -1 positiv oder negativ, andererseits der Teiler von der Form $4k + 1$ oder $4k + 3$ resp. Das entwickelte Produkt Π liefert also den Unterschied zwischen der Summe der Teiler der ersteren, und derjenigen

der Teiler der zweiten Form und geht, wenn statt der Teiler überall die Einheit d. h., wenn alle $a, b, \ldots, a', b', \ldots$ gleich 1 gesetzt werden, in den Unterschied zwischen der Anzahl der Teiler der ersten und derjenigen der Teiler der zweiten Form über. Dieser Unterschied ist also gleich

$$(1+\alpha)(1+\beta)\cdots\frac{1+(-1)^{\alpha'}}{2}\cdot\frac{1+(-1)^{\beta'}}{2}\cdots$$

mithin nur dann von Null verschieden, wenn die sämtlichen Exponenten $\alpha', \beta', \ldots$ gerade sind, d. h. wenn u, wie im obigen Satze, die Form $P\cdot Q^2$ hat, und er ist in diesem Falle gleich

$$(1+\alpha)(1+\beta)\ldots$$

d. i. gleich der Anzahl der Teiler von $P = a^\alpha b^\beta \ldots$

Verbindet man dies Resultat mit dem obigen Satze, so darf man ihn fassen, wie folgt:

Die Anzahl der Auflösungen der Gleichung (10) in positiven ganzen Zahlen x, y ist gleich dem Unterschiede zwischen der Anzahl der Teiler von u, welche die Form $4k+1$ haben, und der Anzahl derjenigen von der Form $4k+3$.

Bezeichnet man mit *Liouville* durch $\varrho(u)$ den gedachten Unterschied, so darf gesetzt werden

$$\varrho(u) = \sum_{u=dd'}(-1)^{\frac{d-1}{2}}, \tag{13}$$

wenn die Summe auf alle Teiler d von u erstreckt wird; und in *Vahlen*scher Bezeichnungsweise spricht sich der letzte Satz aus in der Gleichung

$$N(2u = x^2 + y^2) = \varrho(u). \tag{14}$$
$$(x, y > 0)$$

Dieser, der Theorie der quadratischen Formen entnommene Satz wurde von *Jacobi* zuerst aus der Lehre von den elliptischen, genauer von den Thetafunktionen gewonnen, indem er die Formeln (5) S. 103 und (7) S. 184 seiner fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum miteinander verglich. Wir wollen hier zeigen, wie *Vahlen* ihn auf ganz elementarem Wege aus der Theorie der Zerfällung ganzer Zahlen, also als ein Resultat der additiven Zahlentheorie hergeleitet hat. Dabei kann wieder zwischen Zerfällungen und Zergliederungen einer Zahl in Quadratzahlen unterschieden werden. Die Gleichung (1) bleibt nämlich bestehen, wenn x, y — sei es einzeln oder beide — mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen oder auch miteinander vertauscht werden. Wird nun bei einer solchen Darstellung von s als Summe zweier Quadrate auf deren Anordnung bezw. auf das Vorzeichen der darstellenden Zahlen x, y keine Rücksicht genommen,

so nennen wir die Darstellung eine Zerfällung, anderenfalls eine Zergliederung von s. Sind x, y von Null und untereinander verschieden, so entsprechen der Zerfällung, wenn nichts Näheres von x, y ausgesagt wird, stets acht, entgegengesetztenfalls nur vier Zergliederungen. Hiernach können wir, da in (14) die Darstellungen

$$2u = x^2 + y^2, \quad 2u = y^2 + x^2,$$

sooft x, y verschieden voneinander sind, als verschiedene gezählt werden, den Satz folgendermaßen aussprechen:

Die Anzahl der Zergliederungen von $2u$ in zwei Quadrate positiver Zahlen beträgt $\varrho(u)$, in zwei Quadrate überhaupt $4\varrho(u)$.

Nun sind, da x, y in (14) ungerade sein müssen,

$$X = \frac{x+y}{2}, \quad Y = \frac{x-y}{2}$$

ganze Zahlen, deren erstere positiv ist; mit Beachtung der Identität

$$x^2 + y^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right]$$

ergibt sich also aus jeder Darstellung (14), in welcher x, y verschieden voneinander sind, eine Darstellung

$$u = X^2 + Y^2,$$

und aus der anderen: $2u = y^2 + x^2$ die Darstellung

$$u = X^2 + (-Y)^2,$$

während einer Darstellung $2u = x^2 + y^2$, in welcher x, y gleich sind und welche nur stattfindet, wenn u eine Quadratzahl ist, eine Darstellung

$$u = X^2 + 0^2$$

entspricht. Da dies offenbar auch umgekehrt gilt, folgt mit Rücksicht auf (14) die Beziehung

$$N(u = x^2 + y^2) = \varrho(u). \tag{15}$$

$$\left(x > 0, \quad y \gtreqless 0\right)$$

Hierbei darf man y als gerade voraussetzen, da eine der beiden Zahlen x, y ungerade, die andere gerade sein muß, und man, falls y ungerade ist, statt der Darstellungen $u = x^2 + (\pm y)^2$ die anderen: $u = y^2 + (\pm x)^2$ zählen darf. Demnach beträgt die Anzahl der Zerfällungen von u in das Quadrat einer geraden und einer positiven ungeraden Zahl ebenfalls $\varrho(u)$. Zählt man aber statt jeder Darstellung $u = x^2 + y^2$ mit negativem geraden y die Darstellung $u = (-y)^2 + x^2$, so erkennt man, daß $\varrho(u)$ auch die Anzahl der Zergliederungen von u in zwei Quadrate nicht negativer Zahlen, $4\varrho(u)$ die Anzahl der Zergliederungen von u in zwei Quadrate überhaupt bestimmt.

3. Zwecks der gedachten Herleitung dieser Sätze knüpfen wir an die Formel (183) des dritten Kapitels an, der man die Form geben kann:

$$(16)\quad N\left(s = \sum_1^{h+\mu}{}'\alpha_k + \sum_1^{\mu}\beta_k + \sum_1^{\nu}\gamma_k;\ (-1)^{h+\nu}\right) = N\left(s = \frac{h^2-h}{2};\ (-1)^h\right),$$

wo in der ersten Summe ein Summande α_k Null sein darf. Setzt man zur Abkürzung, indem man jetzt alle Summanden der ersten Summe positiv denkt,

$$D_h = N\left(s = \sum_1^{h+\mu}\alpha_k + \sum_1^{\mu}\beta_k + \sum_1^{\nu}\gamma_k;\ (-1)^{h+\nu}\right)$$

$$= N\left(s = \sum_1^{\lambda}\alpha_k + \sum_1^{\mu}\beta_k + \sum_1^{\nu}\gamma_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right),\ .$$

$$(\lambda - \mu = h)$$

so folgt zunächst für positives h aus (16) die Formel

$$(17)\qquad D_h - D_{h-1} = N\left(s = \frac{h^2-h}{2};\ (-1)^h\right).$$

Da aber offenbar

$$(18)\qquad D_{-h} = D_h$$

ist, ergibt sich, wenn $h = -h' + 1$ gesetzt wird, während $h' > 0$ ist, aus

$$D_{h'} - D_{h'-1} = N\left(s = \frac{h'^2-h'}{2};\ (-1)^{h'}\right)$$

die Gleichung

$$D_{-(h-1)} - D_{-h} = N\left(s = \frac{h^2-h}{2};\ (-1)^{h-1}\right)$$

d. h.

$$D_h - D_{h-1} = N\left(s = \frac{h^2-h}{2};\ (-1)^h\right),$$

also auch für nicht positive h die Gleichung (17). Dies vorausgeschickt, wählen wir die positive ganze Zahl n so groß, daß $\frac{n(n-1)}{2} > s$ ist; dann ist gewiß keine Zerfällung von s in n oder mehr verschiedene Summanden vorhanden und daher auch der Unterschied D_h für $h \geqq n$ gleich Null.

Ist also e r s t e n s s keine Trigonalzahl, so finden sich die Gleichungen

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} D_n &= 0\\ D_n - D_{n-1} &= 0\\ D_{n-1} - D_{n-2} &= 0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}\right.$$

daher sind in diesem Falle sämtliche D_h und folglich auch ihre Summe gleich Null, und man erhält

$$(20)\qquad N\left(s=\sum_1^\lambda \alpha_k+\sum_1^\mu \beta_k+\sum_1^\nu \gamma_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right)=0.$$

Ist aber zweitens s eine Trigonalzahl, $s=\frac{i^2\mp i}{2}$, so treten an die Stelle der Gleichungen (19) je nach dem doppelten Vorzeichen diese andern:

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned}
D_n&=0\\
D_n-D_{n-1}&=0\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
D_{i+1}-D_i&=0 \text{ resp. } (-1)^{i+1}\\
D_i-D_{i-1}&=(-1)^i \text{ resp. } 0\\
D_{i-1}-D_{i-2}&=0\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
D_{-(i-2)}-D_{-(i-1)}&=0\\
D_{-(i-1)}-D_{-i}&=(-1)^{i-1} \text{ resp. } 0\\
D_{-i}-D_{-(i+1)}&=0 \text{ resp. } (-1)^i\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
D_{-(n-1)}-D_{-n}&=0,
\end{aligned}\right.$$

aus denen jedes D_h, dessen Index absolut $\overline{\gtrless}\, i$ resp. $> i$ ist, wieder gleich Null, dagegen

$$D_{i-1}=D_{i-2}=\cdots=D_{-(i-2)}=D_{-(i-1)}=(-1)^{i-1}$$

resp.

$$D_i=D_{i-1}=\cdots=D_{-(i-1)}=D_{-i}=(-1)^i$$

gefunden wird. Die Summe sämtlicher D_h ist also in diesem Falle gleich $(2i-1)\cdot(-1)^{i-1}$ resp. $(2i+1)\cdot(-1)^i$, und man findet statt (20) die Gleichung

$$(22)\quad N\left(s=\sum_1^\lambda \alpha_k+\sum_1^\mu \beta_k+\sum_1^\nu \gamma_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right)=(-1)^{\pm i-1}\cdot(\pm 2i-1).$$

Da nun eine Zahl, wenn überhaupt, auf zwei Arten Trigonalzahl ist, so kann man beide Fälle zusammenfassend schreiben:

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned}
&N\left(s=\sum_1^\lambda \alpha_k+\sum_1^\mu \beta_k+\sum_1^\nu \gamma_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right)\\
&=\tfrac{1}{2}N\left(s=\frac{i^2\mp i}{2};\ (-1)^{\pm i-1}(\pm 2i-1)\right)\\
&\qquad\qquad (i>0)
\end{aligned}\right.$$

oder auch, wenn $8s+1=s'$ gesetzt wird,

$$N\left(s' = 1 + 8\sum_1^{\lambda}\alpha_k + 8\sum_1^{\mu}\beta_k + 8\sum_1^{\nu}\gamma_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right)$$
$$= \frac{1}{2}N\left(s' = (\pm 2i - 1)^2;\ (-1)^{\pm i - 1}\cdot(\pm 2i - 1)\right).$$
$$(i > 0)$$

Diese Formel setzt eigentlich $s' \equiv 1 \pmod{8}$ voraus; da aber offenbar in jedem andern Falle sowohl die links als die rechts stehende Anzahl verschwindet, so besteht für jedes s die Beziehung:

$$(24)\qquad N\left(s = 1 + 8\sum_1^{\lambda}\alpha_k + 8\sum_1^{\mu}\beta_k + 8\sum_1^{\nu}\gamma_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right)$$
$$= N\left(s = u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}}\cdot u\right),$$

worin nun u als positive ungerade Zahl gedacht werden muß.

Die links stehende Anzahl ist aber gleich der folgenden:

$$(25)\qquad \begin{cases} N\Bigl(s = 1 + 8\sum_1^{\lambda}\alpha_k + 8\sum_1^{\mu}\beta_k + 8\sum_1^{\nu}\gamma_k \\ \qquad + 8\sum\alpha'_k + 4\sum_1^{\mu'}u_k + 4\sum v_k \\ \qquad + 8\sum\alpha''_k + 4\sum u'_k + 4\sum_1^{\nu'}v'_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu+\mu'+\nu'}\Bigr), \end{cases}$$

worin die u_k, u'_k, v_k, v'_k ungerade Zahlen sind. In der Tat, faßt man

$$8\sum\alpha'_k + 4\sum v_k \text{ in } 4\sum a'_k$$
$$8\sum\alpha''_k + 4\sum u'_k \text{ in } 4\sum a''_k$$

zusammen, wo die a'_k, a''_k beliebige voneinander verschiedene Zahlen bedeuten, so geht

$$N\left(s - 1 - 8\sum_1^{\lambda}\alpha_k - 8\sum_1^{\mu}\beta_k - 8\sum_1^{\nu}\gamma_k - 4\sum_1^{\mu'}u_k - 4\sum a'_k\right.$$
$$\left. = 4\sum_1^{\nu'}v'_k + 4\sum a''_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu+\mu'}\cdot(-1)^{\nu'}\right),$$

weil nach der *Vahlen*schen Grundformel (32a) des 6. Kapitels

$$N\left(4s' = 4\sum_1^{\nu'}v'_k + 4\sum a''_k;\ (-1)^{\nu'}\right) = 0$$

ist (eine Formel, die offenbar auch richtig bleibt, wenn $4s'$ durch irgendeine nicht durch 4 teilbare Zahl ersetzt wird), in den Ausdruck

$$N\left(s-1-8\sum_1^{\lambda}\alpha_k-8\sum_1^{\mu}\beta_k-8\sum_1^{\nu}\gamma_k=4\sum_1^{\mu'}u_k+4\sum a'_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu+\mu'}\right)$$

über, der nun nach derselben Grundformel sich in den anderen:

$$N\left(s=1+8\sum_1^{\lambda}\alpha_k+8\sum_1^{\mu}\beta_k+8\sum_1^{\nu}\gamma_k;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right)$$

verwandelt. Andererseits geht aber der Ausdruck (25) zunächst nach Formel (184a) des 3. Kapitels über in diesen:

$$N\left(s=u^2+8\sum_1^{\mu}\beta_k+8\sum_1^{\nu}\gamma_k+4\sum_1^{\mu'}u_k+4\sum_1^{\nu'}v'_k\right.$$
$$\left.+4\sum u'_k+4\sum v_k;\ (-1)^{\mu+\nu+\mu'+\nu'}\right),$$

der nun seinerseits mit Rücksicht auf (186cc) des 3. Kapitels gleich

$$N\left(s=u^2+g^2+8\sum_1^{\mu}\beta_k+4\sum_1^{\mu'}u_k+4\sum_1^{\nu'}v'_k;\ (-1)^{\mu+\mu'+\nu'}\right)$$

und endlich nach (186bb) daselbst gleich

$$N\left(s=u^2+g^2+\gamma^2;\ (-1)^{\frac{\gamma}{2}}\right)$$

gesetzt werden kann, wo g, γ gerade Zahlen bedeuten. Auf solche Weise liefert die oben gefundene Beziehung (24) die folgende Gleichung:

$$(26)\qquad N\left(s=u^2+g^2+\gamma^2;\ (-1^{\frac{\gamma}{2}}\right)=N\left(s=u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}}\cdot u\right),$$

in welcher beiderseits u eine positive ungerade Zahl, g, γ aber gerade Zahlen bedeuten, die positiv, Null oder negativ sein können. Bezeichnet man also mit $\Delta(s)$ die Anzahl der Darstellungen der Zahl s in der Form

$$s=u^2+g^2$$
$$(u>0 \text{ ung.},\ g\gtreqless 0 \text{ ger.}),$$

so erhält man schließlich die Beziehung:

$$(27)\qquad \sum(-1)^{\frac{\gamma}{2}}\cdot\Delta(s-\gamma^2)=N\left(s=u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}}\cdot u\right),$$
$$(u>0 \text{ ung.},\ \gamma=0,\pm2,\pm4,\ldots)$$

in welcher wir s als ungerade Zahl denken wollen, die jedoch auch für gerade Werte von s besteht, da für solche ihre beiden Seiten von selber verschwinden.

4. Jetzt kehren wir zur Formel (185c) des 3. Kapitels zurück, der wir für gerade s, für welche der darin auftretende Buchstabe h eine gerade Zahl g bedeutet, die Form geben wollen

$$N\left(s=\sum_1^{\lambda} g_k+\sum_1^{\mu} u_k'+\sum_1^{\nu} u_k'';\ (-1)^{\lambda+\frac{\mu-\nu}{2}}\right)=N\left(s=g^2;\ (-1)^{\frac{g}{2}}\right).$$
$$\text{wo } \mu-\nu=g$$

Summiert man nun über alle zulässigen Werte von μ, ν, so kommt

$$N\left(s=\sum_1^{\lambda} g_k+\sum_1^{\mu} u_k'+\sum_1^{\nu} u_k'';\ (-1)^{\lambda+\frac{\mu-\nu}{2}}\right)=N\left(s=g^2;\ (-1)^{\frac{g}{2}}\right),$$
$$\left(g \gtreqless 0\right)$$

eine Formel, welche mittels der *Vahlen*schen Grundformel (40) des 6. Kapitels die Gestalt annimmt:

$$(28)\qquad N\left(s=\sum_1^{\lambda} g_k+2\sum u_k;\ (-1)^{\lambda}\right)=N\left(s=g^2;\ (-1)^{\frac{g}{2}}\right).$$
$$\left(g \gtreqless 0\right)$$

Für ungerade s dagegen geben wir der Formel (185c), in der jetzt h eine ungerade Zahl u sein wird, die folgende Gestalt:

$$N\left(s=\sum_1^{\lambda} g_k+\sum_1^{\mu} u_k'+\sum_1^{\nu} u_k'';\ (-1)^{\lambda+\frac{\mu-\nu-1}{2}}\cdot(\mu-\nu)\right)=N\left(s=u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}}\cdot u\right).$$
$$\text{wo } \mu-\nu=u$$

Durch Summation über die zulässigen Werte von μ, ν kommt zunächst

$$(29)\quad N\left(s=\sum_1^{\lambda} g_k+\sum_1^{\mu} u_k'+\sum_1^{\nu} u_k'';\ (-1)^{\lambda+\frac{\mu-\nu-1}{2}}\cdot(\mu-\nu)\right)=N\left(s=u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}}\cdot u\right).$$
$$\left(u \gtrless 0\right)$$

Werden hier die etwa in den beiden letzten Summen gleichzeitig auftretenden Summanden ausgesondert, so kann die linke Seite geschrieben werden wie folgt:

$$(30)\quad N\left(s=\sum_1^{\lambda} g_k+2\sum u_i+\sum_1^{\mu'} u_{i'}'+\sum_1^{\nu'} u_{i''}'';\ (-1)^{\lambda+\frac{\mu'-\nu'-1}{2}}\cdot(\mu'-\nu')\right),$$

worin, wenn k die Anzahl der u_i, $\mu'=\mu-k$, $\nu'=\nu-k$ also $\mu'-\nu'=\mu-\nu$ ist und die sämtlichen u_i, $u_{i'}'$, $u_{i''}''$ untereinander verschiedene ungerade Zahlen bedeuten. Nun ergeben die sämtlichen Zerfällungen

$$(31)\qquad s=\sum_1^{\lambda} g_k+2\sum u_i+\sum_1^{\mu'} u_{i'}'+\sum_1^{\nu'} u_{i''}''$$

die sämtlichen Zerfällungen von der Form

$$(32)\qquad s = \sum_1^{\lambda} g_k + 2\sum u_i + \sum_1^{\mu''} u'_{i'} + \sum_1^{\nu''} u''_{i''} + u_0,$$

in denen die u_i, $u'_{i'}$ $u''_{i''}$, u_0 voneinander verschiedene ungerade Zahlen sind, und zwar jede von diesen zweimal. Denn erstens entsteht aus jeder Zerfällung (31) eine Zerfällung von der Form (32), wenn aus einer der Summen $\sum_1^{\mu'} u'_{i'}$ oder $\sum_1^{\nu'} u''_{i''}$ nach Belieben ein Element abgesondert und mit u_0 bezeichnet wird, wobei dann, je nachdem u_0 der ersten oder der zweiten Summe entnommen wird, $\mu'' = \mu' - 1$, $\nu'' = \nu'$ oder $\mu'' = \mu'$, $\nu'' = \nu' - 1$ wird. Aber auch umgekehrt entspricht jede Zerfällung (32) einer oder vielmehr je zwei Zerfällungen von der Form (31), indem man entweder $\sum_1^{\mu''} u'_{i'} + u_0$ oder $\sum_1^{\nu''} u''_{i''} + u_0$ zu einer Summe zusammenfaßt, wobei dann je nach diesen Fällen $\mu' = \mu'' + 1$, $\nu' = \nu''$ oder $\mu' = \mu''$, $\nu' = \nu'' + 1$ wird. Da $\mu' - \nu' = \mu - \nu$ ungerade, so ist $\mu'' - \nu''$ gerade. Wird nun jede aus den Zerfällungen (31) entstehende Zerfällung von der Form (32) $(-1)^{\lambda + \frac{\mu'' - \nu''}{2}}$ mal genommen, so entsteht die doppelte Anzahldifferenz

$$(33)\quad 2 \cdot N\left(s = \sum_1^{\lambda} g_k + 2\sum u_i + \sum_1^{\mu''} u'_{i'} + \sum_1^{\mu''} u''_{i''} + u_0;\ (-1)^{\lambda + \frac{\mu'' - \nu''}{2}}\right).$$

Diejenigen Zerfällungen (32) aber, welche aus ein und derselben Zerfällung (31) entstehen, liefern offenbar den Beitrag

$$(-1)^{\lambda + \frac{\mu' - 1 - \nu'}{2}} \cdot \mu' + (-1)^{\lambda + \frac{\mu' - \nu' + 1}{2}} \cdot \nu' = (-1)^{\lambda + \frac{\mu' - \nu' - 1}{2}} \cdot (\mu' - \nu'),$$

da u_0 jedes der μ' Elemente $u'_{i'}$ und jedes der ν' Elemente $u''_{i''}$ bedeuten kann; sie liefern also den gleichen Beitrag zum Ausdrucke (33), wie die eine Zerfällung (31) zum Ausdrucke (30). Insgesamt werden also die beiden Ausdrücke (30) und (33) übereinstimmen müssen, und daher die Formel (29) auch folgendermaßen gefaßt werden können:

$$(34)\quad \begin{cases} 2 \cdot N\left(s = \sum_1^{\lambda} g_k + 2\sum u_i + \sum_1^{\mu''} u'_{i'} + \sum_1^{\nu''} u''_{i''} + u_0;\ (-1)^{\lambda + \frac{\mu'' - \nu''}{2}}\right) \\ \qquad = N\left(s = u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u\right),\quad \text{wo } u \gtrless 0. \end{cases}$$

Durch Anwendung der *Vahlen*schen Grundformel (39) des 6. Kapitels reduziert sich die linke Seite auf den Ausdruck

(35) $$2 \cdot N\left(s = \sum_1^\lambda g_k + 2\sum u_i + u_0;\ (-1)^\lambda\right),$$

wo u_0 von den u_i verschieden ist, und dieser endlich ist dem folgenden gleich:

(36) $$2 \cdot N\left(s = \sum_1^\lambda g_k + 2\sum u_i + uu_0;\ (-1)^{\lambda + \frac{u-1}{2}}\right),$$

in welchem u_0 auch mit einer der Zahlen u_i gleich sein darf, u aber eine positive ungerade Zahl bedeutet. In der Tat, wenn $u_0 \gtrless u_i$ und $u > 1$, so werden, wenn k die Anzahl der u_i bedeutet, die zwei Zerfällungen

$$s = \sum_1^\lambda g_k + 2\sum_1^k u_i + uu_0$$

$$s = \sum_1^\lambda g_k + 2\sum_0^k u_i + (u-2)u_0$$

für die Anzahldifferenz (36) resp. die Beiträge

$$(-1)^{\lambda + \frac{u-1}{2}},\ (-1)^{\lambda + \frac{u-3}{2}}$$

liefern, welche sich zerstören; ebenso umgekehrt; und es bleiben nur die Zerfällungen des Ausdrucks (35) zu berücksichtigen.

Hiernach geht aus (34) die einfachere Formel

$$2 \cdot N\left(s = \sum_1^\lambda g_k + 2\sum u_i + uu_0;\ (-1)^{\lambda + \frac{u-1}{2}}\right) = N\left(s = u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u\right)$$
$$(u \gtrless 0)$$

hervor, die nun, da $s - uu_0$ gerade ist, nach Formel (28) in die andere:

$$2 \cdot N\left(s = g^2 + uu_0;\ (-1)^{\frac{g}{2} + \frac{u-1}{2}}\right) = N\left(s = u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u\right).$$
$$(u \gtrless 0)$$

oder noch einfacher in diese:

(37) $$N\left(s = g^2 + uu_0;\ (-1)^{\frac{g}{2} + \frac{u-1}{2}}\right) = N\left(s = u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u\right)$$

übergeht, in welcher nun beiderseits u eine positive ungerade Zahl.

Bedenkt man endlich, daß für eine ungerade Zahl s der Ausdruck

$$N\left(s = uu_0;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}}\right)$$

offenbar nichts anderes ist als die Summe

$$\varrho(s) = \sum_{dd'=s} (-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

so spricht sich die voraufgehende Beziehung auch in der Formel aus:

$$(38) \qquad \sum_{\left(g \gtreqless 0\right)} (-1)^{\frac{g}{2}} \cdot \varrho(s-g^2) = N\Big(s = u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u\Big).\atop (u>0)$$

Ihre Vergleichung mit der Formel (27) läßt erkennen, daß

$$(39) \qquad \sum (-1)^{\frac{g}{2}} \cdot \Delta(s-g^2) = \sum (-1)^{\frac{g}{2}} \cdot \varrho(s-g^2)$$

ist, wo beiderseits sich die Summationen über alle geraden Zahlen $g \gtreqless 0$ erstrecken, für welche $s > g^2$ bleibt. Hieraus folgt aber die Gleichheit

$$(40) \qquad \Delta(s) = \varrho(s).$$

Denn, gilt diese Gleichheit bereits für alle ungeraden Argumente, welche kleiner sind als die gegebene Zahl s, so folgt sie aus (39) auch für das Argument s und somit allgemein, da offenbar für $s = 1$

$$\Delta(1) = 1 = \varrho(1)$$

ist. Die Gleichung (40) ist nun identisch mit (15) und demnach der in der letzteren also auch der in der Formel (14) ausgesprochene, zuvor der Theorie der quadratischen Formen entnommene Satz bewiesen.

Ist s weder ungerade noch das Doppelte einer ungeraden Zahl, so kann $s = 2^k \cdot u$ gesetzt werden, wo u ungerade und $k \geqq 2$ ist. In jeder vorhandenen Darstellung dieser Zahl $2^k \cdot u$ als Summe zweier Quadrate nicht negativer Zahlen:

$$2^k u = x^2 + y^2$$

sind x, y gerade, da sie sonst beide ungerade sein müßten, in der vorstehenden Gleichung dann aber deren linke Seite $\equiv 0$, die rechte $\equiv 2 \pmod{4}$ wäre. Setzt man also $x = 2x'$, $y = 2y'$, so folgt

$$2^{k-2} \cdot u = x'^2 + y'^2,$$

und man könnte ebenso fortschließen, wenn noch $k - 2 \geqq 2$ wäre. So kommt man, wenn zuerst k ungerade, $k = 2h + 1$ ist, auf eine Gleichung

$$2u = X^2 + Y^2$$

d. h. jeder der gedachten Darstellungen von $2^k \cdot u$ entspricht eine Darstellung von $2u$ in positiven Zahlen X, Y, und offenbar auch umgekehrt, da aus einer Gleichung der letzteren Form sich

$$2^{2h+1} \cdot u = (2^h X)^2 + (2^h Y)^2$$

ergibt. Ist aber zweitens k gerade, $k = 2h$, so kommt man von der vorausgesetzten Darstellung von $2^k u$ zu einer Darstellung

$$u = X^2 + Y^2$$

in nicht negativen Zahlen X, Y, also auch zu den Gleichungen

$$2u = (X+Y)^2 + (X-Y)^2 = (X+Y)^2 + (Y-X)^2$$

d. i. zu einer Darstellung

$$2u = x'^2 + y'^2$$

in positiven Zahlen x', y'; umgekehrt aber folgt auch aus einer solchen, indem man

$$X = \frac{x'+y'}{2}, \quad Y = \pm \frac{x'-y'}{2}$$

setzt, das Vorzeichen so wählend, daß $Y \overline{>} 0$ wird, eine Gleichung

$$u = X^2 + Y^2$$

und daraus

$$2^{2h} \cdot u = (2^h X)^2 + (2^h Y)^2.$$

Man ersieht hieraus, daß die Anzahl Darstellungen der Zahl $s = 2^k u$ als Summe zweier Quadrate nicht negativer Zahlen für $k \overline{>} 2$ ebensogroß ist, wie für $k = 1$ oder $k = 0$, nämlich gleich $\varrho(u)$. Nun sind die Teiler von u die ungeraden Teiler von s; man kann daher den Ausdruck (13) für $\varrho(u)$ auch folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{s=u'd'} (-1)^{\frac{u'-1}{2}},$$

indem man die Summation auf alle ungeraden Teiler u' von s bezieht, und erhält den allgemeinen Satz:

Für jede positive ganze Zahl s ist die Anzahl ihrer Zergliederungen

$$s = x^2 + y^2$$

in zwei Quadrate nicht negativer Zahlen x, y gleich dem Ausdrucke

$$(13') \qquad \varrho(s) = \sum_{s=u'd'} (-1)^{\frac{u'-1}{2}}$$

d. i. gleich dem Überschusse der Anzahl ihrer Teiler von der Form $4k+1$ über die ihrer Teiler von der Form $4k+3$.

5. Kehren wir noch einmal zur Formel (23) zurück. Die dreimalige Anwendung des Pentagonalzahlensatzes d. h. der Formel (169) des 3. Kapitels führt ihre linke Seite über in den Ausdruck

$$N\left(s = \tilde{\omega}_\lambda + \tilde{\omega}_\mu + \tilde{\omega}_\nu;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right),$$

wo

$$\tilde{\omega}_\lambda = \frac{3\lambda^2+\lambda}{2}, \quad \tilde{\omega}_\mu = \frac{3\mu^2+\mu}{2}, \quad \tilde{\omega}_\nu = \frac{3\nu^2+\nu}{2}$$

Pentagonalzahlen sind, während ihre rechte Seite auch in der Form

$$N\left(s = \frac{k^2+k}{2};\ (-1)^k \cdot (2k+1)\right)_{k>0}$$

geschrieben werden kann. Man erhält also die Beziehung:

$$(41)\quad N\left(s = \tilde{\omega}_\lambda + \tilde{\omega}_\mu + \tilde{\omega}_\nu;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right) = N\left(s = \frac{k^2+k}{2};\ (-1)^k(2k+1)\right)_{k>0}$$

oder den Satz: Die Anzahl der geraden Zerfällungen einer Zahl $s = \tilde{\omega}_\lambda + \tilde{\omega}_\mu + \tilde{\omega}_\nu$ in drei Pentagonalzahlen ist im allgemeinen gleich derjenigen der ungeraden, wenn eine solche Zerfällung zugleich mit $\lambda + \mu + \nu$ gerade oder ungerade heißt; doch übertrifft die erste Anzahl die zweite, falls s eine Trigonalzahl $\frac{k^2+k}{2}$ ist, um $(-1)^k \cdot (2k+1)$. Da die Gleichungen

$$s = \tilde{\omega}_\lambda + \tilde{\omega}_\mu + \tilde{\omega}_\nu,\quad s = \frac{k^2+k}{2}$$

sich auch schreiben lassen, wie folgt:

$$24s + 3 = (6\lambda+1)^2 + (6\mu+1)^2 + (6\nu+1)^2,\quad 24s + 3 = 3 \cdot (2k+1)^2,$$

so kann man der Formel (41) auch diese Gestalt geben:

$$(41')\quad N\left(s' = (6\lambda+1)^2 + (6\mu+1)^2 + (6\nu+1)^2;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right)$$
$$= N\left(s' = 3u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u\right),$$

worin u eine positive ungerade Zahl; s' bedeutet zunächst eine Zahl von der Form $24s + 3$, doch gilt die Beziehung für jedwede Zahl s', da für Zahlen anderer Form ersichtlich beide Seiten gleichzeitig verschwinden. In Worten spricht sich die Formel (41′) folgendermaßen aus:

Die Anzahl der geraden Darstellungen einer Zahl s in der Form

$$(42)\qquad s = (6\lambda+1)^2 + (6\mu+1)^2 + (6\nu+1)^2$$

ist gleich der Anzahl der ungeraden, ausgenommen den Fall, wenn $s = 3u^2$ d. i. das dreifache Quadrat einer ungeraden Zahl ist, in welchem Falle die erste Anzahl die letztere um $(-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u$ übertrifft.

Da dieser Unterschied numerisch größer ist als 1, sobald $s > 3$, so muß dann auch die Anzahl aller Darstellungen von s in der Form (42) größer als 1 sein, die Zahl $s = 3u^2$ also mehr als eine solche und somit mindestens eine von der selbstverständlichen Darstellung

$$s = u^2 + u^2 + u^2$$

verschiedene Darstellung (42) verstatten. In der letzten sind dann

λ, μ, ν nicht alle einander gleich. Nun kann man der Gleichung (42) die Form geben:

$$3u^2 = (6\lambda + 1)^2 + 2(3\mu + 3\nu + 1)^2 + 18\,(\mu - \nu)^2.$$

Da aber identisch

$$x^2 + 2y^2 = 3 \cdot \left(\left(\frac{x+2y}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x-y}{3}\right)^2\right)$$

ist, geht vorstehende Gleichung in die folgende:

$$u^2 = \big(2\,(\lambda + \mu + \nu) + 1\big)^2 + 2 \cdot (2\lambda - \mu - \nu)^2 + 6 \cdot (\mu - \nu)^2$$

über. Setzt man zur Abkürzung

$$2(\lambda + \mu + \nu) + 1 = l,\ 2\lambda - \mu - \nu = m,\ \mu - \nu = n,$$

so können m, n, da λ, μ, ν nicht alle gleich sind, nicht gleichzeitig verschwinden, und somit folgt

$$u^2 > l^2 \text{ und } \frac{u^2 - l^2}{2} = m^2 + 3n^2. \tag{43}$$

Nun sind u, l ungerade, mithin

$$u^2 - l^2 = (u + l)\,(u - l)$$

durch 8 teilbar, während die Faktoren $u + l$, $u - l$ zwar durch 2, aber nicht zugleich durch 4 teilbar sind. Geht also etwa $u - l$ durch 4 auf, so sind $\frac{u+l}{2}$, $\frac{u-l}{4}$ zwei ganze Zahlen, welche wegen (43) Teiler der Form $m^2 + 3n^2$ sind. Setzt man im besonderen jetzt u als Primzahl voraus, so sind sie auch relativ prim, da ein ihnen gemeinsamer Teiler auch in

$$\frac{u+l}{2} + 2 \cdot \frac{u-l}{4} = u, \quad \frac{u+l}{2} - 2 \cdot \frac{u-l}{4} = l$$

aufgehen müßte, was nicht sein kann, da l numerisch kleiner ist als die Primzahl u. Dann folgt aber aus der Lehre von den quadratischen Formen, daß die Faktoren $\frac{u+l}{2}$, $\frac{u-l}{4}$ selbst von der Form $x^2 + 3y^2$ sein müssen, etwa

$$\frac{u+l}{2} = \alpha^2 + 3\gamma^2, \quad \frac{u-l}{4} = \beta^2 + 3\delta^2$$

und daher ergibt sich schließlich die Gleichung

$$u = \alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2 + 6\delta^2$$

oder der Satz: Jede ungerade Primzahl ist darstellbar in der Form

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2. \tag{44}$$

Die Primzahl 2 ist es ebenfalls, indem man $y = 1$, $x = z = t = 0$ setzt.

Nun besteht aber für die allgemeinere Form

$$x^2 + Ay^2 + Bz^2 + ABt^2$$

der ausgezeichnete Satz, welcher den schon oben angewandten Satz von der Summe zweier Quadrate wesentlich verallgemeinert, daß das Produkt von zwei Ausdrücken dieser Form wieder ein solcher Ausdruck ist, indem die folgende Identität stattfindet:

$$(45) \left\{ \begin{aligned} & (x^2 + Ay^2 + Bz^2 + ABt^2) \\ & \cdot (\xi^2 + A\eta^2 + B\zeta^2 + AB\theta^2) \\ = & (x\xi - Ay\eta - Bz\zeta - ABt\theta)^2 + A\big(x\eta + y\xi + B(z\theta - t\zeta)\big)^2 \\ & + B\big(x\zeta + \xi z + A(t\eta - y\theta)\big)^2 + AB(x\theta + \xi t + y\zeta - z\eta)^2. \end{aligned} \right.$$

Es setzen sich daher auch zwei Ausdrücke (44) durch Multiplikation wieder in einen ebensolchen zusammen. Da aber jede positive ganze Zahl durch Multiplikation aus gewissen Primzahlen entsteht, so erschließt man aus diesen Umständen das allgemeine Ergebnis:

Jede positive ganze Zahl kann in der Form (44) dargestellt werden.

Die Identität

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$$
$$= x^2 + (y + z + t)^2 + (-y + z + t)^2 + (z - 2t)^2$$

lehrt dann weiter, daß jede positive ganze Zahl auch als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar ist.

Die in dieser Nummer hergeleiteten Sätze verdankt man *Jacobi*, der sie zuerst aus einer sehr merkwürdigen Formel der elliptischen Funktionentheorie entnahm. In der Gleichung (167) des 3. Kapitels gaben wir nach *Euler* die Entwickelung des unendlichen Produktes

$$\prod_{h=1}^{\infty}(1 - x^h)$$

in eine Potenzreihe; *Jacobi* aber hat, wie schon in Nr. 10 des vorigen Kapitels bemerkt, im § 66 seiner Fundamenta nova auch die dritte Potenz desselben in eine solche Reihe entwickelt und gewann durch Vergleichung mit der ersteren Entwicklung die Formel:

$$(46) \qquad \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{\frac{3n^2+n}{2}}\right)^3 = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot (2k+1)x^{\frac{k^2+k}{2}},$$

aus welcher der in Formel (41) enthaltene Satz unmittelbar abzulesen war. Ersetzt man darin aber x durch x^{24} und multipliziert beiderseits mit x^3, so nimmt die Formel die andere Gestalt an:

$$(47) \qquad \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{(6n+1)^2}\right)^3 = \sum(-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u x^{3u^2},$$

$$(u > 0, \text{ ungerade})$$

in welcher die Summation zur Rechten sich auf alle positiven ungeraden Zahlen $u = 2k + 1$ erstreckt, und aus ihr entnimmt man den zweiten oben gegebenen Ausspruch (41′) des Satzes. In einer späteren Arbeit (J. f. Math. 21, S. 13) hat dann *Jacobi* den Satz aus elementaren arithmetischen Quellen abgeleitet und die Folgerungen hinzugefügt, die wir vorher aus ihm gezogen.

6. Der wichtige Satz, daß jede positive ganze Zahl in eine Summe von vier Quadratzahlen zerfällbar ist, ist im vorigen nur mit Hilfe der Theorie der quadratischen Formen erhalten worden. Man beweist ihn aber mit viel einfacheren Mitteln nach *Lagrange* ganz ähnlich, wie in Nr. 1 die Zerfällbarkeit jeder Primzahl von der Form $4k+1$ in eine Summe von zwei Quadratzahlen gezeigt worden ist.

Die Grundlage dieses Beweises ist die Bemerkung, daß, wenn p eine ungerade Primzahl, B und C aber Zahlen sind, welche durch p nicht aufgehen, ganze Zahlen x, y vorhanden sind, für welche der Ausdruck

$$x^2 - By^2 - C \tag{48}$$

durch p aufgeht. Dies ist zuerst von *Lagrange* und von *Euler* nachgewiesen worden (*Lagrange* in den Mém. de l'Acad. de Berlin 1770; *Euler* in den Acta Petrop. I, II 1775, s. Comment. arithm. collectae I, S. 538); einen noch elementareren Beweis dafür lieferte *v. Sterneck*, den einfachsten von allen aber *Bolzano* (s. *v. Sterneck*, Monatshefte f. Math. u. Phys., 15. Jhgg. S. 235); diesem schließen wir uns an.

Gibt man nämlich dem Zeichen x alle Werte $0, 1, 2, \ldots, p-1$, so liefert das Quadrat x^2 genau $\frac{p+1}{2}$ (mod. p) inkongruente Zahlen, nämlich Null und die $\frac{p-1}{2}$ quadratischen Reste (mod. p), ebenso gibt der Ausdruck $By^2 + C$, wenn y jene Werte durchläuft, $\frac{p+1}{2}$ inkongruente Zahlen, von denen mindestens eine einer der erstgenannten $\frac{p+1}{2}$ Zahlen kongruent sein muß, da es sonst $p+1$ inkongruente Zahlen (mod. p) gäbe. Für ein gewisses System x, y muß daher

$$x^2 \equiv By^2 + C$$

oder

$$x^2 - By^2 - C \equiv 0 \pmod{p}$$

sein, wie behauptet; auch können dabei die Zahlen x, y nicht beide durch p aufgehen, da C es nicht tut.

Wählt man im besonderen $B = C = -1$, so ist also, allgemeiner gesagt, das Vorhandensein von drei durch p nicht sämtlich teilbaren Zahlen x, y, z bewiesen, für welche $x^2 + y^2 + z^2$ durch p aufgeht, oder noch allgemeiner das Vorhandensein von vier ganzen Zahlen x, y, z, t, die nicht sämtlich durch p aufgehen und für welche

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = p \cdot m \tag{49}$$

(m ganzzahlig) gesetzt werden kann. Nun ist der Ausdruck zur Linken dieser Gleichung ein spezieller Fall der allgemeinen Form

$$x^2 + Ay^2 + Bz^2 + ABt^2,$$

daher schließt man aus dem Satze (45), daß das Produkt aus zwei Summen von vier Quadratzahlen wieder eine solche Summe ist, und kommt nun von der Gleichung (49) aus zum Nachweise einer Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = p$$

für jede ungerade Primzahl p auf völlig analoge Weise, wie wir in Nr. 1 von der Gleichung (2) aus zur Gleichung

$$X^2 + Y^2 = p$$

geführt worden sind. Da nun auch die Zwei als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar ist, nämlich

$$1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 = 2,$$

so folgt durch Multiplikationen mittels des soeben ausgesprochenen Satzes das gleiche auch für jede beliebig zusammengesetzte positive ganze Zahl.

7. Denselben Satz entnehmen wir endlich noch einer dritten Quelle. Fragen wir jetzt nach der Zerfällbarkeit der Zahlen in eine Summe von drei Quadraten oder nach der Möglichkeit der Gleichung

$$(50) \qquad s = x^2 + y^2 + z^2.$$

Setzt man $s = 4^h \cdot s'$, so gibt diese Formel jede positive ganze Zahl, wenn s' alle positiven ungeraden Zahlen und das Doppelte von solchen durchläuft und h die Reihe der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... Ist nun $h > 0$, so müssen x, y, z in der Gleichung

$$(51) \qquad 4^h s' = x^2 + y^2 + z^2$$

gerade sein, denn sonst müßte eine dieser Zahlen gerade, die beiden andern ungerade sein, dann würde aber die linke Seite der Gleichung $\equiv 0$, die rechte $\equiv 2 \pmod{4}$. Setzen wir also $x = 2x'$, $y = 2y'$, $z = 2z'$, so erhalten wir die Gleichung

$$4^{h-1} \cdot s' = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

und können, falls $h - 1$ noch > 0 ist, in gleicher Weise fortfahren. Man gelangt so endlich zu einer Gleichung

$$s' = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Wäre nun s' ungerade, so müßten entweder alle drei Zahlen X, Y, Z ungerade und daher, weil das Quadrat jeder ungeraden Zahl $\equiv 1 \pmod{8}$ ist, s' von der Form $8k + 3$ sein; oder eine der Zahlen

müßte ungerade, die beiden andern gerade sein, und dann ergäbe sich s' von der Form $4k+1$ d. h. von einer der beiden Formen $8k+1$ oder $8k+5$. Demnach ist keine Zahl s' von der Form $8k+7$ und folglich allgemeiner keine Zahl von der Form $4^h \cdot (8k+7)$ in eine Summe von drei Quadratzahlen zerfällbar.

Dagegen ist es jede positive Zahl, welche diese Form nicht hat. Letzteres hat *Gauss* als einen tiefliegenden Satz der Theorie der „ternären quadratischen Formen“ gefunden, auf welche hier nicht eingegangen werden kann, und es ist bisher nicht gelungen, es ohne dieselbe zu begründen.[1] Wir müssen den Satz also hier jener Lehre entnehmen, um ein paar einfache Folgerungen daraus zu ziehen.

Sei zunächst s eine positive Zahl von der Form $4k+2$; nach dem *Gauss*schen Satze gibt es ganze Zahlen x, y, z von der Beschaffenheit, daß

$$(52) \qquad 4k+2 = x^2+y^2+z^2$$

ist, und es müssen zwei dieser Zahlen ungerade, die dritte gerade sein, damit die Summe ihrer Quadrate $\equiv 2 \pmod{4}$ werde. Setzen wir also etwa x, y als ungerade voraus, so geben die Gleichungen

$$x = x'+y', \quad y = x'-y', \quad z = 2z'$$

ganze Werte x', y', z' und aus (52) folgt

$$(53) \qquad 2k+1 = x'^2+y'^2+2z'^2$$

d. h. jede positive ungerade Zahl läßt sich in die Summe von zwei Quadratzahlen und einer zweifachen Quadratzahl zerfällen. Da von den ersten beiden Quadratzahlen offenbar eine gerade, die andere ungerade sein muß, darf man auch sagen: Jede positive ungerade Zahl $2k+1$ kann in die Form gesetzt werden:

$$(53') \qquad 2k+1 = x^2+2y^2+4z^2.$$

Sei zweitens s von der Form $8k+3$, so kann wieder dem *Gauss*schen Satze gemäß

$$(54) \qquad 8k+3 = x^2+y^2+z^2$$

gesetzt werden, worin sämtliche drei Zahlen x, y, z ungerade sein müssen, so daß

$$x = 2x'+1, \quad y = 2y'+1, \quad z = 2z'+1$$

geschrieben werden darf. Die Substitution dieser Werte in (54) liefert dann die folgende Gleichung:

---

1) Mittels sehr einfacher Sätze dieser Theorie bewies es *Dirichlet,* Journ. f. Math. 40, S. 228 oder Journ. des Math. 2 sér. t. 4, S. 233.

(55) $$k = \frac{x'(x'+1)}{2} + \frac{y'(y'+1)}{2} + \frac{z'(z'+1)}{2}$$

d. h. den Satz: Jede positive ganze Zahl kann in die Summe von drei Trigonalzahlen zerfällt werden.

Sei endlich wieder $s = 4^h \cdot s'$, wo s' eine ungerade positive Zahl oder das Doppelte einer solchen bezeichnet, so daß s jede positive ganze Zahl sein kann. Ist s' zunächst ungerade und von der Form $4k+1$, so ist $s' - 2^2 = 4(k-1)+1$, wo nun $4(k-1)+1$, sobald $s' > 1$ ist, eine positive Zahl darstellt, welche dem *Gauss*schen Satze gemäß in die Summe dreier Quadratzahlen zerfällt werden kann; daher kann es s' in die Summe von vier solchen; die Zahl $s' = 1$ kann es offenbar aber auch: $1 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$. Ist zweitens s' von der Form $4k+3$, so ist $s' - 1^2 = 4k+2$ nach dem *Gauss*schen Satze eine Summe von drei, also s' wieder eine Summe von vier Quadratzahlen. Wenn endlich s' das Doppelte einer ungeraden Zahl also von der Form $4k+2$ ist, so ist $s' - 1^2 = 4k+1$ dem *Gauss*schen Satze zufolge eine Summe von drei, also wieder s' eine Summe von vier Quadratzahlen. Da also stets

$$s' = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

gesetzt werden kann, so ergibt sich auch

(56) $$s = X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2,$$

wo

$$X = 2^h x, \quad Y = 2^h y, \quad Z = 2^h z, \quad T = 2^h t,$$

und wir sind aufs neue zu dem Satze gelangt, daß jede positive ganze Zahl in eine Summe von vier Quadratzahlen zerfällbar ist.

Wie die Trigonal- und die Quadratzahlen nur die einfachsten Fälle der sogenannten r-Eckszahlen oder der Polygonalzahlen r^{ter} Ordnung d. i. der Zahlen von der Form

$$n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (r-1), \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

sind, so sind auch die bezüglichen beiden zuletzt ausgesprochenen Sätze nur die einfachsten Fälle eines allgemeinen Satzes, welchen *Fermat*, ohne seinen Beweis desselben zu veröffentlichen, ausgesagt hat. Dieser sogenannte Polygonalzahlensatz besagt: daß jede positive ganze Zahl in eine Summe von r Polygonalzahlen r^{ter} Ordnung zerfällt werden kann. Hierbei können freilich die letzteren, wie auch in den Darstellungen (55) die Trigonal-, in den Darstellungen (56) die Quadratzahlen teilweise Null sein; genauer wäre also zu sagen: „in eine Summe von höchstens r von Null verschiedenen Polygonalzahlen r^{ter} Ordnung“. In diesem Sinne bestimmter hat *Cauchy* den Polygonalzahlensatz dahin gefaßt: daß jede positive ganze Zahl in eine Summe von r Polygonalzahlen r^{ter} Ord-

nung zerfällt werden kann, von denen wenigstens $r-4$ Null oder Eins sind, und er hat von diesem so gefaßten Satze einen schönen (vom Verfasser in seiner Arithmetik der quadratischen Formen dargestellten) Beweis gegeben (Mém. de l'Acad. de France, 1813/15, S. 177, vorgelegt am 13. November 1815), der aber freilich den Trigonalzahlensatz, also auch den *Gauss*schen Satz über die Zerfällbarkeit der Zahlen in eine Summe dreier Quadratzahlen zur Grundlage hat und auf dessen Wiedergabe daher hier verzichtet werden soll, zugleich mit den besonderen Resultaten, durch welche *Legendre* (in seiner théorie des nombres II, 6. partie) ihn vervollständigt hat.

8. Wir haben gesehen, daß jeder der beiden Ausdrücke

$$x^2+y^2+z^2+t^2$$
$$x^2+2y^2+3z^2+6t^2$$

alle positiven ganzen Zahlen darstellen kann. Diese Ausdrücke sind aber spezielle Fälle der allgemeinen Form

$$x^2+Ay^2+Bz^2+ABt^2, \tag{57}$$

und es liegt nahe zu fragen, ob es auch andere Ausdrücke dieser Form gibt, durch welche ebenfalls jede positive ganze Zahl darstellbar ist. (Vgl. hierzu *Liouville*, J. des Math. (2), 1, S. 230). Hierbei dürfen wir $A \overline{\gtrless} B$ voraussetzen. Da nun, sobald auch nur eine der beiden Zahlen z, t nicht verschwindet, der Wert der Form (57) $\overline{\gtrless} B$ ist, müßten die Zahlen unterhalb B durch die Form x^2+Ay^2 darstellbar sein. Ist also $A=1$, so kann B nicht größer als 3 sein, da die Zahl 3 nicht in der Form x^2+y^2 dargestellt werden kann; ist $A=2$, so muß $B \overline{\gtrless} 5$ sein, da sonst 5 durch die Form x^2+2y^2 darstellbar sein müßte, was augenscheinlich nicht der Fall ist. Da ferner der Wert der Form (57), wenn auch nur eine der drei Zahlen y, z, t von Null verschieden ist, $\overline{\gtrless} A$ ist, so müßten alle Zahlen unterhalb A Quadratzahlen sein; daher darf A nicht größer als 2 sein. Somit bleiben nur sieben Kombinationen:

$$A=1,\ B=1,\ 2,\ 3;\quad A=2,\ B=2,\ 3,\ 4,\ 5$$

d. h. die sieben Formen:

$$\begin{array}{ll}
1) & x^2+y^2+z^2+t^2 \\
2) & x^2+y^2+2z^2+2t^2 \\
3) & x^2+y^2+3z^2+3t^2 \\
4) & x^2+2y^2+2z^2+4t^2 \\
5) & x^2+2y^2+3z^2+6t^2 \\
6) & x^2+2y^2+4z^2+8t^2 \\
7) & x^2+2y^2+5z^2+10t^2
\end{array}$$

zu betrachten.

Es soll nachgewiesen werden, daß jede der ersten sechs dieser Formen alle positiven ganzen Zahlen darstellen kann. Da sie spezielle Fälle der Form (57) sind, hat jede von ihnen die Eigenschaft, daß das Produkt aus zwei Formen derselben Art wieder eine ebensolche ist, und deshalb genügt es für den gedachten Zweck zu zeigen, daß jede Primzahl durch sie dargestellt werden kann.

Von dem ersten und fünften Ausdrucke steht es schon fest. Von der Zwei leuchtet es auch für die übrigen ein, da man hierzu bei 2) und 3) nur $x = y = 1$, $z = t = 0$, bei den anderen $x = z = t = 0$, $y = 1$ zu setzen braucht. Durch den Ausdruck 2) ist außerdem jede ungerade Zahl, also auch jede von Zwei verschiedene Primzahl darstellbar, indem man $t = 0$ wählt, da nach (53) voriger Nummer jede ungerade Zahl gleich

$$x^2 + y^2 + 2z^2$$

gesetzt werden kann. — Für den dritten Ausdruck geht dasselbe aus einem Lehrsatze hervor, den *Dirichlet* aus der Theorie der ternären quadratischen Formen entwickelt hat (J. f. Math. 40, S. 228 oder Journ. des Math. (2), 4, S. 233), und nach welchem die Zahl 3 und jede durch 3 nicht teilbare ungerade Zahl, mithin auch alle von 3 verschiedenen ungeraden Primzahlen durch die Form

$$x^2 + y^2 + 3z^2$$

darstellbar sind, also aus 3) hervorgehen, wenn man $t = 0$ wählt. Der Ausdruck 4) stellt jede Primzahl von der Form $4k + 1$ dar, wenn $y = z = 0$ gesetzt wird; da ferner $y^2 + z^2 + 2t^2$ jede ungerade Zahl $2k + 1$ darstellt, so ergibt $2y^2 + 2z^2 + 4t^2$ jede Zahl von der Form $4k + 2$, somit der Ausdruck 4), wenn $x = 1$ gewählt wird, jede Zahl und insbesondere auch jede Primzahl von der Form $4k + 3$. — Der Ausdruck 6) endlich stellt nach (53') jede ungerade Zahl, also auch jede ungerade Primzahl dar, wenn $t = 0$ gewählt wird. —

9. Unsere Untersuchungen über die Zerfällbarkeit der Zahlen in Summen von zwei, drei oder vier Quadratzahlen haben ergeben, daß zwar jede positive ganze Zahl in eine Summe von vier, aber nicht jede solche Zahl in eine Summe von weniger als vier Quadratzahlen zerfällt werden kann. Schon *Waring* hat die allgemeine Vermutung ausgesprochen (Meditat. algebraicae ed. 3. Cambridge 1782, S. 349/50), daß auch bei Potenzen höheren Grades zur Darstellung jeder ganzen Zahl als Summe solcher Potenzen stets eine feste Anzahl derselben ausreichend sei. Wir wollen unter dieser Annahme durch das Zeichen

$$N_m$$

die **kleinste** Anzahl von positiven m^{ten} Potenzen bezeichnen, welche genügt, um jede positive ganze Zahl als Summe solcher Potenzen darzustellen, so daß zwar jede solche Zahl

in N_m aber nicht jede in weniger als N_m m^{te} Potenzen zerfällt werden kann. Durch die voraufgehenden Betrachtungen ist dann festgestellt, daß

$$N_2 = 4 \tag{58}$$

ist.

Man hat bereits versucht, den Wert der Zahl N_m auch für den Fall höherer Potenzen zu ermitteln. Wenngleich dies bisher noch nicht einmal für den Wert $m = 3$ völlig gelungen ist, so sind doch die erzielten Ergebnisse und die zu diesem Zwecke angestellten Betrachtungen interessant genug, um ihre Darstellung an dieser Stelle zu rechtfertigen.

Wir handeln zunächst von der Darstellung einer Zahl s als Summe vierter Potenzen oder von Biquadraten. Für diese hat schon *Liouville* gezeigt, daß eine feste Höchstzahl N von Biquadraten vorhanden ist, welche gewiß ausreicht, daß alle positiven ganzen Zahlen in N oder weniger Biquadrate zerfällbar sind, und er hat dafür den Wert N = 53 angegeben. Nach ihm hat *Realis* diese Schranke auf 47, *Lucas* auf 45, später sogar auf 41, *Albert Fleck* demnächst auf 39 erniedrigt. Dann hat *E. Landau* gezeigt, daß N = 38, endlich *A. Wieferich*, daß N = 37 gesetzt werden darf.[1])

Zur Grundlage dieser Untersuchungen dient die Identität

$$\begin{aligned} &6 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 \\ &= (x+y)^4 + (x-y)^4 + (x+z)^4 + (x-z)^4 + (x+t)^4 + (x-t)^4 \\ &+ (y+z)^4 + (y-z)^4 + (y+t)^4 + (y-t)^4 + (z+t)^4 + (z-t)^4. \end{aligned} \tag{59}$$

Da jede positive ganze Zahl n als Summe von vier Quadratzahlen

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

darstellbar ist, lehrt diese Identität, daß das Sechsfache jeder Quadratzahl in eine Summe von 12 Biquadratzahlen zerfällbar ist.[2]) Folglich ist es die Summe

1) *Liouville*'s nur mündlich im Collège de France vorgetragener Beweis findet sich dargestellt in *Lebesgue*'s Exercices d'analyse numérique, 1859, S. 113/15. *Realis* s. Note sur un théorème d'arithmétique, Nouv. corresp. math. 4 (1878), S. 209/10; *Lucas* ebendas. S. 323/25 und Nouv. Annal. (2) 17 (1878), S. 536/37; *A. Fleck*, Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. 5 (1906), S. 2/9; *Landau*, Rendic. circ. math. Palermo 23 (1907), S. 1/6; *Wieferich* Math. Annal. 66 (1908), S. 106.

2) Man kann genauer folgendermaßen sagen: Für jede positive ganze Zahl n gibt es zwölf ganze Zahlen von der Beschaffenheit, daß $6n$ die Summe ihrer Quadrate und zugleich $6n^2$ die Summe ihrer Biquadrate ist. Setzt man nämlich

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

so folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2n &= (x+y)^2 + (x-y)^2 + (z+t)^2 + (z-t)^2 \\ 2n &= (x+z)^2 + (x-z)^2 + (y+t)^2 + (y-t)^2 \\ 2n &= (x+t)^2 + (x-t)^2 + (y+z)^2 + (y-z)^2 \end{aligned}$$

mithin

$$6(X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2)$$

d. h. das Sechsfache jeder positiven ganzen Zahl N in eine Summe von 48 Biquadratzahlen. Da nun jede positive ganze Zahl s gleich $6N + r$ gesetzt werden kann, wo r, wenn nicht Null, eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, d. h. in ebensoviel Biquadrate Eins zerfällbar ist, so wird, wie *Liouville* es ausgesagt hat, jede solche Zahl in höchstens 53 Biquadrate zerfällbar sein. Aber diese Schranke ist zu hoch.

Um es zu zeigen, ziehen wir zunächst mit *Landau* aus der Identität (59) eine einfache Folgerung. Setzt man $z = t$, so geht sie in die andere über:

$$\begin{aligned} &6(x^2 + y^2 + 2z^2)^2 \\ (60) \qquad &= (x+y)^4 + (x-y)^4 + 2(x+z)^4 + 2(x-z)^4 \\ &\quad + 2(y+z)^4 + 2(y-z)^4 + (2z)^4. \end{aligned}$$

Da nun $x^2 + y^2 + 2z^2$ jede ungerade Zahl u darstellt, so schließt man, daß das Sechsfache $6u^2$ jeden **ungeraden** Quadrates in eine Summe von 11 Biquadraten zerfällbar ist. Dasselbe gilt für das 16-fache dieses Produktes, d. i. für das Produkt $24 \cdot 4u^2$.

Da nun nach dem *Gauss*schen Satze (s. Nr. 7) jede positive ganze Zahl, welche (mod. 8) einen der Reste 1, 2, 3, 5, 6 läßt, in die Summe dreier Quadratzahlen zerfällbar ist, unter denen mindestens eine ungerade sein muß, so wird jede der Zahlen

$$(61) \qquad \begin{cases} 6 \cdot (8k+1) = 48k + 6 \\ 6 \cdot (8k+2) = 48k + 12 \\ 6 \cdot (8k+3) = 48k + 18 \\ 6 \cdot (8k+5) = 48k + 30 \\ 6 \cdot (8k+6) = 48k + 36 \end{cases}$$

in höchstens $11 + 12 + 12 = 35$ Biquadratzahlen zerfällbar sein. Bei den Zahlen $8k + 2$ und $8k + 6$ sind sogar zwei der drei Quadrate, in welche sie sich zerfällen lassen, bei den Zahlen $8k + 3$ alle drei Quadrate ungerade; genauer sind also die Zahlen $48k + 12$ und $48k + 36$ in höchstens $11 + 11 + 12 = 34$, die Zahlen $48k + 18$ in höchstens $11 + 11 + 11 = 33$ Biquadrate zerfällbar.

$$\begin{aligned} &6n \\ &= (x+y)^2 + (x-y)^2 + (x+z)^2 + (x-z)^2 + (x+t)^2 + (x-t)^2 \\ &\quad + (y+z)^2 + (y-z)^2 + (y+t)^2 + (y-t)^2 + (z+t)^2 + (z-t)^2, \end{aligned}$$

während zugleich nach (59)

$$\begin{aligned} &6n^2 \\ &= (x+y)^4 + (x-y)^4 + (x+z)^4 + (x-z)^4 + (x+t)^4 + (x-t)^4 \\ &\quad + (y+z)^4 + (y-z)^4 + (y+t)^4 + (y-t)^4 + (z+t)^4 + (z-t)^4 \end{aligned}$$

ist.

Um die Sache für die übrigen Linearformen $48k + r$ zu ermitteln, stellen wir zunächst nachstehende Tabelle auf:

Tabelle.

	Anzahl der Biquadrate
$48k = [48(k-4)+30] + 3^4 + 3^4$	37
$48k + 1 = [48k + 1]$	36
$48k + 2 = [48(k-1)+18] + 2^4 + 2^4$	35
$48k + 3 = [48(k-2)+18] + 3^4$	34
$48k + 4 = [48(k-1)+36] + 2^4$	35
$48k + 5 = [48(k-1)+36] + 1^4 + 2^4$	36
$48k + 6 = [48k + 6]$	35
$48k + 7 = [48k + 6] + 1^4$	36
$48k + 8 = [48k + 6] + 1^4 + 1^4$	37
$48k + 9 = [48k + 9]$	35
$48k + 10 = [48k + 9] + 1^4$	36
$48k + 11 = [48k + 9] + 1^4 + 1^4$	37
$48k + 12 = [48k + 12]$	34
$48k + 13 = [48k + 12] + 1^4$	35
$48k + 14 = [48k + 12] + 1^4 + 1^4$	36
$48k + 15 = [48(k-2)+30] + 3^4$	36
$48k + 16 = [48(k-2)+30] + 1^4 + 3^4$	37
$48k + 17 = [48k + 1] + 2^4$	37
$48k + 18 = [48k + 18]$	33
$48k + 19 = [48k + 18] + 1^4$	34
$48k + 20 = [48k + 18] + 1^4 + 1^4$	35
$48k + 21 = [48(k-2)+36] + 3^4$	35
$48k + 22 = [48k + 6] + 2^4$	36
$48k + 23 = [48k + 6] + 1^4 + 2^4$	37
$48k + 24 = [48(k-3)+6] + 3^4 + 3^4$	37
$48k + 25 = [48k + 25]$	35
$48k + 26 = [48k + 25] + 1^4$	36
$48k + 27 = [48k + 25] + 1^4 + 1^4$	37
$48k + 28 = [48k + 12] + 2^4$	35
$48k + 29 = [48k + 12] + 1^4 + 2^4$	36
$48k + 30 = [48k + 30]$	35
$48k + 31 = [48k + 30] + 1^4$	36
$48k + 32 = [48k + 30] + 1^4 + 1^4$	37
$48k + 33 = [48k + 33]$	36
$48k + 34 = [48k + 18] + 2^4$	34
$48k + 35 = [48k + 18] + 1^4 + 2^4$	35
$48k + 36 = [48k + 36]$	34

$48k + 37 = [48\ k + 36] = 1^4$	35
$48k + 38 = [48\ k + 36] + 1^4 + 1^4$	36
$48k + 39 = [48(k-1) + 6] + 3^4$	36
$48k + 40 = [48(k-1) + 6] + 1^4 + 3^4$	37
$48k + 41 = [48\ k + 25] + 2^4$	36
$48k + 42 = [48\ k + 25] + 1^4 + 2^4$	37
$48k + 43 = [48(k-1) + 9] + 1^4 + 3^4$	37
$48k + 44 = [48\ k + 12] + 2^4 + 2^4$	36
$48k + 45 = [48(k-1) + 12] + 3^4$	35
$48k + 46 = [48\ k + 30] + 2^4$	36
$48k + 47 = [48\ k + 30] + 1^4 + 2^4$	37

Denkt man in der ersten Gleichung dieser Tabelle $k \geqq 4$, in den übrigen $k \geqq 3$, so stellen die Zahlen zur Linken alle ganzen Zahlen $\geqq 145$ dar, andererseits sind die zur Rechten eingeklammerten Bestandteile positive ganze Zahlen. Mit Rücksicht nun auf die für die Zahlen von den fünf Formen (61) zuvor angegebene Höchstzahl von Biquadraten ergibt sich für diejenigen Zahlen der Tabelle, in denen der eingeklammerte Bestandteil der rechten Seite von einer der Formen (61) ist, die jedesmal am Rande hinzugefügte Zahl als Höchstzahl der Biquadrate, deren sie zu ihrer Zerfällung bedürfen.

10. Was die noch übrigen Linearformen anbelangt, so beweisen wir zuvörderst zwei Hilfssätze.

I. Die Zahlen von einer der Formen $48k + 1$ und $48k + 33$ sind in 36 oder weniger Biquadrate zerfällbar.

Ist nämlich s eine Zahl der ersten Form, so finden sich die Gleichungen

$$(62)\quad \begin{cases} s - \ \ 1^4 = 24 \cdot 2k \\ s - \ \ 5^4 = 24 \cdot (2k - 26) \\ s - \ \ 7^4 = 24 \cdot (2k - 100) \\ s - 13^4 = 24 \cdot (2k - 1190), \end{cases}$$

ebenso für eine Zahl s der zweiten Form die folgenden:

$$(63)\quad \begin{cases} s - \ \ 3^4 = 24 \cdot (2k - 2) \\ s - \ \ 9^4 = 24 \cdot (2k - 272) \\ s - 15^4 = 24 \cdot (2k - 2108) \\ s - 21^4 = 24 \cdot (2k - 8102). \end{cases}$$

Damit die betrachteten Differenzen positiv seien, setzen wir $s > 21^4$ voraus. Nun lassen in jedem dieser Systeme von Gleichungen die vier in 24 multiplizierten Zahlen insgesamt (mod. 8) die Reste 0, 2,

4, 6, je eine von ihnen also den Rest 6, und diese ist darstellbar in der Form

$$x^2 + y^2 + 4u^2,$$

worin u eine ungerade Zahl. Demnach ist ihr 24-faches gleich

$$6 \cdot (2x)^2 + 6 \cdot (2y)^2 + 24 \cdot 4u^2$$

und somit in höchstens $12 + 12 + 11 = 35$, die Zahl s also in höchstens 36 Biquadrate zerfällbar. Damit der behauptete Satz allgemeine Gültigkeit habe, bedarf es also nur noch, ihn auch für Zahlen der betrachteten Formen unterhalb der Grenze 21^4 zu erweisen. Ist nun allgemein s irgendeine Zahl $\overline{\gtrless} 21^4$ und x_1^4 das größte, s nicht übertreffende Biquadrat unterhalb 21^4, so ist, da das Intervall x_1^4 bis $(x_1 + 1)^4$ sicher nicht größer als $21^4 - 20^4$ ist, die Differenz

$$s_1 = s - x_1^4 \overline{\gtrless} 21^4 - 20^4 = 34481 = 13^4 + 5920 < 14^4.$$

Liegt also s_1 über 13^4, so ist die Differenz zwischen s_1 und dem größten, s_1 nicht übertreffenden Biquadrate x_2^4 kleiner als 5920; ist aber $s_1 < 13^4$, so ist jene Differenz $< 13^4 - 12^4 = 7825$; jedenfalls ist mithin

$$s_2 = s_1 - x_2^4 < 7825 = 9^4 + 1264 < 10^4.$$

Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man im ganzen folgende Ungleichheiten:

$$\begin{aligned}
s_1 &= s - x_1^4 \overline{\gtrless} 34481 \\
s_2 &= s_1 - x_2^4 < 7825 \\
s_3 &= s_2 - x_3^4 < 2465 \\
s_4 &= s_3 - x_4^4 < 1105 \\
s_5 &= s_4 - x_5^4 < 480 \\
s_6 &= s_5 - x_6^4 < 224 \\
s_7 &= s_6 - x_7^4 < 143 \\
s_8 &= s_7 - x_8^4 < 65 \\
s_9 &= s_8 - x_9^4 < 49 \\
s_{10} &= s_9 - x_{10}^4 < 33 \\
s_{11} &= s_{10} - x_{11}^4 < 17 \\
s_{12} &= s_{11} - x_{12}^4 < 15
\end{aligned}$$

also

$$s = s_{12} + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \cdots + x_{12}^4$$

d. i. gleich einer Summe von höchstens 14 Biquadraten Eins und noch 12 anderen, zusammen also gleich einer Summe von höchstens 26 Biquadraten.

II. Die Zahlen von einer der beiden Formen $48k + 9$ und $48k + 25$ sind in 35 oder weniger Biquadrate zerfällbar.

Ist s zunächst eine Zahl der ersteren Form, so finden sich die Gleichungen

$$(64)\quad \begin{cases} s - 3^4 = 24(2k - 3) \\ s - 9^4 = 24(2k - 273) \\ s - 15^4 = 24(2k - 2109) \\ s - 21^4 = 24(2k - 8103) \\ s - 27^4 = 24(2k - 22143) \\ s - 33^4 = 24(2k - 49413) \\ s - 39^4 = 24(2k - 96393) \\ s - 45^4 = 24(2k - 170859). \end{cases}$$

Desgleichen für Zahlen s von der zweiten Form diese anderen:

$$(65)\quad \begin{cases} s - 1^4 = 24(2k + 1) \\ s - 5^4 = 24(2k - 25) \\ s - 7^4 = 24(2k - 99) \\ s - 11^4 = 24(2k - 609) \\ s - 13^4 = 24(2k - 1189) \\ s - 17^4 = 24(2k - 3479) \\ s - 23^4 = 24(2k - 11659) \\ s - 29^4 = 24(2k - 29469). \end{cases}$$

Damit die betrachteten Differenzen positiv seien, setzen wir $s > 45^4$ voraus. Man überzeugt sich nun leicht, daß die in 24 multiplizierten Zahlen alle Glieder eines reduzierten Restsystems (mod. 16) darstellen und daß folglich in jedem der beiden Systeme von Gleichungen je eine dieser Zahlen den Rest 13 (mod. 16) läßt oder von der Form $16h + 13$ ist. Jede Zahl von dieser Form ist aber, da sie $\equiv 5$ (mod. 8), als eine Summe dreier Quadratzahlen darstellbar und zwar, wie aus den Resten der Quadratzahlen leicht zu ersehen ist, in der Gestalt

$$16h + 13 = (4x)^2 + 4u^2 + u'^2,$$

worin u ungerade und $u' \equiv \pm 3$ (mod. 8) ist. Daraus folgt

$$(66)\qquad 24 \cdot (16h + 13) = 6 \cdot (8x)^2 + 24 \cdot 4u^2 + 24u'^2$$

und, da

$$u' = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

und

$$24(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^2$$
$$= 2(z_1 + z_2 + z_3)^4 + 2(-z_1 + z_2 + z_3)^4 + 2(z_1 - z_2 + z_3)^4 + 2(z_1 + z_2 - z_3)^4 + (2z_1)^4 + (2z_2)^4 + (2z_3)^4$$

gesetzt werden darf, zugleich aber $6 \cdot (8x)^2$ in höchstens 12, $24 \cdot 4u^2$ in höchstens 11 Biquadrate zerfällbar ist, so lehrt die Gleichung (66), daß $24(16h + 13)$ als Summe von höchstens $12 + 11 + 11 = 34$, demnach

also die Zahl s als Summe von höchstens 35 Biquadraten dargestellt werden kann. Diese für alle Zahlen s der gedachten beiden Formen oberhalb der Grenze 45^4 geltende Ergebnis bleibt aber auch richtig für Zahlen unterhalb derselben. Bezeichnet nämlich x_1^4 das größte, s nicht übertreffende Biquadrat $< 45^4$, so ist

$$s_1 = s - x_1^4 \overline{\gtrless} 45^4 - 44^4 = 352529 = 24^4 + 18753 < 25^4.$$

Liegt demnach s_1 über 24^4, so ist der Unterschied zwischen s_1 und dem größten, s_1 nicht übertreffenden Biquadrate x_2^4 kleiner als 18753, andernfalls kleiner als $24^4 - 23^4 = 51935$, jedenfalls ist also

$$s_2 = s_1 - x_2^4 < 51935 < 16^4.$$

Von jeder Zahl $< 21^4$ ist aber zuvor gezeigt, daß sie in höchstens 26 Biquadrate zerfällbar ist, und somit ist es s in höchstens 28. Der Satz II ist also jetzt vollständig erwiesen.

Übersieht man aber nun mit Rücksicht auf die beiden Hilfssätze die oben aufgestellte Tabelle, so erhält man sofort für die noch übrigen Linearformen die am Rande angemerkten Höchstanzahlen der für sie erforderlichen Biquadrate. Demnach lehrt dann diese Tabelle, daß jede positive ganze Zahl $\overline{\gtrless} 145$ zu ihrer Zerfällung in Biquadrate deren höchstens 37 erfordert, und da dasselbe für alle Zahlen $< 145 < 21^4$ schon erwiesen wurde, gilt dies Ergebnis allgemein, man erhält mit andern Worten die Ungleichheit

$$N_4 \overline{\gtrless} 37. \tag{67}$$

Die genaue Bestimmung der Zahl N_4 steht noch aus; schwerlich wird sie durch die gefundene obere Schranke gegeben, da, soweit bisher Versuche in dieser Hinsicht gemacht sind, für jede Zahl schon höchstens 19 Biquadrate als ausreichend befunden worden sind.

11. Die Frage nach der erforderlichen Anzahl positiver Kubikzahlen, um jede positive ganze Zahl als Summe von solchen darzustellen, ist bereits von *Waring* (Meditat. algebr. 3. Aufl. Cambridge 1782, S. 349) aufgeworfen und für die Zahlen bis 3000 praktisch geprüft worden, später von *Jacobi* (J. für Math. 42, S. 41), der durch den bekannten Rechner *Dahse* eine Tabelle herstellen ließ, welche die kleinste Anzahl der Kubikzahlen anzeigte, in welche je die Zahlen bis 12000 zerfällbar sind. Nach einer sehr interessanten Methode hat dann *v. Sterneck* (Wiener Sitzungsberichte 112, IIa, S. 1627) eine solche bis zur Zahl 40000 reichende Tabelle berechnet. Aus den so erhaltenen Ergebnissen geht hervor, daß bis zu jener Grenze höchstens 9 Kubikzahlen zur Zerfällung einer Zahl erforderlich sind, daß ferner nur die zwei Zahlen 23 und 239 wirklich 9, 15 andere 8 solcher Kubikzahlen bedürfen, sowie, daß über die Zahl 8042 hinaus nie mehr als 6 Kubikzahlen erforderlich sind. Hiernach schien 9 die kleinste erforderliche Anzahl zu sein, und in der Tat hat, nachdem

schon *E. Maillet* (assoc. franc. pour l'avanc. des sciences, Bordeaux 1895) die Höchstzahl 17 dafür gefunden, welche darauf durch *Fleck* (Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. 5, 1906, S. 2) auf 13 erniedrigt wurde, in neuester Zeit *Wieferich* (Math. Ann. 66, 1908, S. 95) den strengen Nachweis versucht, daß $N_3 = 9$ sei. Da aber dieser Beweis als noch nicht ganz vollständig zu bezeichnen ist, so erscheint es uns angezeigt, die scharfsinnigen Betrachtungen *Maillet*s, zumal sie von ihm auch weiterhin verwandt worden sind, hier nicht zu unterdrücken.

Die gestellte Frage zu beantworten, erheischt kompliziertere Betrachtungen wie im vorigen Falle, weil hier eine Identität fehlt, welche, wie bei den Biquadraten, zugrunde gelegt werden könnte. Die *Maillet*sche Betrachtung beruht auf folgendem Hilfssatze:

Sind α, α' zwei positive ungerade und teilerfremde Zahlen, welche den Bedingungen

$$\alpha < \alpha' < \frac{\alpha^2}{8} \tag{68}$$

Genüge leisten, und bezeichnet n irgendeine ganze Zahl zwischen den Grenzen $8\alpha\alpha'$ und α'^3:

$$8\alpha\alpha' \overline{\gtrless} n \overline{\gtrless} \alpha'^3, \tag{69}$$

so kann

$$n = \alpha m + \alpha' m' \tag{70}$$

gesetzt werden, wo m, m' positive ganze Zahlen bedeuten, die in die Summe von drei Quadratzahlen zerfällbar sind und die Ungleichheiten

$$m < \alpha^2, \; m' < \alpha'^2 \tag{71}$$

erfüllen.

Um dies zu beweisen, betrachte man die $8\alpha'$ nach (69) positiven ganzen Zahlen

$$n, \; n - \alpha, \; n - 2\alpha, \; \ldots, \; n - (8\alpha' - 1)\alpha. \tag{72}$$

Da α zu 2 und zu α', also auch zu $8\alpha'$ teilerfremd ist, so bilden diese Zahlen ein vollständiges Restsystem (mod. $8\alpha'$) und folglich sind acht unter ihnen durch α' teilbar. Ist $k\alpha$ das kleinste Vielfache von α, für welches

$$\frac{n - k\alpha}{\alpha'} = k'$$

eine ganze Zahl wird, so bezeichnet $h\alpha$, wenn

$$h = k + i\alpha', \text{ und } i = 0, 1, 2, \ldots, 7 \tag{73}$$

gesetzt wird, die sämtlichen Vielfachen dieser Art, und ihnen entsprechen die Werte

$$\frac{n - h\alpha}{\alpha'} = h' = k' - i\alpha \text{ für } i = 0, 1, 2, \ldots, 7. \tag{74}$$

Sowohl diese Zahlen als auch die Zahlen (73) bilden aber ein vollständiges Restsystem (mod. 8). Da nun die Zahlen von der

Form $4^a(8h+7)$, welche, wie wir wissen, nicht in die Summe dreier Quadratzahlen zerfällbar sind, nur einen der Reste 7, 4, 0 (mod. 8) ergeben, je nachdem $a = 0$, 1 oder > 1 ist, so müssen unter den Zahlen (73) mindestens 5 sich befinden, welche jene Form nicht haben, und ebenso müssen unter den diesen fünf Zahlen (73) entsprechenden fünf Zahlen (74) mindestens zwei sein, die gleichfalls jene Form nicht haben. Demnach gibt es mindestens zwei Paare zusammengehöriger Zahlen h, h', die beide jene Form nicht haben. Ein beliebiges von ihnen nennen wir m, m'; diese Zahlen sind dann dem *Gauss*schen Satze zufolge in die Summe von drei Quadratzahlen zerfällbar. Zudem ist m, wie jede der Zahlen (73), kleiner als $8\alpha'$ d. i. nach (68) kleiner als α^2, desgleichen

$$m' = \frac{n - m\alpha}{\alpha'}$$

nach (69) kleiner als $\alpha'^2 - \frac{m\alpha}{\alpha'} < \alpha'^2$, und endlich ist

$$n = m\alpha + m'\alpha',$$

also der Hilfssatz bewiesen.

12. Setzt man nun

$$m = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ m' = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2,$$

so ergeben sich wegen (71) die Ungleichheiten

$$x_i < \alpha,\ x_i' < \alpha' \text{ (für } i = 1, 2, 3)$$

und folglich bezeichnet der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{3}[(\alpha + x_i)^3 + (\alpha - x_i)^3] + \sum_{i=1}^{3}[(\alpha' + x_i')^3 + (\alpha' - x_i')^3]$$

eine Summe von 12 positiven Kubikzahlen. Dieser Ausdruck ist aber entwickelt gleich

$$\begin{aligned} &6\alpha^3 + 6\alpha'^3 + 6\alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 6\alpha'(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) \\ &= 6\alpha^3 + 6\alpha'^3 + 6(\alpha m + \alpha' m') = 6\alpha^3 + 6\alpha'^3 + 6n. \end{aligned}$$

Setzt man demnach

$$N = \alpha^3 + \alpha'^3 + n,$$

so bedeutet N jede Zahl, welche den Ungleichheiten

$$\alpha^3 + \alpha'^3 + 8\alpha\alpha' \overline{\gtrless} N \overline{\gtrless} \alpha^3 + 2\alpha'^3 \tag{75}$$

Genüge leistet, und das Sechsfache jeder solchen Zahl ist gleich einer Summe von 12 positiven Kubikzahlen.

Hierbei dürfen wir nun $\alpha' = \alpha + 2$ voraussetzen, da dann nicht nur die Ungleichheiten (68) erfüllt, sondern auch α, α' ungerade und teilerfremd sind, sobald nur α selbst als ungerade Zahl $\overline{\gtrless} 11$ gedacht wird. Das für N zulässige Intervall wird dann nach (75) durch die Ungleichheiten

$$\alpha^3 + (\alpha + 2)^3 + 8\alpha(\alpha + 2) \overline{\gtrless} N \overline{\gtrless} \alpha^3 + 2(\alpha + 2)^3 \tag{76}$$

bestimmt. Ersetzt man darauf α durch $\alpha + 2$, so gilt das zuvor Bewiesene für alle Zahlen N des neuen, durch die Ungleichheiten

$$(\alpha + 2)^3 + (\alpha + 4)^3 + 8(\alpha + 2)(\alpha + 4) \overline{\gtrless} N \overline{\gtrless} (\alpha + 2)^3 + 2(\alpha + 4)^3$$

bestimmten Intervalls usw. Kann man nun durch passende Wahl der anfänglichen Zahl α es erreichen, daß diese aufeinanderfolgenden Intervalle ineinander übergreifen, d. h. daß für jedes α von einer gewissen Grenze ω an

$$(77) \qquad (\alpha + 2)^3 + (\alpha + 4)^3 + 8(\alpha + 2)(\alpha + 4) < \alpha^3 + 2(\alpha + 2)^3$$

ausfällt, so wird das zuvor Bewiesene gültig sein für alle Zahlen N, welche über der unteren Grenze der Ungleichheiten (76) für $\alpha = \omega$ liegen. Die vorige Ungleichheit vereinfacht sich zur folgenden:

$$\alpha^3 - 14\alpha^2 - 84\alpha - 120 > 0.$$

Da nun die Gleichung

$$\alpha^3 - 14\alpha^2 - 84\alpha - 120 = 0$$

nur eine positive Wurzel hat, welche zwischen 18 und 19 liegend befunden wird, so ist die Ungleichheit sicher erfüllt für jedes $\alpha \overline{\gtrless} 19$. Somit besteht das Bewiesene für alle Zahlen

$$N \overline{\gtrless} 19^3 + 21^3 + 8 \cdot 19 \cdot 21 = 19312,$$

d. h. das Sechsfache jeder Zahl oberhalb dieser Grenze ist einer Summe von 12 positiven Kubikzahlen gleich. Da aber jede Zahl s oberhalb der Grenze $6 \cdot 19312 = 115872$ die Form

$$(78) \qquad s = 6N + r$$

hat, in welcher $N \overline{\gtrless} 19312$ und r, wenn nicht Null, eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 also in höchstens fünf Kubikzahlen Eins zerfällbar ist, so ersieht man zunächst, daß jede ganze Zahl oberhalb 115872 in eine Summe von höchstens 17 positiven Kubikzahlen zerfällt.

Ist $s \overline{\gtrless} 40000$, so bedarf es nach der Tabelle von *v. Sterneck* höchstens 9 solcher Kubikzahlen. Liegt s aber zwischen 40000 und 115872, welch letztere Zahl zwischen den Kubikzahlen 48^3 und 49^3 enthalten ist, so ist der Unterschied zwischen s und dem größten unterhalb s liegenden Kubus x^3 sicher kleiner als $49^3 - 48^3 = 7057$:

$$s - x^3 < 7057,$$

also zerfällt s nach jener Tabelle in höchstens 10 Kubikzahlen.

Hierdurch ist schließlich festgestellt, daß jede positive ganze Zahl s in höchstens 17 positive Kubikzahlen zerfällbar ist.

Indessen erniedrigt sich diese Zahl durch eine einfache Bemerkung *Flecks* sofort auf 13. Da nämlich, wenn r in der Formel (78) von Null verschieden ist, stets $r^3 \equiv r \pmod{6}$, nämlich

$1 = 1^3,\ 2 = 2^3 - 1 \cdot 6,\ 3 = 3^3 - 4 \cdot 6,\ 4 = 4^3 - 10 \cdot 6,\ 5 = 5^3 - 20 \cdot 6$

ist, so läßt sich (78) auch schreiben, wie folgt:

$$s = 6N' + r^3,$$

wo N' höchstens um 20 Einheiten kleiner ist als N. Nun zerfällt nach dem oben Bewiesenen $6N'$, wenn $N' \overline{\gtrless} 19312$, also gewiß, wenn $N \overline{\gtrless} 19332$ ist, in 12, und demnach jede Zahl s oberhalb

$$6 \cdot 19332 = 115992$$

in höchstens 13 positive Kubikzahlen. Da bezüglich der Zahlen unterhalb dieser Grenze dasselbe gilt, wie unterhalb der früheren Grenze 115872, so leuchtet die Richtigkeit der *Fleck*schen Bemerkung ein.

13. War hierdurch nachgewiesen, daß N_3 jedenfalls nicht größer als 13 ist, so geben wir nunmehr *A. Wieferichs* Beweis dafür wieder, daß $N_3 = 9$ ist. Seine Methode beruht wesentlich auf der Bemerkung, daß für irgendwelche Zahlen A, x_1, x_2, x_3

$$\sum_{i=1}^{3}[(A + x_i)^3 + (A - x_i)^3] = A\left(6A^2 + 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right) \tag{79}$$

ist. Demzufolge stellt sich, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet, welche als Summe dreier Quadratzahlen:

$$n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

darstellbar ist, und wenn zugleich $n < A^2$, also x_1, x_2, x_3 numerisch kleiner als A sind, die Zahl

$$A \cdot (6A^2 + 6n) \tag{80}$$

als Summe von 6 positiven Kubikzahlen dar. Daher erweist sich jede Zahl s als eine Summe von höchstens 9 positiven Kubikzahlen darstellbar, wenn gezeigt werden kann, daß bei geeigneter Wahl positiver ganzer Zahlen A und $n < A^2$, von denen n als Summe dreier Quadrate darstellbar ist,

$$s = a^3 + b^3 + c^3 + A(6A^2 + 6n) \tag{81}$$

gesetzt werden kann.

Jedenfalls kann dies nur zutreffen für Zahlen s, welche $\overline{\gtrless} 6A^3$. Verstehen wir nun unter C eine positive Konstante und unter p eine positive Zahl, die zur Vereinfachung als Primzahl gedacht werde, so gibt es für jede positive Zahl s, welche $> C \cdot p^3$, einen ganz bestimmten positiven Exponenten ν von der Beschaffenheit, daß

$$C \cdot p^{3\nu} < s \overline{\gtrless} C \cdot p^{3(\nu+1)} \tag{82}$$

ist. Setzt man nun

$$s_i = s - i^3$$

und $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$, so erhält man eine Reihe unbegrenzt abnehmender ganzer Zahlen

$$s, s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, \tag{83}$$

die wir nur soweit fortsetzen wollen, als sie positiv sind d. h. solange $i < s^{\frac{1}{3}}$. Der Unterschied je zwei aufeinanderfolgender dieser Zahlen:

$$s_{i-1} - s_i = 3i^2 - 3i + 1$$

ist kleiner als $3i^2 < 3 \cdot s^{\frac{2}{3}} < 3 \cdot \sqrt[3]{C^2} \cdot p^{2(\nu+1)}$ oder, wenn

$$\frac{3 \cdot \sqrt[3]{C^2}}{p^{\nu-2}} = k \tag{84}$$

gesetzt wird, kleiner als $k \cdot p^{3\nu}$. Wählt man daher i so, daß s_i noch größer, s_{i+1} aber schon kleiner ist als $C \cdot p^{3\nu}$, so liegen in dem Intervalle $C \cdot p^{3\nu}$ und $(C + 2k)p^{3\nu}$ mindestens die zwei Zahlen s_i und s_{i-1}. Von ihnen wird gewiß eine durch p nicht teilbar sein, wenn es ihr Unterschied nicht ist, d. h. wenn die Kongruenz

$$3i^2 - 3i + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

keine Wurzel hat. Sei dann

$$s_a = s - a^3$$

die gedachte der beiden Zahlen s_i, s_{i-1}. Setzt man ferner voraus, daß $\varphi(p^\nu) = p^{\nu-1} \cdot (p-1)$ kein Vielfaches von 3, so wird jede durch p nicht teilbare Zahl kubischer Rest von p^ν sein. Denn alsdann hat die Kongruenz

$$x^3 \equiv 1 \pmod{p^\nu}$$

nur die eine Wurzel $x \equiv 1$, da jede ihrer Wurzeln auch die Kongruenz

$$x^{\varphi(p^\nu)} \equiv 1 \pmod{p^\nu}$$

erfüllen müßte, der größte gemeinsame Teiler der Exponenten 3 und $\varphi(p^\nu)$ aber die Eins ist. Werden daher die $\varphi(p^\nu)$ Glieder eines reduzierten Restsystems (mod. p^ν) zur dritten Potenz erhoben, so geben sie wieder ein ganzes reduziertes Restsystem, denn, wären zwei solche Kuben einander kongruent:

$$\alpha^3 \equiv \beta^3 \pmod{p^\nu},$$

so ergäbe sich durch Multiplikation mit dem Kubus des Sozius β' von β die Kongruenz

$$(\alpha\beta')^3 \equiv 1 \pmod{p^\nu}$$

d. h. $\alpha\beta' \equiv 1$ oder $\alpha \equiv \beta$, was gegen Voraussetzung ist. Jede durch p nicht teilbare Zahl muß also, weil einer Zahl des reduzierten Restsystems (mod. p^ν) kongruent, auch Rest einer Kubikzahl (mod. p^ν) sein.

Erfüllt demnach p die beiden ausgesprochenen Voraussetzungen, so darf man setzen

$$s_a \equiv b^3 \pmod{p^\nu}$$

also auch

$$s \equiv a^3 + b^3 \pmod{p^\nu}, \tag{85}$$

wobei b eine Zahl $< p^\nu$.

Wir genügen diesen Voraussetzungen durch die Wahl $p = 5$, denn ebensowenig geht $\varphi(5^\nu) = 5^{\nu-1} \cdot 4$ durch 3, wie

$$3i^2 - 3i + 1$$

durch 5 auf, wie immer auch i gewählt wird. Wählt man dann mit *Wieferich* gleichzeitig $C = 7{,}4$, so ergibt sich aus (84) für jeden Wert $\nu \gtreqless 3$

$$k < 2,\ 3$$

und aus dem bereits Bewiesenen die Tatsache, daß für jeden solchen Wert von ν eine Zahl a so gewählt werden kann, daß eine Kongruenz (85) erfüllt und s_a zwischen $7{,}4 \cdot 5^{3\nu}$ und $(7{,}4 + 2 \cdot 2{,}3) \cdot 5^{3\nu} = 12 \cdot 5^{3\nu}$ gelegen ist. Daraus folgen dann weiter die Ungleichheiten:

$$6{,}4 \cdot 5^{3\nu} < s_a - b^3 < 12 \cdot 5^{3\nu}$$

also, wenn

$$s_a - b^3 = 5^\nu \cdot q \tag{86}$$

gesetzt wird

$$6{,}4 \cdot 5^{2\nu} < q < 12 \cdot 5^{2\nu}.$$

Schreibt man ferner

$$q = 6 \cdot 5^{2\nu} + r, \tag{87}$$

so wird

$$0{,}4 \cdot 5^{2\nu} < r < 6 \cdot 5^{2\nu}. \tag{88}$$

14. Da aber

$$s = a^3 + b^3 + 5^\nu \cdot (6 \cdot 5^{2\nu} + r) \tag{89}$$

ist, wird s, wenn $A = 5^\nu$ gewählt wird, wo dann, da nach (82) $s > 7{,}4 \cdot 5^{3\nu}$ vorausgesetzt ist, die notwendige Bedingung $s \gtreqless 6 \cdot A^3$ erfüllt wird, die gewünschte Form (81) erhalten, falls

$$5^\nu \cdot r = c^3 + 5^\nu \cdot 6n$$

gesetzt werden kann, unter n eine positive ganze Zahl verstanden, welche in drei Quadrate zerfällbar und $< 5^{2\nu}$ ist. Hierzu müßte c^3

durch 5^ν teilbar sein. Setzt man $c = 5^\lambda \cdot \gamma$, wo γ nicht mehr durch 5 aufgehe, so müßte also $3\lambda \gtreqless \nu$ oder $3\lambda = \mu + \nu$ und

$$r = 5^\mu \cdot \gamma^3 + 6n \tag{90}$$

sein, wo zudem $\mu < 3$ vorausgesetzt werden kann, da jedes etwa darin enthaltene Vielfache von 3 eine dritte Potenz ergibt, die zum Faktor γ^3 hinzugezogen werden kann. Es fragt sich also, ob durch passende Wahl der Zahl $\mu = 0, 1, 2$ der Gleichung (90) genügt werden kann, ohne daß n die Form $4^\alpha(8k + 7)$ der Zahlen erhält, die nicht in drei Quadrate zerfällbar sind. Die Sechsfachen der letztgenannten Zahlen haben aber eine der Linearformen

$$96h,\ 96h + 42,\ 96h + 72,\ 96h + 90.$$

Es genügt daher, wenn $6n$ eine der Linearformen

$$96h + 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 48,\ 54,\ 60,\ 66,\ 78,\ 84$$

annimmt. Daß dies stets erreicht werden kann, lehren die nachstehenden von *Wieferich* berechneten Tabellen, die für jeden möglichen Rest der Zahl r (mod. 96) eine Zahl γ angeben, welche für $6n$ eine dieser Linearformen liefert.

I. Wenn $\nu \equiv 0$ (mod. 3), $\mu = 0$ ist.

γ	r											
0	6	12	18	24	30	36	48	54	60	66	78	84
1	7	13	19	25	31	37	49	55	61	67	79	85
2	14	20	26	32	38	44	56	62	68	74	86	92
3	33	39	45	51	57	63	75	81	87	93	9	15
4	70	76	82	88	94	4	16	22	28	34	46	52
5	35	41	47	53	59	65	77	83	89	95	11	17
6	42	72	90									
7	73	91	43									
8	50	80	2									
9	69	21	27									
10	58	64	10									
11	5	23	71									
13	1											
14	8											
15	3											
17	29											
18	0											
22	40											

II. Wenn $\nu \equiv 1 \pmod{3}$, $\mu = 2$ ist.

γ	r											
0	6	12	18	24	30	36	48	54	60	66	78	84
1	31	37	43	49	55	61	73	79	85	91	7	13
2	14	20	26	32	38	44	56	62	68	74	86	92
3	3	9	15	21	27	33	45	51	57	63	75	81
4	70	76	82	88	94	4	16	22	28	34	46	52
5	59	65	71	77	83	89	5	11	17	23	35	41
6	42	72	90									
7	67	1	19									
8	50	80	2									
9	87	93	39	69								
10	58	64	10									
11	95	29	47									
13	25											
14	8											
17	53											
18	0											
22	40											

III. Wenn $\nu \equiv 2 \pmod{3}$, $\mu = 1$ ist.

γ	r											
0	6	12	18	24	30	36	48	54	60	66	78	84
1	11	17	23	29	35	41	53	59	65	71	83	89
2	46	52	58	64	70	76	88	94	4	10	22	28
3	45	51	57	63	69	75	87	93	3	9	21	27
4	38	44	50	56	62	68	80	86	92	2	14	20
5	55	61	67	73	79	85	1	7	13	19	31	37
6	42	72	90									
7	95	5	47									
8	82	16	34									
9	15	33	81									
10	26	32	74									
11	43	49	91									
13	77											
14	40											
15	39											
17	25											
18	0											
22	8											

Der größte Wert, den $5^\mu \cdot \gamma^3$ nach diesen Tabellen erhält, beträgt $5^\mu \cdot 22^3$. Mit Rücksicht auf die Grenzen (88) für r wird daher mit Sicherheit ein positiver Wert für $6n$ nur dann aus (90) hervorgehen, wenn

$$5^\mu \cdot 22^3 < 0{,}4 \cdot 5^{2\nu}$$

d. h.

$$10648 < 0{,}4 \cdot 5^{2\nu-\mu}$$

ist. Dies findet in der Tat statt, sobald $\nu \gtreqless 4$ ist.[1]) Wenn aber $\nu = 3$, also die erste Tabelle anzuwenden ist, so tritt der Wert $5^\mu \cdot 22^3 = 22^3$ nur bei den Zahlen $r = 96h + 40$ auf. Für die übrigen ist der größte Wert, den $5^\mu \cdot \gamma^3$ erhält,

$$18^3 < 0{,}4 \cdot 5^6$$

und somit $6n$ positiv.

15. Was nun die Zahlen $r = 96h + 40$ anbelangt, bemerke man folgendes. Da $r - 4^3 = 96h - 24 = 6 \cdot 4(4h-1)$ ist, erhalten wir eine Gleichung von der Form (90), wenn nur $4h - 1$ nicht von der Form $8k + 7$ d. h. $h = 2h_1$ ist. Tritt dieser Fall aber ein, so hat r die Form $192h_1 + 40$. Alsdann findet sich

$$r - 10^3 = 192h_1 - 960 = 6 \cdot 4^2 \cdot (2h_1 - 10)$$

mithin eine Gleichung von der Form (90), es sei denn $2h_1 - 10$ von der Form $4^\alpha \cdot (8k+7)$ d. h.

$$r = 1000 + 6 \cdot 4^{\alpha+2} \cdot (8k+7),$$

wobei $\alpha > 0$. Eine solche Zahl ist aber nur dann kleiner als 22^3, wenn $\alpha = 1$ und $k = 0, 1, 2$ ist, und erhält dann die Werte

$$3688,\ 6760,\ 9832,$$

und es finden sich für $6 \cdot 5^{2\nu} + r = 6 \cdot 5^6 + r$ die Werte

$$97438 = 45^3 + 16^3 + 2 \cdot 10^3 + 6^3 + 1^3$$

$$100510 = 46^3 + 2 \cdot 11^3 + 8^3$$

$$103582 = 46^3 + 17^3 + 11^3 + 2 \cdot 1^3$$

d. h. die entsprechende Zahl

$$s = a^3 + b^3 + 5^3(6 \cdot 5^6 + r)$$

ist in höchstens acht positive Kubikzahlen zerfällbar. Von diesen drei besonderen Fällen abgesehen wäre aber stets die Gleichung (90) in der verlangten Weise erfüllbar und somit jede Zahl s, für welche die Bedingungen

$$\nu \gtreqless 3;\ 7{,}4 \cdot 5^{3\nu} < s \lesseqgtr 7{,}4 \cdot 5^{3(\nu+1)}$$

erfüllt sind, d. h. aber jede Zahl $s > 7{,}4 \cdot 5^9$ in höchstens neun Kubikzahlen zerfällbar, welche positiv sind, da nach (90) $6n < r < 6 \cdot 5^{2\nu}$ d. i. $n < (5^\nu)^2$ ist.

1) So sagt *Wieferich* aus. Aber für $\nu = 4 \equiv 1$ (mod. 3) ist $\mu = 2$, $2\nu - \mu = 6$ und $10648 > 0{,}4 \cdot 5^6$; also bleibt hier eine Lücke.

Für alle Zahlen $s \leqq 40000$ steht dasselbe durch die *v. Sterneck*sche Tabelle fest. Ist endlich

$$40000 < s < 7{,}4 \cdot 5^9,$$

so läßt sich, wie aus den anfänglichen Bemerkungen hervorgeht, eine Zahl i so wählen, daß zwar $s - i^3$ noch über, dagegen $s - (i+1)^3$ schon unter einer die Grenze 40000 nicht übersteigenden Zahl, etwa 10000, liegt und dann die Ungleichheiten

$$10000 < s' < 3 \cdot s^{\frac{2}{3}} + 10000,$$

in denen $s' = s - i^2$ gesetzt ist, bestehen. Desgleichen kann dann eine Zahl i' so gewählt werden, daß wenn $s'' = s' - i'^2$ gesetzt wird,

$$10000 < s'' < 3 \cdot s'^{\frac{2}{3}} + 10000$$

also a fortiori kleiner als

$$3 \cdot \left(3 \cdot s^{\frac{2}{3}} + 10000\right)^{\frac{2}{3}} + 10000 < 3 \cdot \left(3 \cdot \sqrt[3]{7{,}4^2} \cdot 5^6 + 10000\right)^{\frac{2}{3}} + 10000$$

also < 20000 wird. Da aber nach der *v. Sterneck*schen Tabelle jede Zahl zwischen 10000 und 20000 in höchstens sechs Kuben zerfällbar ist, so ist's

$$s = i^2 + i'^2 + s''$$

in höchstens acht.

Schließlich ergibt sich also, daß jede positive ganze Zahl in höchstens neun positive Kubikzahlen zerfällbar ist. Aber nicht jede ist es in acht Kubikzahlen, da 23 und 239 deren neun bedürfen. Demnach ist

$$N_3 = 9. \tag{91}$$

Im Anschluß an *Wieferichs* Ergebnis und mit Benutzung transzendenter Hilfsmittel, des sogenannten „Primzahlsatzes“, ist es ferner noch *E. Landau* gelungen (Math. Ann. 66 (1908), S. 102), zu zeigen, daß für jede Zahl s oberhalb einer gewissen Schranke sogar acht Kubikzahlen zu ihrer Zerfällung in Kuben ausreichend sind, wodurch die an der *v. Sterneck*schen Tabelle beobachtete Tatsache als durchgängig zutreffend erwiesen ist.

16. In einer späteren Arbeit (quelques extensions du théorème de *Fermat* sur les nombres polygones, J. des Math. (5) 2, 1896, S. 363) hat *E. Maillet* seine Methode von Kubikzahlen auf allgemeinere Ausdrücke dritten Grades d. i. auf gewisse Funktionen

$$\varphi(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

mit ganzen (allgemeiner rationalen) Koeffizienten erweitert und den Satz bewiesen, daß es auch für solche eine feste, nur von den Koeffizienten a_i des Ausdrucks abhängige Höchstzahl N gibt von der Beschaffenheit, daß jede ganze Zahl s oberhalb

einer gewissen Grenze als eine Summe von höchstens N Werten des Ausdrucks $\varphi(x)$:

$$s = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \cdots + \varphi(x_N)$$

darstellbar ist. Durch Spezialisierung des Ausdrucks $\varphi(x)$ gelangt man so zu dem besonderen Satze: daß jede ganze Zahl oberhalb 19272 in eine Summe von höchstens zwölf Pyramidalzahlen d. i. von Zahlen von der Form

$$\frac{(x-1)x(x+1)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{x^3-x}{6}$$

zerfällbar ist.

Diese Betrachtungen lassen sich, wie *Maillet* a. a. O. (s. auch Intermédiaire des Math. 1904, S. 293) ferner auf Grund von Hilfssätzen, welche auch dem *Cauchy*schen Beweise von *Fermat*s Polygonalzahlensatze zugrunde liegen, gezeigt hat, auch für ähnliche ganze Funktionen

$$\varphi(x) = ax^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$$

vom fünften Grade durchführen, und ergeben für die Zerfällbarkeit einer ganzen Zahl in Summen von Werten einer solchen Funktion den ganz entsprechenden Satz, nämlich den Nachweis einer Höchstzahl N der dazu ausreichenden Summanden. Insbesondere genügen nach *E. Maillet* stets 192 fünfte Potenzen, um jede Zahl in eine Summe solcher Potenzen zu zerfällen, und man hat folglich

$$N_5 \overline{\gtrless} 192. \tag{92}$$

Indessen ist der wahre Wert dieser Zahl vermutlich viel geringer und nahezu 37.

Einen weiteren Schritt in dieser Richtung, nämlich die Untersuchung der gleichen Frage für sechste Potenzen, verdankt man *Fleck* (Math. Ann. 63, S. 561). Zwar hatte sich schon *Laisant* (recueil de problèmes de mathématique, S. 125 Nr. 407) darum bemüht, doch ohne Ergebnis, da er sich auf eine angebliche von *Lucas* aufgestellte Identität stützte, die leicht als falsch erkannt wird. Statt ihrer leitete *Fleck* die folgende richtige Identität ab:

$$\begin{cases} 60\cdot(a^2+b^2+c^2+d^2)^3 \\ = (a+b+c)^6 + (a-b+c)^6 + (a+b-c)^6 + (a-b-c)^6 \\ + (a+b+d)^6 + (a-b+d)^6 + (a+b-d)^6 + (a-b-d)^6 \\ + (a+c+d)^6 + (a-c+d)^6 + (a+c-d)^6 + (a-c-d)^6 \\ + (b+c+d)^6 + (b-c+d)^6 + (b+c-d)^6 + (b-c-d)^6 \\ + 2(a+b)^6 + 2(a-b)^6 + 2(a+c)^6 + 2(a-c)^6 \\ + 2(a+d)^6 + 2(a-d)^6 + 2(b+c)^6 + 2(b-c)^6 \\ + 2(b+d)^6 + 2(b-d)^6 + 2(c+d)^6 + 2(c-d)^6 \\ + 36a^6 + 36b^6 + 36c^6 + 36d^6. \end{cases} \tag{93}$$

Zu ihrer Rechten zählt man

$$16 + 2 \cdot 12 + 36 \cdot 4 = 184$$

sechste Potenzen, während links der 60-fache Kubus irgendeiner positiven ganzen Zahl n steht, da jede solche als Summe von vier Quadraten:

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

darstellbar ist. Demnach ist der 60-fache Kubus jeder positiven ganzen Zahl als eine Summe von höchstens 184 sechsten Potenzen darstellbar. Da nun anderseits nach *Wieferich* jede positive ganze Zahl N als Summe von höchstens neun positiven Kubikzahlen dargestellt werden kann, so ist das 60-fache jeder Zahl N in eine Summe von höchstens $9 \cdot 184 = 1656$ sechsten Potenzen zerfällbar, endlich also jede positive ganze Zahl

$$s = 60N + r,$$

wo r als eine der Zahlen 0, 1, 2, ..., 59 in höchstens 59 sechste Potenzen Eins zerfällt, als eine Summe von höchstens

$$1656 + 59 = 1715$$

sechsten Potenzen darstellbar. Hieraus ergibt sich die Formel

$$N_6 \overline{\overline{<}} 1715 \tag{94}$$

doch ist jedenfalls die so gewonnene Schranke viel zu hoch.[1])

Das Vorhandensein einer Höchstzahl N für den Fall achter Potenzen erwies zuerst *Maillet* (Bull. Soc. math. de France 36, 1908, S. 69; Comptes Rendus de l'Acad. 30. 12. 1907). Einfacher stellte *Hurwitz* (Math. Ann. 65, S. 424) sie fest auf Grund einer der Identität (93) entsprechenden Formel für die Potenz $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$. Ihr zufolge ist

$$5040 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

gleich einem Ausdrucke von der Form

$$6 \cdot \sum_{i=1}^{4} x_i^8 + 60 \cdot \sum_{i=1}^{12} y_i^8 + \sum_{i=1}^{48} z_i^8 + 6 \cdot \sum_{i=1}^{8} u_i^8,$$

in welchem die x_i, y_i, z_i, u_i ganzzahlige lineare Funktionen von a, b, c, d vorstellen, und aus welchem in gleicher Weise wie zuvor und auf Grund des *Wieferich*schen Satzes über die Darstellung einer Zahl als Summe von Biquadraten zu folgern ist, daß jede positive ganze Zahl als Summe von höchstens

$$37 \cdot (6 \cdot 4 + 60 \cdot 12 + 1 \cdot 48 + 6 \cdot 8) + 5039 = 36\,119$$

achter Potenzen darstellbar, folglich

$$N_8 \overline{\overline{<}} 36\,119 \tag{95}$$

ist.

---

1) Auf Grund von *Fleck*s Höchstzahl 13 findet sich $N_6 \overline{\overline{<}} 2451$.

Aus einem von *J. Schur* für

$$22\,680(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^5$$

gegebenen Ausdrucke (Math. Ann. 66, S. 105) als Summe von zehnten Potenzen folgt, wenn man *Maillet*s Satz über die Zerfällung der Zahlen in eine Summe von fünften Potenzen zu Hilfe nimmt, in gleicher Weise der Umstand, daß auch hier eine feste Höchstzahl zehnter Potenzen ausreicht, um jede Zahl als Summe solcher Potenzen darzustellen. So war die einst von *Waring* ausgesprochene Vermutung wenigstens bis zu den zehnten Potenzen einschließlich bestätigt. Neuerdings ist es *Hilbert* gelungen, sie allgemein zu bewahrheiten (Nachr. d. Gött. Ges. d. W., 6. 2. 1909), doch verbietet sich die Wiedergabe seines noch ziemlich komplizierten Beweises dieser Tatsache im Rahmen unseres Werkes, da er analytischer Hilfsmittel höherer Art bedarf.

Übrigens hat *Maillet* sowohl wie *Hurwitz* (a. a. O.) diesem Ergebnisse noch die weitere Bemerkung hinzugefügt, daß es unendlich viel positive ganze Zahlen gibt, die nicht als Summe von n oder weniger als n Potenzen n^{ten} Grades darstellbar sind, mit anderen Worten: daß die Anzahl $A(s)$ der Lösungen der Gleichung

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = s$$

in nicht negativen ganzen Zahlen x_i für unendlich viel Zahlen s Null sei.

17. Wir kehren nun zu den quadratischen Formen in Nr. 8 wieder zurück, von denen gezeigt worden, daß sie jede positive ganze Zahl darzustellen vermögen. Hier drängt sich von selbst die Frage auf, wieviel verschiedener Darstellungen eine gegebene Zahl durch jede derselben fähig ist. Ihrer Natur nach der allgemeinen Theorie der quaternären quadratischen Formen angehörig, in welcher sie ihre systematische Beantwortung findet, kann diese Frage doch auch für die besonderen Formen, um die es sich handelt, auf einfachere Weise durch besonders geeignete Methoden erledigt werden. Wir zeigen es zunächst für die erste der Formen, nämlich für die Summe von vier Quadraten:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2. \tag{96}$$

Mit Bezug auf diese Form hat zuerst *Jacobi* den Satz gefunden, daß die Anzahl der Zergliederungen des Vierfachen einer ungeraden Zahl u in vier Quadrate positiver ungerader Zahlen x, y, z, t gleich der Summe der Teiler von u, in Zeichen:

$$N(4u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = \zeta_1(u) \tag{97}$$

ist, wo wir uns des *Liouville*schen Symbols $\zeta_1(u)$ für die gedachte Summe der Teiler bedienen. *Jacobi* entnahm ursprünglich diesen Satz der folgenden analytischen Gleichheit:

$$\Big(\sum_{u \text{ pos., unger.}} x^{u^2}\Big)^4 = \sum \zeta_1(u) \cdot x^{4u},$$

welche er durch Vergleichung der zwei Formeln (35) S. 106 und (7) S. 184 seiner fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum erhalten, gab aber dann später (J. für Math. 12, S. 167) auch eine rein arithmetische Herleitung desselben. Der letzteren hat *Dirichlet* (J. des Math. (2) 1, S. 210) eine sehr elegante Darstellung gewidmet, die in ihrer eigentümlichen Grundlage zugleich den Keim für weitere, sehr fruchtbare Untersuchungen enthält, von denen wir Kenntnis nehmen müssen. Es folge also zunächst hier der *Dirichlet*sche Beweis.

Bei jeder Darstellung von $4u$:

$$(98) \qquad 4u = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

in ungeraden Zahlen ist sowohl $u_1^2 + u_2^2$ als $u_3^2 + u_4^2$ das Doppelte einer positiven ungeraden Zahl:

$$(99) \qquad u_1^2 + u_2^2 = 2u', \quad u_3^2 + u_4^2 = 2u''$$

und demgemäß

$$(100) \qquad 2u = u' + u''.$$

Alle jene Darstellungen von $4u$ entstehen also offenbar, wenn man $2u$ nach vorstehender Gleichung in zwei positive ungerade Summanden u', u'' zerfällt und das Doppelte derselben auf alle Weise nach den Formeln (99) als Summe zweier Quadrate notwendig ungerader positiver Zahlen darstellt. Auf solche Weise entsteht aber gewiß auch stets eine Darstellung von $4u$ von der gedachten Art. Da nun nach Nr. 2 die Anzahl der bezeichneten Darstellungen der Zahlen u', u'' resp.

$$\varrho(u') = \sum_{u'=d'\delta'} (-1)^{\frac{d'-1}{2}}, \quad \varrho(u'') = \sum_{u''=d''\delta''} (-1)^{\frac{d''-1}{2}}$$

beträgt, so ist die Anzahl der Darstellungen (98), welche einer bestimmten Zerfällung (100) entsprechen, gleich $\varrho(u') \cdot \varrho(u'')$, und demnach die gesamte Anzahl A der Darstellungen (98) gleich der über alle Zerfällungen (100) erstreckten Summe jener Produkte, d. h.

$$(101) \; A = \sum \Big(\sum (-1)^{\frac{d'-1}{2}} \cdot \sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \Big) = \sum (-1)^{\frac{d'-1}{2} + \frac{d''-1}{2}} = \sum (-1)^{\frac{d'-d''}{2}},$$

wenn die letzte, eigentlich dreifache Summation sich auf alle möglichen Zerfällungen der Zahl $2u$ von der Form

$$(102) \qquad 2u = d'\delta' + d''\delta''$$

mit positiven ungeraden Zahlen d', δ', d'', δ'' erstreckt.

Unterscheiden wir diese Zerfällungen in zwei Klassen: in diejenigen, bei welchen $d' = d''$, und in die anderen, bei denen d', d'' voneinander verschieden sind. Bei den ersteren ist der gemeinsame Wert d von

d', d'' ein beliebiger ungerader Teiler von $2u$, d. i. irgendein Teiler von u; setzt man demgemäß $u = d\delta$, so nimmt die Gleichung (100) die Gestalt

$$2\delta = \delta' + \delta''$$

an und lehrt, daß es entsprechend dem Teiler d genau δ solcher Zerfällungen, entsprechend den sämtlichen Teilern von u also

$$\sum \delta = \zeta_1(u)$$

solcher Zerfällungen gibt. Da aber für jede von ihnen $(-1)^{\frac{d'-d''}{2}} = 1$ ist, liefern die Zerfällungen der ersten Klasse für A den Gesamtbeitrag $\zeta_1(u)$.

Die Zerfällungen der zweiten Klasse lassen sich paarweise zusammenfassen, da es mit jeder Zerfällung (102) zugleich stets auch die Zerfällung

$$2u = d''\delta'' + d'\delta'$$

gibt, welche von jener verschieden ist, sobald d', d'' verschieden sind; ihnen entsprechen die gleichen Beiträge

$$(-1)^{\frac{d'-d''}{2}}, \quad (-1)^{\frac{d''-d'}{2}}$$

zur Summe A; man darf sich daher auf diejenigen Zerfällungen der zweiten Klasse beschränken, bei welchen $d' > d''$ ist, wenn man nur deren Beiträge verdoppelt. Sei also $d' > d''$ in (102). Unter dieser Voraussetzung können die Zerfällungen aber noch wieder zu je zweien verbunden werden, und in der Weise, wie dies geschieht, besteht das Prinzip der *Dirichlet*schen Methode. Schreibt man die Gleichung (102) in der Form:

(103) $$2u = (d' - d'')\delta' + (\delta' + \delta'')d'',$$

so ist, wenn

(104) $$\begin{cases} d_1 = \delta' + (\theta + 1)(\delta' + \delta''), & d_2 = \delta' + \theta(\delta' + \delta'') \\ \delta_1 = d'' - \theta(d' - d''), & \delta_2 = (\theta + 1)(d' - d'') - d'' \end{cases}$$

gesetzt wird,

(105) $$d_1 - d_2 = \delta' + \delta'', \quad \delta_1 + \delta_2 = d' - d''$$

und

$$\begin{aligned} 2u &= (d' - d'')d_1 - (\delta' + \delta'')\delta_2 \\ &= (\delta_1 + \delta_2)d_1 + (d_2 - d_1)\delta_2 = d_1\delta_1 + d_2\delta_2. \end{aligned}$$

Man gelangt also durch die Substitution (104) von der Zerfällung (102), in welcher $d' > d''$, zu einer zweiten Zerfällung

$$2u = d_1\delta_1 + d_2\delta_2,$$

in welcher wegen (105) auch $d_1 > d_2$ und wegen (104) alle Elemente d_1, δ_1, d_2, δ_2 ungerade ganze Zahlen sind, wenn θ als ganze Zahl

gedacht wird; sollen sie aber auch positiv sein, so bestimmt sich θ eindeutig den Bedingungen

$$d'' - \theta(d' - d'') > 0, \quad (\theta + 1)(d' - d'') - d'' > 0$$

gemäß, d. h.

$$\theta = \left[\frac{d''}{d' - d''}\right].$$

Diese zweite Zerfällung ist verschieden von der ersten, denn, wären sie gleich, so ergäbe sich aus (105)

$$d' - d'' = \delta' + \delta'',$$

mithin nach (103)

$$2u = (d' - d'')\ (\delta' + d''),$$

was nicht möglich ist, da die linke Seite nur durch 2, die rechte Seite als Produkt zweier geraden Zahlen durch 4 teilbar ist. Ginge man nun von dieser zweiten Zerfällung d_1, δ_1, d_2, δ_2 durch eine mit den Formeln (104) analoge Substitution aus, um eine weitere Zerfällung derselben Art zu erhalten, so müßte, wie gezeigt, das zugehörige θ als eine eindeutig bestimmte Zahl, nämlich gleich $\left[\frac{d_2}{d_1 - d_2}\right]$ d. i. nach (104) gleich dem früheren θ gewählt werden. Da aber aus der Auflösung der Gleichungen (104) die Formeln

$$d' = \delta_1 + (\theta + 1)\ (\delta_1 + \delta_2), \quad d'' = \delta_1 + \theta\ (\delta_1 + \delta_2)$$
$$\delta' = d_2 - \theta\ (d_1 - d_2), \qquad \delta'' = (\theta + 1)\ (d_1 - d_2) - d_2$$

von der gedachten Beschaffenheit hervorgehen, so erkennt man, daß man auf solche Weise nur zu der ursprünglichen Zerfällung zurückgeführt würde. Hiernach sind also stets zwei verschiedene Zerfällungen der gedachten Art umkehrbar miteinander verknüpft. Ihre Beiträge zur Summe A aber zerstören einander, denn aus (103) folgt die Kongruenz

$$1 \equiv \frac{d' - d''}{2} + \frac{\delta' + \delta''}{2} \pmod{2}$$

d. i. wegen (105)

$$1 \equiv \frac{d' - d''}{2} + \frac{d_1 - d_2}{2} \pmod{2},$$

mithin ist

$$(-1)^{\frac{d' - d''}{2}} + (-1)^{\frac{d_1 - d_2}{2}} = 0.$$

Da hiernach in der Summe zur Rechten der Gleichung (101) die Beiträge der Zerfällungen zweiter Klasse sich heben, der gesamte Beitrag der Zerfällungen erster Klasse aber bereits gleich $\zeta_1(u)$ gefunden war, erhält man, wie der *Jacobi*sche Satz behauptet, die Gleichung

$$A = \zeta_1(u).$$

18. Aus jeder Darstellung

$$4u = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$
$$(u_i \text{ pos., unger.})$$

entstehen 16 Darstellungen, wenn man die Vorzeichen der Größen u_i auf alle mögliche Weise wählt. Demnach geht die Formel hervor:

$$(97\text{a}) \qquad N(4u = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) = 16 \cdot \zeta_1(u).$$
$$(u_i \text{ unger.})$$

Suchen wir allgemeiner die Anzahl

$$N(4u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$$

bei beliebiger Beschaffenheit der ganzzahligen Elemente x, y, z, t. Hierzu bemerken wir zuvörderst, daß aus jeder Darstellung

$$(106) \qquad u = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \theta^2$$

der ungeraden Zahl u, in welcher notwendig

$$\xi + \eta + \zeta + \theta$$

eine ungerade Zahl sein muß, zwei verschiedene Darstellungen der Zahl $4u$ in ungeraden Zahlen u_i:

$$(107) \qquad 4u = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

entstehen, indem einmal

$$(108) \qquad \begin{cases} u_1 = \xi + \eta + \zeta + \theta, & u_2 = \xi + \eta - \zeta - \theta \\ u_3 = \xi - \eta + \zeta - \theta, & u_4 = \xi - \eta - \zeta + \theta \end{cases}$$

ein zweites Mal

$$(109) \qquad \begin{cases} u_1 = -\xi + \eta + \zeta + \theta, & u_2 = \xi - \eta + \zeta + \theta \\ u_3 = \xi + \eta - \zeta + \theta, & u_4 = \xi + \eta + \zeta - \theta \end{cases}$$

gesetzt wird; umgekehrt gewinnt man aus jeder Darstellung (107) in ungeraden u_i, für welche notwendig

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

eine gerade Zahl ist, mittels der Gleichungen (108), falls diese Zahl durch 4 aufgeht, entgegengesetztenfalls mittels der Gleichungen (109) eine Zerfällung (106) der Zahl u, deren Elemente

$$\xi = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4}, \qquad \eta = \frac{u_1 + u_2 - u_3 - u_4}{4}$$

$$\zeta = \frac{u_1 - u_2 + u_3 - u_4}{4}, \qquad \theta = \frac{u_1 - u_2 - u_3 + u_4}{4}$$

resp.

$$\xi = \frac{-u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4}, \qquad \eta = \frac{u_1 - u_2 + u_3 + u_4}{4}$$

$$\zeta = \frac{u_1 + u_2 - u_3 + u_4}{4}, \qquad \theta = \frac{u_1 + u_2 + u_3 - u_4}{4}$$

sind. Da hiernach die Darstellungen (106) der Zahl u und die Darstellungen (107) der Zahl $4u$ einander ein- zweideutig zugeordnet sind, so ergibt sich

$$N(4u = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) = 2 \cdot N(u = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \theta^2)$$
$$u_i \text{ unger.}$$

d. h. die Anzahl der Zergliederungen einer **ungeraden** Zahl u in vier Quadratzahlen beträgt

(110) $$N(u = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \theta^2) = 8 \cdot \zeta_1(u).$$

Weil jedoch aus jeder Darstellung (106) eine Darstellung

$$4u = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2$$

der Zahl $4u$ in geraden Zahlen hervorgeht und umgekehrt, darf man auch schreiben:

(111) $$N(4u = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2) = 8 \cdot \zeta_1(u),$$
$$(g_i \text{ gerade})$$

und weil in jeder Darstellung

(112) $$4u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

entweder alle Elemente x, y, z, t ungerade oder alle gerade sein müssen, damit die rechte Seite $\equiv 0 \pmod{4}$ werde, findet sich schließlich aus den Formeln (97a) und (111) zusammen der Satz:

Die Anzahl aller Zergliederungen des Vierfachen einer ungeraden Zahl u in vier Quadratzahlen beträgt

(113) $$N(4u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = 24 \cdot \zeta_1(u).$$

Ebenso groß ist die Anzahl aller Zergliederungen für die Zahl $2u$:

(114) $$N(2u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = 24 \cdot \zeta_1(u).$$

In der Tat folgt aus jeder Darstellung (112) die Gleichung

$$8u = (x+y)^2 + (x-y)^2 + (z+t)^2 + (z-t)^2$$

d. i. eine Darstellung

$$2u = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z+t}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-t}{2}\right)^2$$

der Zahl $2u$, da, wie schon bemerkt, die Zahlen x, y, z, t entweder sämtlich gerade oder sämtlich ungerade, mithin die Elemente der Darstellung ganze Zahlen sind; umgekehrt aber findet sich aus jeder Darstellung

$$2u = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \theta^2$$

eine Darstellung

$$4u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

wenn

$$x = \xi + \eta,\ y = \xi - \eta,\ z = \zeta + \theta,\ t = \zeta - \theta$$

gesetzt wird.

Man bemerke endlich, daß eine Gleichung

$$2^h \cdot u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \tag{115}$$

falls $h > 2$, die linke Seite also $\equiv 0 \pmod{8}$ ist, nur bestehen kann, wenn sämtliche Elemente x, y, z, t gerade sind. Setzt man dann also

$$x = 2x',\ y = 2y',\ z = 2z',\ t = 2t',$$

so folgt aus (115) die Gleichung

$$2^{h-2} \cdot u = x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2,$$

auf welche die gleiche Bemerkung Anwendung findet, falls $h - 2$ noch > 2 ist. Man wird daher durch Fortsetzung dieser Betrachtung von der Gleichung (115), je nachdem h gerade $= 2k + 2$ oder ungerade $= 2k + 1$ ist, zu einer Gleichung

$$4u = X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2$$

oder

$$2u = X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2$$

geführt; da umgekehrt je nach den beiden genannten Fällen aus der ersten oder zweiten dieser Gleichungen, indem

$$x = 2^k X,\ y = 2^k Y,\ z = 2^k Z,\ t = 2^k T$$

gesetzt wird, die Gleichung (115) erschlossen wird, ist ersichtlich die Anzahl der Lösungen der letzteren gleich derjenigen der entsprechenden von jenen. Man gelangt demnach zu dem allgemeinen Ergebnisse:

Die Anzahl der Zergliederungen jeder **geraden** Zahl in vier Quadrate beträgt

$$N(2^h \cdot u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = 24 \cdot \zeta_1(u). \quad (h > 0) \tag{116}$$

19. Die Anzahl der Zergliederungen in vier Quadrate ist, wie hieraus folgt, für die Zahl $2u$ dreimal so groß wie für die Zahl u. Für diese Tatsache hat *Stern* (J. für Math. 105, S. 250) einen ganz elementaren Beweis geliefert, den wir hier anfügen, weil wir seine Methode uns zum Beweise eines von *Liouville* ausgesprochenen bemerkenswerten Satzes nutzbar machen wollen.

Wir wollen eine Zerfällung

$$u = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{117}$$

eine Grundform für u nennen, wenn die Elemente der Zerfällung nicht negative, der Größe nach fallende Zahlen sind, so daß

$$a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0 \tag{118}$$

ist. Jede Zerfällung

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \tag{119}$$

geht aus einer bestimmten solchen Grundform hervor, indem die Elemente mit verschiedenen Vorzeichen genommen und ihre Anordnung vertauscht wird. Offenbar werden die Zerfällungen, welche in solcher Weise aus der Zerfällung (119) entstehen, insgesamt mit den aus ihrer Grundform entspringenden identisch sein. Zwei Zerfällungen können nicht identisch sein und sollen wesentlich verschieden heißen, wenn sie aus verschiedenen Grundformen entstehen. Für die Zerfällungen der Zahl $2u$ gilt Entsprechendes.

Nun sei

$$2u = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \theta^2 \tag{120}$$

irgendeine Zerfällung dieser Zahl, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Absolutwerte der Elemente, so daß bei geeigneter Wahl der Vorzeichen

$$\xi = \pm\alpha,\ \eta = \pm\beta,\ \zeta = \pm\gamma,\ \theta = \pm\delta \tag{120a}$$

ist. Da von den vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ notwendig zwei — etwa α, β — gerade, die beiden andern ungerade sind, kann man ganze Zahlen x, y, z, t durch die Gleichungen

$$\alpha + \beta = 2x,\ \alpha - \beta = 2y,\ \gamma + \delta = 2z,\ \gamma - \delta = 2t \tag{121}$$

bestimmen, für welche

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$$

d. h.

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \tag{122}$$

ist. Demnach entspringt jede Zerfällung der Zahl $2u$ mittels der Gleichungen (120a) und (121) aus einer Zerfällung (122), also auch aus einer gewissen Grundform der Zahl u.

Insonderheit folgen aus jeder Grundform (117) für u die folgenden Zerfällungen der Zahl $2u$:

$$\left\{\begin{aligned} 2u &= (a-b)^2 + (a+b)^2 + (c-d)^2 + (c+d)^2 \\ 2u &= (a-c)^2 + (a+c)^2 + (b-d)^2 + (b+d)^2 \\ 2u &= (a-d)^2 + (a+d)^2 + (b-c)^2 + (b+c)^2, \end{aligned}\right. \tag{123}$$

deren Elemente nicht negative ganze Zahlen sind. Da u ungerade ist, müßten, wenn zwei der Elemente a, b, c, d in (117) einander gleich sind, sei ihr gemeinsamer Wert Null oder von Null verschieden, die beiden anderen voneinander verschieden sein. Hiernach unterscheiden sich nun die Grundformen (117) in mehrere verschiedene Typen:

1) Sei $a > b > c > d > 0$. Dann werden die drei Zerfällungen (123) wesentlich voneinander verschieden sein. Denn, da ihre Elemente positiv sind, wäre nur denkbar, daß eine von ihnen aus einer anderen,

etwa die zweite aus der ersten durch Vertauschung derselben entstünde, so daß die Elemente der zweiten denen der ersten in gewisser Ordnung genommen gleich wären. Da aber $a-c$ weder mit $a-b$ noch mit $a+b$ gleich ist, müßte etwa $a-c=c\mp d$, dann aber $a+c$, welches weder mit $a-b$ noch mit $a+b$ gleich ist, mit $c\pm d$ gleich sein, was nicht der Fall ist. Der einen Grundform (117) sind also drei wesentlich verschiedene Formen (123) zugeordnet. Aus jener entstehen durch Vertauschung der Ordnung und der Vorzeichen der Elemente $16\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 16\cdot 24$ Zerfällungen von u, aus den Formen (123) ebenso $3\cdot 16\cdot 24$ Zerfällungen von $2u$. Somit wird auch für den gesamten Typus von Grundformen (117), den wir betrachten, die Anzahl der ihnen zugehörigen Zerfällungen von u nur ein Drittel der Anzahl der aus ihnen entspringenden Zerfällungen von $2u$ sein.

2) Sei $a=b>c>d>0$. Dann gehen die Zerfällungen (123) über in die folgenden:

$$(123')\quad \begin{cases} 2u = 0^2+(2a)^2+(c-d)^2+(c+d)^2 \\ 2u=(a-c)^2+(a+c)^2+(a-d)^2+(a+d)^2 \\ 2u=(a-d)^2+(a+d)^2+(a-c)^2+(a+c)^2, \end{cases}$$

deren dritte durch Vertauschung der Elemente aus der zweiten entsteht, also sind nur zwei von ihnen wesentlich voneinander verschieden. Die Grundform

$$u=a^2+a^2+c^2+d^2$$

ergibt jetzt $16\cdot 12$ Zerfällungen von u, die erste der Formeln (123′) gibt $8\cdot 24$, die zweite $16\cdot 24$, zusammen also $24\cdot 24 = 3\cdot 16\cdot 12$ Zerfällungen von $2u$. Also wird auch hier wieder die gesamte Anzahl der dem Typus entsprechenden Zerfällungen von u nur ein Drittel derjenigen von $2u$ sein.

3) Sei $a>b>c=d>0$. Dann liefern die Gleichungen (123) nur zwei wesentlich verschiedene Zerfällungen von $2u$:

$$(123'')\quad \begin{cases} 2u=(a-b)^2+(a+b)^2+0^2+(2c)^2 \\ 2u=(a-c)^2+(a+c)^2+(b-c)^2+(b+c)^2, \end{cases}$$

während

$$u=a^2+b^2+c^2+c^2$$

ist. Hieraus entstehen $16\cdot 12$ Zerfällungen von u, aber

$$8\cdot 24+16\cdot 24 = 24\cdot 24 = 3\cdot 16\cdot 12$$

Zerfällungen von $2u$, und wieder ist auch für den jetzigen Typus die gesamte Anzahl der Zerfällungen von u nur ein Drittel derjenigen von $2u$.

Zu gleichem Ergebnisse führt die Annahme $a>b=c>d>0$.

4) Sei $a = b = c > d > 0$. Dann stellen die Gleichungen (123) wesentlich nur eine einzige Zerfällung von $2u$ dar:

$$(123''') \qquad 2u = 0^2 + (2a)^2 + (a-d)^2 + (a+d)^2,$$

während

$$u = a^2 + a^2 + a^2 + d^2$$

ist. Hieraus entstehen $16 \cdot 4$ Zerfällungen von u und $8 \cdot 24 = 3 \cdot 16 \cdot 4$ Zerfällungen von $2u$; also gibt auch der neue Typus nur ein Drittel soviel Zerfällungen für u wie für $2u$.

Zu gleichem Ergebnisse führt die Annahme $a > b = c = d > 0$.

5) Sei nun $a > b > c > d = 0$. Die Gleichungen (123) gehen über in diese:

$$(123^4) \qquad \begin{cases} 2u = (a-b)^2 + (a+b)^2 + c^2 + c^2 \\ 2u = (a-c)^2 + (a+c)^2 + b^2 + b^2 \\ 2u = a^2 + a^2 + (b-c)^2 + (b+c)^2, \end{cases}$$

während

$$u = a^2 + b^2 + c^2 + 0^2$$

ist. Dies gibt $8 \cdot 24$ Zerfällungen für u, $3 \cdot 16 \cdot 12 = 3 \cdot 8 \cdot 24$ Zerfällungen für $2u$, also das gleiche Verhältnis wie in den früheren Typen.

6) Sei $a = b > c > d = 0$. Dann erhält man aus (123)

$$(123^5) \qquad \begin{cases} 2u = 0^2 + (2a)^2 + c^2 + c^2 \\ 2u = (a-c)^2 + (a+c)^2 + a^2 + a^2, \end{cases}$$

während

$$u = a^2 + a^2 + c^2 + 0^2$$

ist, also $8 \cdot 12$ Zerfällungen für u, und $8 \cdot 12 + 16 \cdot 12 = 3 \cdot 8 \cdot 12$ Zerfällungen für $2u$.

7) Sei $a > b > c = d = 0$. Dann folgt aus (123)

$$(123^6) \qquad \begin{cases} 2u = (a-b)^2 + (a+b)^2 + 0^2 + 0^2 \\ 2u = a^2 + a^2 + b^2 + b^2, \end{cases}$$

während

$$u = a^2 + b^2 + 0^2 + 0^2$$

ist, also $4 \cdot 12$ Zerfällungen für u, und $4 \cdot 12 + 16 \cdot 6 = 3 \cdot 4 \cdot 12$ Zerfällungen für $2u$.

8) Sei $a > b = c > d = 0$. Dann gehen aus (123) die Zerfällungen

$$(123^7) \qquad \begin{cases} 2u = (a-b)^2 + (a+b)^2 + b^2 + b^2 \\ 2u = a^2 + a^2 + 0^2 + (2b)^2 \end{cases}$$

hervor, während

$$u = a^2 + b^2 + b^2 + 0^2$$

ist. Dies gibt $8 \cdot 12$ Zerfällungen für u, und $16 \cdot 12 + 8 \cdot 12 = 3 \cdot 8 \cdot 12$ Zerfällungen für $2u$.

9) Sei $a = b = c > d = 0$. Dann erhält man aus (123)

$$2u = 0^2 + (2a)^2 + a^2 + a^2 \tag{123^8}$$

zugleich mit

$$u = a^2 + a^2 + a^2 + 0^2,$$

also $8 \cdot 4$ Zerfällungen für u, und $8 \cdot 12 = 3 \cdot 8 \cdot 4$ Zerfällungen für $2u$.

10) Ist endlich $a > b = c = d = 0$, so kommt

$$\left\{\begin{aligned} u &= a^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 \\ 2u &= a^2 + a^2 + 0^2 + 0^2 \end{aligned}\right. \tag{123^9}$$

also $2 \cdot 4$ Zerfällungen für u, und $4 \cdot 6 = 3 \cdot 2 \cdot 4$ Zerfällungen für $2u$.

Da hiernach bei jedem der möglichen Typen für die Anzahl der ihnen zugehörigen Zerfällungen von u und von $2u$ das Verhältnis $1:3$ nachgewiesen worden ist, so gilt dies Verhältnis auch für die gesamte Anzahl ihrer Zerfällungen, und der anfangs ausgesprochene Satz ist aufs neue bewiesen.

20. Sei nun $s = 2^h \cdot u$ eine gerade, u eine ungerade Zahl, so ist, wie gezeigt worden

$$A = 24 \cdot \zeta_1(u)$$

die Anzahl aller Zergliederungen von s in vier Quadrate. Seien

$$\left\{\begin{aligned} s &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 \\ s &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + t_2^2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ s &= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 + t_A^2. \end{aligned}\right. \tag{124}$$

diese sämtlichen Zergliederungen, so erhält man durch Addition aller A Gleichungen die Formel

$$A \cdot s = \sum_{i=1}^{A} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + t_i^2). \tag{125}$$

Wenn man beachtet, daß jede der Vertikalreihen zur Rechten der Gleichungen (124) insgesamt dieselben Zahlen enthalten muß, da mit jeder Zerfällung von s zugleich auch alle diejenigen auftreten, die durch Vertauschungen ihrer Elemente daraus hervorgehen, und daß somit

$$\sum x_i^2 = \sum y_i^2 = \sum z_i^2 = \sum t_i^2 \tag{125a}$$

ist, so läßt sich die Gleichung (125) auch schreiben wie folgt:

$$\sum_{i=1}^{A} x_i^2 = \frac{1}{4} \cdot As. \tag{126}$$

Dieser einleuchtenden Bemerkung hat nun *Liouville* (J. des Math. (2) 3, S. 358) die nicht ebenso unmittelbar ersichtliche Aussage hinzugefügt, daß die Summe der Biquadrate:

$$\sum_{i=1}^{A} x_i^4 = \frac{1}{8} \cdot A s^2 \tag{127}$$

oder auch, daß

$$\sum_{i=1}^{A} (x_i^4 + y_i^4 + z_i^4 + t_i^4) = \frac{1}{2} \cdot A s^2 \tag{128}$$

sei. Wir beweisen diesen Satz nach dem Vorgange von *Stern*, indem wir wieder die sämtlichen Zergliederungen von s in die vorher betrachteten Typen verteilen und zeigen, daß er für die Zergliederungen jedes einzelnen Typus richtig, d. h. — unter A' die Anzahl dieser Zergliederungen verstanden —, daß die über die letzteren erstreckte Summe

$$\sum (x_i^4 + y_i^4 + z_i^4 + t_i^4) = \frac{1}{2} \cdot A' s^2 \tag{129}$$

sei; durch Zusammenfassen aller Typen folgt dann ersichtlich der *Liouville*sche Satz. Es wird zudem genügen, wenn wir uns hierbei auf den Fall $s = 2u$ beschränken.

Sei also $s = 2u$. Jeder Zerfällung

$$u = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{130}$$

des ersten Typus entsprechen die drei wesentlich verschiedenen Zerfällungen (123) von $2u$, für welche die Summe der Biquadrate

$$\begin{aligned} &(a-b)^4 + (a+b)^4 + (c-d)^4 + (c+d)^4 \\ &+ (a-c)^4 + (a+c)^4 + (b-d)^4 + (b+d)^4 \\ &+ (a-d)^4 + (a+d)^4 + (b-c)^4 + (b+c)^4 \\ &= 6[a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)] \\ &= 6 \cdot u^2 \end{aligned}$$

ist. Da jede dieser drei Zerfällungen aber $16 \cdot 24$ Zergliederungen ergibt, ohne daß die Summe ihrer Biquadrate sich verändert, so wird die Summe der Biquadrate für sie alle zusammengenommen

$$16 \cdot 24 \cdot 6u^2 = 3 \cdot 16 \cdot 24 \cdot \frac{s^2}{2}.$$

Ist also $\mathfrak{G}$ die Anzahl der Grundformen (130) des Typus, so ist

$$A' = 3 \cdot 16 \cdot 24 \cdot \mathfrak{G}$$

die Anzahl der Zergliederungen dieses Typus für $2u$, und

$$\mathfrak{G} \cdot 3 \cdot 16 \cdot 24 \cdot \frac{s^2}{2}$$

die Summe ihrer Biquadrate, diese letztere folglich gleich

$$A' \cdot \frac{s^2}{2}.$$

Beim zweiten Typus liefert die erste der Zerfällungen (123′) $8 \cdot 24$ mal die Summe

$$16a^4 + (c-d)^4 + (c+d)^4$$

der Biquadrate, die zweite $16 \cdot 24$ mal die Summe

$$(a-c)^4 + (a+c)^4 + (a-d)^4 + (a+d)^4,$$

zusammen geben sie also als Summe der Biquadrate den Ausdruck

$$8 \cdot 24[24a^4 + 6c^4 + 6d^4 + 24a^2c^2 + 24a^2d^2 + 12c^2d^2]$$
$$= 6 \cdot 8 \cdot 24(2a^2 + c^2 + d^2)^2$$

oder, da

(130′) $$u = 2a^2 + c^2 + d^2$$

ist,

$$6 \cdot 8 \cdot 24u^2 = 3 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \frac{s^2}{2}.$$

Ist aber wieder $\mathfrak{G}$ die Anzahl der Grundformen (130′) dieses Typus, so ist

$$A' = 3 \cdot 16 \cdot 12\mathfrak{G}$$

die Anzahl der Zergliederungen dieses Typus für $2u$, und

$$\mathfrak{G} \cdot 3 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \frac{s^2}{2}$$

die Summe ihrer Biquadrate, diese letztere also gleich

$$A' \cdot \frac{s^2}{2}.$$

Beim dritten Typus entspringt ebenso aus den jeder Grundform

(130″) $$u = a^2 + b^2 + c^2 + c^2$$

desselben zugehörigen Zergliederungen (123″) die Summe der Biquadrate:

$$8 \cdot 24\big((a-b)^4 + (a+b)^4 + (2c)^4\big)$$
$$+ 16 \cdot 24\big((a-c)^4 + (a+c)^4 + (b-c)^4 + (b+c)^4\big)$$
$$= 8 \cdot 24[6a^4 + 6b^4 + 24c^4 + 12a^2b^2 + 24a^2c^2 + 24b^2c^2]$$
$$= 6 \cdot 8 \cdot 24(a^2 + b^2 + 2c^2)^2$$

oder

$$6 \cdot 8 \cdot 24u^2 = 3 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \frac{s^2}{2}.$$

Man hat ferner

$$A' = 3 \cdot 16 \cdot 12\mathfrak{G},$$

also als Summe aller Biquadrate

$$\mathfrak{G} \cdot 3 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \frac{s^2}{2} = A' \cdot \frac{s^2}{2}.$$

Beim vierten Typus ist

$$(130''') \qquad \begin{cases} u = 3a^2 + d^2 \\ A' = 3 \cdot 16 \cdot 4\mathfrak{S}, \end{cases}$$

und die Summe aller Biquadrate für die jeder Grundform (130‴) entspringenden Zergliederungen von $2u$ gleich

$$8 \cdot 24[18a^4 + 12a^2d^2 + 2d^4]$$

$$= 3 \cdot 16 \cdot 8(3a^2 + d^2)^2 = 3 \cdot 16 \cdot 2u^2 = 3 \cdot 16 \cdot 4 \cdot \frac{s^2}{2},$$

die gesamte Summe der Biquadrate also gleich

$$A' \cdot \frac{s^2}{2}.$$

Desgleichen ist beim fünften Typus

$$(130^4) \qquad \begin{cases} u = a^2 + b^2 + c^2 \\ A' = 3 \cdot 8 \cdot 24\mathfrak{S} \end{cases}$$

und die Summe aller Biquadrate für die jeder Grundform (130^4) entspringenden Zergliederungen von $2u$ gleich

$$\cdot 12[(a-b)^4 + (a+b)^4 + (a-c)^4 + (a+c)^4 + (b-c)^4 + (b+c)^4 + 2a^4 + 2b^4 + 2c^4]$$

$$= 16 \cdot 12[6a^4 + 6b^4 + 6c^4 + 12a^2b^2 + 12a^2c^2 + 12b^2c^2]$$

$$= 16 \cdot 12 \cdot 6(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 6 \cdot 16 \cdot 12u^2 = 3 \cdot 8 \cdot 24 \cdot \frac{s^2}{2},$$

die gesamte Summe der Biquadrate also gleich

$$A' \cdot \frac{s^2}{2}.$$

Geht man in gleicher Weise auch noch die übrigen Typen durch, so findet man stets dasselbe Gesetz bestätigt und erkennt daher auch die Richtigkeit des von *Liouville* ausgesprochenen Satzes für den Fall

$$s = 2u.$$

Wir ziehen hieraus zunächst eine Folgerung. Der Gleichung (125) entsprechend besteht offenbar auch die folgende:

$$A \cdot s^2 = \sum_{i=1}^{A} [x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + t_i^2]^2.$$

Gilt also der *Liouville*sche Satz, so ergibt sich

$$A \cdot s^2 = A \cdot \frac{s^2}{2} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{A} (x_i^2 y_i^2 + x_i^2 z_i^2 + x_i^2 t_i^2 + y_i^2 z_i^2 + y_i^2 t_i^2 + z_i^2 t_i^2)$$

und, da man aus gleicher Erwägung wie die Gleichungen (125 a) die Gleichheit der Summen

$$\sum x_i^2 y_i^2 = \sum x_i^2 z_i^2 = \cdots = \sum z_i^2 t_i^2$$

erschließt, einfacher

(131)
$$\sum_{i=1}^{A} x_i^2 y_i^2 = \frac{A \cdot s^2}{24}.$$

Für den Fall $s = 2u$ steht hiernach diese Formel fest.

Nun sei $s = 4u$. Dann bestehen zwischen je einer Zerfällung

$$4u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

und einer Zerfällung

$$2u = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \theta^2,$$

wie schon bemerkt, die Beziehungen

$$\xi = \frac{x+y}{2}, \quad \eta = \frac{x-y}{2}, \quad \zeta = \frac{z+t}{2}, \quad \theta = \frac{z-t}{2}$$

oder umgekehrt

$$x = \xi + \eta, \; y = \xi - \eta, \; z = \zeta + \theta, \; t = \zeta - \theta.$$

Zudem ist die Anzahl A der möglichen Zergliederungen in vier Quadrate dieselbe für $4u$ wie für $2u$. Folglich ist

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 2(\xi^4 + \eta^4 + \zeta^4 + \theta^4) + 12(\xi^2\eta^2 + \zeta^2\theta^2)$$

und die über alle Zergliederungen von $4u$ in vier Quadrate erstreckte Summe

$$\sum (x^4 + y^4 + z^4 + t^4) = 2 \cdot \sum (\xi^4 + \eta^4 + \zeta^4 + \theta^4) + 24 \cdot \sum \xi^2 \eta^2,$$

wo rechts über alle Zergliederungen von $2u$ zu summieren ist. Dem schon Bewiesenen zufolge ist also

$$\sum (x^4 + y^4 + z^4 + t^4) = 2 \cdot \frac{A(2u)^2}{2} + 24 \cdot \frac{A(2u)^2}{24} = 2A \cdot (2u)^2 = A \cdot \frac{s^2}{2}$$

und demnach der *Liouville*sche Satz sowie seine Folgerung (131) auch gültig für den Fall $s = 4u$.

Endlich beachte man, daß, wenn $s = 2^h \cdot u$ ist, die Lösungen der Gleichung

(132)
$$s = 2^h \cdot u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

wie Ende von Nr. 18 bemerkt, je nachdem $h = 2k + 2$ oder $2k + 1$ ist, aus den Lösungen der Gleichung

(133)
$$4u = X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2$$

resp.

(134)
$$2u = X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2$$

hervorgehen, indem

$$x = 2^k \cdot X, \; y = 2^k \cdot Y, \; z = 2^k \cdot Z, \; t = 2^k \cdot T$$

gesetzt wird. Daher wird die über alle Zergliederungen (132) von s ausgedehnte Summe

$$\sum (x^4 + y^4 + z^4 + t^4)$$

gleich der mit 2^{4k} multiplizierten, über alle Zergliederungen (133) von $4u$ resp. (134) von $2u$ erstreckten Summe

$$\sum (X^4 + Y^4 + Z^4 + T^4),$$

also nach dem schon Bewiesenen gleich

$$2^{4k} \cdot A \cdot \frac{(4u)^2}{2} \text{ resp. } 2^{4k} \cdot A \cdot \frac{(2u)^2}{2}$$

d. h. gleich $A \cdot \frac{(2^h u)^2}{2} = A \cdot \frac{s^2}{2}$.

Der *Liouville*sche Satz, und damit auch die Formel (131), gilt folglich allgemein für jede gerade Zahl s.

21. Indem wir hiermit die auf die Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe von vier Quadratzahlen bezüglichen Untersuchungen abschließen, wollen wir kurz auch der gleichen Frage bezüglich ihrer Darstellungen als Summe von mehr als vier Quadratzahlen gedenken. Diese ganze Sache gehört der Lehre von den quadratischen Formen mit beliebig viel Unbestimmten an. Für den Fall dreier Quadrate hat *Gauss* die betreffende Frage aus der von ihm entwickelten Theorie der ternären quadratischen Formen beantwortet.[1]) Für sechs, acht und zehn Quadrate gab zuerst *Eisenstein*, für zwölf Quadrate *Liouville* eine Reihe bezüglicher Sätze, welche von *K. Petr* und *G. Humbert* mit den Mitteln der elliptischen Funktionentheorie bewiesen worden sind.[2]) Wie aber die erwähnte allgemeine Theorie die Lösung der gestellten Frage herbeizuführen lehrt, ist in des Verfassers „Arithmetik der quadratischen Formen“ im 10. Kapitel für den Fall von fünf, sechs, sieben oder acht Quadraten ausgeführt, auch in Nr. 15 daselbst auf die eigentümlichen Summen hingewiesen worden, welche in den bezüglichen Ausdrücken für die Anzahl der Darstellungen eine Rolle spielen.

Hier kann auf diese Untersuchungen nicht weiter eingegangen werden, wir schließen vielmehr mit einigen einfachen Bemerkungen über die Anzahl der Darstellungen einer Zahl s als Summe von drei und von fünf Quadraten, die sich aus den von uns gegebenen Sätzen über die Anzahl der Darstellungen durch zwei resp. vier Quadraten ableiten lassen.[3])

Aus jeder Darstellung

$$s = x^2 + y^2 + z^2, \tag{135}$$

in der an letzter Stelle das Quadrat z^2 steht, folgt eine Darstellung

$$s - z^2 = x^2 + y^2$$

1) S. *Gauss*, Disquis. arithm. art. 291, oder des Verfassers Arithmetik der quadratischen Formen S. 139 ff.

2) *Eisenstein* Journ. f. Math. 35, S. 135 oder Math. Abh. Berlin 1847, S. 195; *Liouville* C. R. Acad. Paris 60, S. 1257; Journ. des Math. (2) 9, S 296; (2) 11, S. 1; *K. Petr*, Archiv f. Math. u. Phys. (3) 11, S. 83; *G. Humbert*, C. R. Acad. Paris 144, S. 874.

3) *Glaisher*, Messenger of Math. (2) 21, S. 122.

und umgekehrt; der gedachten Darstellungen gibt es also, wenn $s - z^2 > 0$ ist (nach Nr. 2) $4 \cdot \varrho(s - z^2)$ oder, mit Rücksicht auf das Doppelte für z, falls es von Null verschieden ist, mögliche Vorzeichen $8 \cdot \varrho(s - z^2)$. Demnach ist ersichtlich die gesamte Anzahl der Darstellungen einer Zahl s, die keine Quadratzahl ist, als Summe dreier Quadratzahlen gleich

$$(136) \qquad 4[\varrho(s) + 2\varrho(s-1) + 2\varrho(s-4) + 2\varrho(s-9) + \cdots],$$

die nach den Quadratzahlen fortschreitende Klammer soweit fortgesetzt, als die Differenz $s - z^2$ noch positiv bleibt.

Ist $s \equiv 3 \pmod{4}$, so ist auch $s - z^2 \equiv 3$ und folglich, wie aus Nr. 2 leicht zu erschließen ist, $\varrho(s - z^2) = 0$ für jeden geraden Wert von z; der Ausdruck (136) für die Anzahl aller Darstellungen einer solchen Zahl s als Summe dreier Quadratzahlen reduziert sich also auf

$$(137) \qquad 8[\varrho(s-1) + \varrho(s-9) + \varrho(s-25) + \cdots].$$

Ist dagegen die nicht quadratische Zahl $s \equiv 1 \pmod{4}$, so müssen in der Darstellung (135) zwei der Zahlen x, y, z gerade, die dritte ungerade, etwa

$$s = g^2 + g_1^2 + u^2,$$

g, g_1 gerade, u ungerade sein. Beschränkt man eins der geraden Elemente, etwa g^2, auf die erste Stelle und nimmt seine Basis g positiv, so ist die Anzahl solcher Darstellungen d. h. der Darstellungen von $s - g^2$ als Summe zweier Quadratzahlen sechsfach zu nehmen, also gleich $6 \cdot \varrho(s - g^2)$, und daher läßt sich der Ausdruck (136) in diesem zweiten Falle ersetzen durch

$$(138) \quad 6 \cdot [\varrho(s) + 2\varrho(s-4) + 2\varrho(s-16) + 2\varrho(s-36) + \cdots].$$

Nun ist, wie später (im folgenden Kapitel (92)) gezeigt werden wird, da s als keine Quadratzahl gedacht wird,

$$\varrho(s) - 2\varrho(s-4) + 2\varrho(s-16) - 2\varrho(s-36) + \cdots = 0.$$

Wird dieser der Null gleiche Ausdruck sechsfach zu (138) addiert oder davon subtrahiert, so nimmt (138) eine der beiden Formen resp. an:

$$12[\varrho(s) + 2\varrho(s-16) + \cdots]$$
$$24[\varrho(s-4) + \varrho(s-36) + \cdots],$$

und, da jeder dieser Ausdrücke mit dem ursprünglichen Ausdrucke (136) gleich sein muß, erhält man die nachstehende dreifache Gleichheit:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot [\varrho(s) + 2\varrho(s-1) + 2\varrho(s-4) + 2\varrho(s-9) + \cdots] \\ = {} & 3 \cdot [\varrho(s) + 2\varrho(s-4) + 2\varrho(s-16) + 2\varrho(s-36) + \cdots] \\ = {} & 6 \cdot [\varrho(s) + 2\varrho(s-16) + 2\varrho(s-64) + \cdots] \\ = {} & 12 \cdot [\varrho(s-4) + \varrho(s-36) + \varrho(s-100) + \cdots]. \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise finden sich mit Beachtung des *Jacobi*schen Satzes über die Anzahl der Darstellungen einer Zahl s als Summe von vier Quadraten ähnliche Sätze über die Anzahl der Darstellungen einer ungeraden Zahl s durch fünf Quadrate. Für eine solche muß in der Formel

$$s = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2$$

mindestens eins der Quadrate, z. B. u, ungerade sein. Beschränkt man dies auf die letzte Stelle und nimmt seine Basis positiv, so hat man die Anzahl solcher Darstellungen zehnfach zu nehmen. Wir sehen ab von dem Falle $s \equiv 1 \pmod{8}$; dann kann s keine Quadratzahl sein. Ist dann zuerst $s \equiv 5 \pmod{8}$, so wird $s - u^2$ das Vierfache der ungeraden Zahl $\frac{s-u^2}{4}$ und verstattet nach (113) eine Anzahl $24 \cdot \zeta_1\left(\frac{s-u^2}{4}\right)$ von Darstellungen als Summe von vier Quadraten. Die gesamte Anzahl der Darstellungen von s als Summe von fünf Quadraten beträgt daher

$$10 \cdot 24\left[\zeta_1\left(\frac{s-1}{4}\right) + \zeta_1\left(\frac{s-9}{4}\right) + \zeta_1\left(\frac{s-25}{4}\right) + \cdots\right].$$

Ist zweitens $s \equiv 3$ oder $s \equiv 7 \pmod{8}$, so ist $s - u^2$ das Doppelte der ungeraden Zahl $\frac{s-u^2}{2}$ und verstattet nach (114) eine Anzahl $24 \cdot \zeta_1\left(\frac{s-u^2}{2}\right)$ von Darstellungen als Summe von 4, also s die Anzahl

$$10 \cdot 24\left[\zeta_1\left(\frac{s-1}{2}\right) + \zeta_1\left(\frac{s-9}{2}\right) + \zeta_1\left(\frac{s-25}{2}\right) + \cdots\right]$$

von Darstellungen als Summe von 5 Quadraten. Späteren Sätzen zufolge (s. nächstes Kapitel (90a) und (90b)) lassen sich diese Ausdrücke durch die folgenden ersetzen:

$$30 \cdot [\zeta_1(s) + 2\zeta_1(s-4) + 2\zeta_1(s-16) + \cdots]$$

resp.

$$60 \cdot [\zeta_1(s) + 2\zeta_1(s-4) + 2\zeta_1(s-16) + \cdots].$$

Achtes Kapitel.

Untersuchungen von *Liouville*.

1. Der Beweis, welchen *Dirichlet* für den *Jacobi*schen Satz über die Anzahl der Zergliederungen einer Zahl $4u$ in eine Summe von vier Quadraten gegeben, ist für *Liouville* der Ausgangspunkt zu weitgehenden Untersuchungen geworden (s. J. des Math. (2) 7, S. 48). Dieser ausgezeichnete zahlentheoretische Forscher hat eine Reihe von achtzehn Artikeln unter dem gemeinsamen Titel: sur quelques for-

mules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres (J. des Math. (2) t. 3, S. 143, 193, 201, 241, 273, 325; t. 4, S. 1, 73, 111, 195, 281; t. 5, S. 1; t. 9, S. 249, 281, 321, 389; t. 10, S. 135, 169) veröffentlicht, die eine schier unerschöpfliche Fundgrube für zahlentheoretische Sätze darbieten. Die merkwürdigen algebraischen Formeln hängen aufs innigste, wie zuerst *Hermite* in einem an *Liouville* gerichteten Briefe (ebendas. (2), t. 7, S. 25) entwickelt hat, ebenso wie ihr Ausgangspunkt, die Zerfällung einer Zahl in vier Quadratzahlen, mit der Theorie der elliptischen Funktionen zusammen, insbesondere mit demjenigen hochgelegenen Gebiete derselben, welches man als die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen bezeichnet, und sie sind hier enge mit den berühmten Sätzen verknüpft, welche man *Kronecker* verdankt, und welche Beziehungen zwischen den Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen von verschiedenen Determinanten aussagen. Doch scheint ihre eigentliche Quelle, welche *Liouville* leider verhüllt hat, eine andere, ursprünglichere zu sein; über das Verhältnis seiner Formeln zur Theorie der elliptischen Funktionen äußert sich *Liouville* selbst in folgender Weise: En effet mes formules se rattachent aussi à la théorie des fonctions elliptiques, seulement elles contiennent plutôt cette théorie qu'elles n'en dépendent (a. a. O. (2), t. 7, S. 44). Elles donnent naissance à des équations entre des séries qui contiennent comme cas particulier celles de la théorie des fonctions elliptiques (article 7). Cette théorie . . . se trouve donc ici remplacée pour moi par des formules appartenant à l'algèbre la plus élémentaire, obtenues au moyen de certaines identités des plus simples (2), t. 7, S. 41). Die Beweise für seine Formeln, welche *Liouville* verspricht, und die er wenigstens zum Teil in seinem cours an collège de France gegeben hat (s. (2) t. 4, S. 2 Anmerkung), sind nicht mehr von ihm veröffentlicht worden. Man muß es daher den Herren *Pepin* und *E. Meissner* Dank wissen, ihrerseits Beweise dafür geliefert zu haben, der erstere (im J. des Math. (4), t. 4, S. 83) für die einfacheren, in den ersten fünf und den beiden letzten Artikeln enthaltenen Formeln, der zweite in seiner Inauguraldissertation (Zürich 1907) für den größten Teil der übrigen, komplizierteren Formeln. Eine zusammenhängende systematische Herleitung und Verbindung dieser Formeln, welche ihren Quell und die Prinzipien klarlegte, nach denen die in den Formeln auftretenden Zerfällungen sowie die Argumente der Funktionen, auf welche sie sich beziehen, zu wählen sind, würde sehr wertvoll sein. Hier ist uns nur eine kleine Auslese aus diesen Formeln verstattet, um Musterbeispiele zu liefern, aus denen wir dann als Beweis ihrer Fruchtbarkeit eine größere Reihe von bemerkenswerten zahlentheoretischen Sätzen herleiten wollen.

2. In den Formeln, welche wir aufzustellen haben, treten Funktionen von einer oder mehreren Veränderlichen auf. Diese Funktionen

brauchen nur für diejenigen Wertsysteme der letzteren, die in den Formeln vorkommen, gegeben zu sein, im übrigen sind sie ganz willkürlich und dürfen für alle anderen Wertsysteme der Veränderlichen unbestimmt bleiben; sie können nach Belieben als analytische Funktionen gedacht werden, oder nicht, und sonach kommt den gedachten Formeln eine außerordentlich große Allgemeinheit zu.

Sei nun zuerst s eine ganz beliebige positive ganze Zahl und $f(x, y)$ eine, für die vorkommenden Werte von x, y gegebene Funktion zweier Veränderlichen mit der Eigenschaft, daß für jene Werte

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y) = -f(y, x) \tag{1}$$

sei. Die ganze Zahl s zerfälle man auf alle Weise in zwei positive Summanden s', s'' und diese letzteren zerlege man auf alle Weise in das Produkt zweier positiver Faktoren:

$$s' = d'\delta', \quad s'' = d''\delta'',$$

so daß jede Zerfällung der Zahl s von der Form

$$s = d'\delta' + d''\delta'' \tag{2}$$

entsteht. Über alle möglichen Zerfällungen dieser Art erstrecke man die Summe

$$S = \sum_{s = d'\delta' + d''\delta''} f(d' - d'', \delta' + \delta''). \tag{3}$$

Zur Ermittelung ihres Wertes greifen dieselben Betrachtungen Platz, die in Nr. 17 vorigen Kapitels beim Beweise des *Jacobi*schen Satzes zur Anwendung gebracht sind. Man unterscheide in der Summe S diejenigen Zerfällungen von s, in denen $d' = d''$ ist, von den übrigen. Der gemeinsame Wert d von d', d'' ist jeder Teiler von s; setzt man also

$$s = d\delta, \tag{4}$$

so nimmt die Gleichung (2) die Gestalt an:

$$\delta = \delta' + \delta''. \tag{5}$$

Es bezeichne $\psi(\delta)$ die Anzahl zulässiger Zerfällungen von δ von dieser Art; wenn über δ', δ'' keine beschränkenden Voraussetzungen gelten, so ist offenbar $\psi(\delta) = \delta - 1$. Für jede dieser $\psi(\delta)$ dem Teiler d von s entsprechenden Zerfällungen von δ nimmt das allgemeine Glied der Summe S den Wert $f(0, \delta)$ an. Der Teil von S, welcher die Zerfällungen der ersten Art umfaßt, ist demnach die auf alle Teiler von s bezogene Summe

$$S_1 = \sum_{s = d\delta} \psi(\delta) \cdot f(0, \delta). \tag{6}$$

Bei den übrigen Zerfällungen von s sind d', d'' voneinander verschieden, jeder Zerfällung (2) steht also eine davon verschiedene

$$s = d''\delta'' + d'\delta'$$

zur Seite; die ihnen beiden zugehörigen Funktionswerte

$$f(d' - d'',\ \delta' + \delta''),\ \ f(d'' - d',\ \delta'' + \delta')$$

sind wegen (1) einander gleich; daher läßt sich der übrige Teil der Summe S schreiben, wie folgt:

$$S_2 = 2 \cdot \sum f(d' - d'',\ \delta' + \delta''), \tag{7}$$

wobei nun $d' > d''$ gedacht wird. Schreibt man nun, ganz wie a. a. O.,

$$s = (d' - d'')\delta' + (\delta' + \delta'')d'' \tag{8}$$

und setzt

$$\begin{cases} d_1 = \delta' + (\theta + 1)(\delta' + \delta''), & d_2 = \delta' + \theta(\delta' + \delta'') \\ \delta_1 = d'' - \theta(d' - d''), & \delta_2 = (\theta + 1)(d' - d'') - d'', \end{cases} \tag{9}$$

so ergibt sich sogleich

$$d_1 - d_2 = \delta' + \delta'',\ \ \delta_1 + \delta_2 = d' - d'',\ \ d_1 > d_2, \tag{10}$$

und die neue Zerfällung

$$s = d_1\delta_1 + d_2\delta_2 \tag{11}$$

in ganzen Zahlen d_1, δ_1, d_2, δ_2, wenn θ als ganze Zahl gedacht wird. Sollen diese Zahlen aber auch positiv sein, so müssen die Ungleichheiten

$$\theta < \frac{d''}{d' - d''},\ \ \theta + 1 > \frac{d''}{d' - d''} \tag{12}$$

erfüllt sein. Durch sie bestimmt sich ein einziger zutreffender ganzer Wert θ, falls $\frac{d''}{d' - d''}$ ein Bruch ist, nämlich der Wert

$$\theta = \left[\frac{d''}{d' - d''}\right].$$

Ginge man dann von der so erhaltenen Zerfällung (11) von s durch eine mit (9) gleichgebildete Substitution zu einer anderen über, so würde das zugehörige θ, da $\frac{d_2}{d_1 - d_2} = \frac{\delta'}{\delta' + \delta''} + \theta$ ein Bruch ist, gleich $\left[\frac{d_2}{d_1 - d_2}\right]$ d. h. dem obigen θ gleich sein, und man erkennt, wie a. a. O., daß die neue Zerfällung keine andere ist, als die durch Auflösung der Gleichungen (9) sich ergebende ursprüngliche Zerfällung in den Zahlen

$$\begin{aligned} d' &= \delta_1 + (\theta + 1)(\delta_1 + \delta_2), & d'' &= \delta_1 + \theta(\delta_1 + \delta_2) \\ \delta' &= d_2 - \theta(d_1 - d_2), & \delta'' &= (\theta + 1)(d_1 - d_2) - d_2. \end{aligned}$$

Unter der gemachten Voraussetzung sind also die zwei Zerfällungen von s durch die Substitution (9) umkehrbar miteinander verbunden.

Nun zerstören sich aber die beiden Glieder der Summe (2), welche je zwei solchen Zerfällungen entsprechen. Denn wegen (10) ist das der zweiten von ihnen zugehörige Glied

$$f(d_1 - d_2,\ \delta_1 + \delta_2) = f(\delta' + \delta'',\ d' - d'')$$

und wegen der Bedingungen (1) dem Gliede

$$f(d' - d'',\ \delta' + \delta''),$$

das der ersten Zerfällung zugehört, entgegengesetzt. Demnach verkürzt sich die Summe S_2 auf den Ausdruck

$$(13) \qquad 2 \cdot \sum{}' f(d' - d'',\ \delta' + \delta''),$$

worin die Summation sich nur noch auf diejenigen Zerfällungen (2) erstreckt, bei denen zugleich $d' > d''$ und $\frac{d''}{d' - d''}$ eine ganze Zahl ist. So geht die Formel hervor:

$$(14) \qquad S = \sum_{s = d\delta} \psi(\delta) \cdot f(0,\ \delta) + 2 \cdot \sum{}' f(d' - d'',\ \delta' + \delta'').$$

Wir müssen hier hervorheben, daß, was bezüglich der Summe S_2 soeben festgestellt ist, ohne über die Zerfällungen (2) von s weitere Voraussetzungen zu machen, als schon geschehen ist, auch dann in Gültigkeit bleibt, wenn festgesetzt wird, daß die Summanden s', s'' also auch die Zahlen d', δ', d'', δ'' der Zerfällung ungerade sein sollen, was voraussetzt, daß s eine gerade Zahl sei. Denn alsdann sind die diesen Zahlen durch die Substitution (9) verbundenen Zahlen d_1, δ_1, d_2, δ_2 ersichtlich auch ungerade, die der ersten Zerfällung verknüpfte Zerfällung also auch eine der verstatteten Zerfällungen.

3. Behandeln wir nun zuerst diesen besonderen Fall. Setzt man $s = 2^h \cdot u$, wo u ungerade, so lautet die Zerfällung (2) folgendermaßen:

$$(15) \qquad 2^h \cdot u = d'\delta' + d''\delta''$$

mit ungeraden d', δ', d'', δ''. Dann ist der Quotient $\frac{d''}{d' - d''}$, da der Zähler ungerade, der Nenner gerade ist, jedenfalls ein Bruch, und die Summe (13) fällt aus. Da aber jetzt d in der Formel (4) als gemeinsamer Wert der ungeraden Zahlen d', d'' auch ungerade d. i. ein Teiler von u ist, findet sich, wenn $u = d \cdot t$ gesetzt wird, $\delta = 2^h \cdot t$. Da ferner in der Formel (5) auch δ', δ'' jetzt ungerade zu denken sind, ist die Anzahl $\psi(\delta)$ der dem Teiler d von s entsprechenden Zerfällungen der ersten Art hier nicht mehr $\delta - 1$, sondern nur noch $\frac{\delta}{2} = 2^{h-1} \cdot t$. Daher erhält man in diesem Falle statt der Gleichung (14) die folgende:

$$(16)\qquad \sum_{2^h u = d'\delta' + d''\delta''} f(d' - d'',\ \delta' + \delta'') = 2^{h-1} \cdot \sum_{u = dt} t \cdot f(0, 2^h t),$$

die erste der *Liouville*schen Formeln, die wir mitteilen wollen.

Man erfüllt die Bedingungen (1), wenn man setzt

$$f(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi(y, x),$$

während unter $\varphi(x, y)$ eine Funktion verstanden wird, die ihren Wert nicht ändert, wenn x oder y mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen wird. Alsdann geht die allgemeine Formel (16) in die besondere über:

$$\sum [\varphi(d' - d'',\ \delta' + \delta'') - \varphi(\delta' + \delta'',\ d' - d'')]$$
$$= 2^{h-1} \cdot \sum t \cdot [\varphi(0,\ 2^h t) - \varphi(2^h t,\ 0)].$$

Da es jedoch offenbar erlaubt ist, bei der über sämtliche Zerfällungen (2) zu erstreckenden Summation zur Linken die lateinischen mit den griechischen Buchstaben zu vertauschen, wodurch höchstens zwei verschiedene Zerfällungen (2) miteinander vertauscht werden, so darf man die Formel auch schreiben wie folgt:

$$(16\text{a})\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum [\varphi(d' - d'',\ \delta' + \delta'') - \varphi(d' + d'',\ \delta' - \delta'')] \\ &\qquad = 2^{h-1} \cdot \sum t \cdot [\varphi(0,\ 2^h t) - \varphi(2^h t,\ 0)]. \end{aligned}\right.$$

Setzt man z. B., was mit den Voraussetzungen verträglich ist, wenn $\psi(x)$ eine gerade Funktion von x, d. h. $\psi(-x) = \psi(x)$ ist,

$$\varphi(x,\ y) = (-1)^{\frac{y}{2}} \cdot \psi(x),$$

indem man bemerkt, daß y hier nur gerade Zahlwerte $\delta' + \delta'$, $\frac{y}{2}$ also nur ganzzahlige Werte erhält, so geht aus (16a) die noch speziellere Formel hervor:

$$(16\text{b})\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum \left[(-1)^{\frac{\delta' + \delta''}{2}} \cdot \psi(d' - d'') - (-1)^{\frac{\delta' - \delta''}{2}} \cdot \psi(d' + d'')\right] \\ &\qquad = 2^{h-1} \cdot \sum t \left((-1)^{2^{h-1}t} \cdot \psi(0) - \psi(2^h t)\right). \end{aligned}\right.$$

In dem einfachen Falle $s = 2u$, d. h. wenn $h = 1$ ist, gibt man ihr leicht die Form

$$(16\text{bb})\qquad \sum (-1)^{\frac{\delta' - 1}{2} + \frac{\delta'' - 1}{2}} \cdot \left(\psi(d' - d'') + \psi(d' + d'')\right) = \sum t \left(\psi(0) + \psi(2t)\right).$$

Wird dagegen in (16a), was ebenfalls mit den Voraussetzungen verträglich, wenn $\psi(x)$ als gerade Funktion gedacht wird,

$$\varphi(x,\ y) = \psi(x)$$

gesetzt, so kommt einfach (s. eine direkte Herleitung dieser Formel bei *St. Smith*, im Report British Assoc. advanc. sciences, London 1866, S. 366)

$$(16\text{c})\qquad \sum\big(\psi(d'-d'')-\psi(d'+d'')\big)=2^{h-1}\cdot\sum t\big(\psi(0)-\psi(2^h t)\big).$$

Sei z. B. $\psi(x)=\cos\lambda x$, wo dann

$$\psi(d'-d'')-\psi(d'+d'')=2\cdot\sin\lambda d'\cdot\sin\lambda d''$$

ist, so ergibt sich die Beziehung:

$$(16\text{d})\qquad \sum\sin\lambda d'\cdot\sin\lambda d''=2^{h-1}\cdot\sum t\cdot\sin^2(2^{h-1}\lambda t).$$

Sie stellt schon eine reiche Quelle für zahlentheoretische Folgerungen dar.

Wählt man z. B. den willkürlichen Parameter $\lambda=\frac{\pi}{2}$ und bedenkt, daß für ungerade d', d''

$$\sin\frac{d'\pi}{2}=(-1)^{\frac{d'-1}{2}},\quad \sin\frac{d''\pi}{2}=(-1)^{\frac{d''-1}{2}}$$

ist, so erhält man aus ihr die Gleichung

$$\sum(-1)^{\frac{d'-1}{2}}\cdot(-1)^{\frac{d''-1}{2}}=2^{h-1}\cdot\sum t\cdot\sin^2\Big(2^{h-1}\cdot\frac{t\pi}{2}\Big).$$

Nun hat man, um die Summe zur Linken zu bilden, s auf alle Weise in zwei ungerade Summanden s', s'' zu zerfällen und für jede solche Zerfällung dann d' alle Teiler von s', d'' alle Teiler von s'' durchlaufen zu lassen. Demnach sind die entsprechenden Summen

$$\sum(-1)^{\frac{d'-1}{2}}=\varrho(s'),\quad \sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}=\varrho(s'')$$

und die linke Seite der Formel gleich

$$\sum_{s=2^h u=s'+s''}\varrho(s')\cdot\varrho(s'').$$

Zur Rechten aber ist, da t ungerade,

$$\sin\Big(2^{h-1}t\cdot\frac{\pi}{2}\Big)=(-1)^{\frac{t-1}{2}}\ \text{oder Null,}$$

je nachdem $h=1$ oder $h>1$ ist. Man findet demnach

$$(17^1)\qquad \sum_{2u=s'+s''}\varrho(s')\varrho(s'')=\sum t=\zeta_1(u)$$

$$(17^2)\qquad \sum_{2^h u=s'+s'',\ h>0}\varrho(s')\varrho(s'')=0.$$

Die erste dieser Formeln läßt verschiedene Deutungen zu.

1) Man weiß, daß $\varrho(s')$ die Anzahl der Zergliederungen von $2s'$, ebenso $\varrho(s'')$ die Anzahl der Zergliederungen von $2s''$ in zwei Quadrate positiver ungerader Zahlen bezeichnet. Daher ist (s. vor. Kap. Nr. 17)

$$\sum_{2u=s'+s''} \varrho(s')\varrho(s'')$$

die Anzahl aller Zergliederungen der Zahl

$$4u = 2s' + 2s''$$

in eine Summe von vier Quadraten positiver ungerader Zahlen. Die gedachte Formel lehrt daher aufs neue den Jacobischen Satz.

2) Andererseits ist (s. vor. Kap. Nr. 2) $2\varrho(s')$ die Anzahl der Zerfällungen von s', $2\varrho(s'')$ die Anzahl der Zerfällungen von s'' in ein gerades und ein ungerades Quadrat:

$$s' = x^2 + 4z^2, \quad s'' = y^2 + 4t^2,$$

und demnach

$$4 \cdot \sum_{2u=s'+s''} \varrho(s')\varrho(s'')$$

die Anzahl der Auflösungen der Gleichung

$$2u = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

mit ungeraden x, y, ein Zusatz, der offenbar als selbstverständlich unterdrückt werden kann. So geht aus (17^1) die Gleichung hervor:

$$N(2u = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 4 \cdot \zeta_1(u). \tag{18}$$

3) Endlich bezeichnet $4\varrho(s')$ die Anzahl der Zergliederungen von s', $4\varrho(s'')$ die Anzahl der Zergliederungen von s'' in die Summe zweier Quadrate:

$$s' = x^2 + y^2, \; s'' = z^2 + t^2,$$

wobei in jeder derselben eins der Quadrate gerade, das andere ungerade sein muß. Demnach ist

$$16 \cdot \sum_{2u=s'+s''} \varrho(s')\varrho(s'')$$

die Anzahl der Auflösungen der Gleichung

$$2u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

bei welchen $x + y \equiv 1$ also auch $z + t \equiv 1$ (mod. 2) ist. Man findet also die Beziehung:

$$\underset{x+y\equiv 1 \pmod{2}}{N(2u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2)} = 16 \cdot \zeta_1(u). \tag{19}$$

Sie bestätigt sich leicht aus den Sätzen in Nr. 18 des vorigen Kapitels. Da nämlich aus der Darstellung

$$2u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

falls in ihr $x + y \equiv 0$ also auch $z + t \equiv 0 \pmod{2}$ ist, sich die Darstellung

$$u = X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2$$

ergibt, indem

$$X = \frac{x+y}{2},\ Y = \frac{x-y}{2},\ Z = \frac{z+t}{2},\ T = \frac{z-t}{2}$$

gesetzt wird, und umgekehrt, so besteht die Gleichheit

$$\underset{x+y\equiv 0 \pmod{2}}{N(2u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2)} = N(u = X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2) = 8 \cdot \zeta_1(u).$$

Da zudem die gesamte Anzahl

$$N(2u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = 24 \cdot \zeta_1(u)$$

ist, folgt offenbar durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen die Gleichung (19).

4. Setzt man in (16c)

$$\psi(x) = x^2,$$

so findet man zunächst

$$4 \cdot \sum d' d'' = 2^{3h-1} \cdot \sum t^3.$$

Hier ist die Summe zur Linken über alle Zerfällungen

$$2^h u = s' + s''$$

in zwei ungerade Summanden zu erstrecken, und für jede derselben durchläuft d' alle Teiler von s', d'' alle Teiler von s''. Andererseits ist t jeder Teiler von u. Daher nimmt die Gleichung die einfachere Form an:

$$\sum_{2^h u = s' + s''} \zeta_1(s') \cdot \zeta_1(s'') = 2^{3h-3} \cdot \zeta_3(u), \tag{20}$$

wenn wir nach *Liouville*s Vorgange mit $\zeta_m(u)$ die Summe der m^{ten} Potenzen aller Teiler von u bezeichnen. Da nun $\zeta_1(s')$ die Anzahl der Zergliederungen von $4s'$, und ebenso $\zeta_1(s'')$ die Anzahl der Zergliederungen von $4s''$ in vier Quadrate positiver ungerader Zahlen ergibt, so ist offenbar die linke Seite der Formel die Anzahl der Darstellungen der Zahl $4 \cdot 2^h u$ als eine Summe von acht solchen Quadraten. Man erhält so die Gleichung

$$\underset{x_i \text{ pos., ungerade}}{N(2^{h+2} \cdot u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2)} = 2^{3h-3} \cdot \zeta_3(u). \tag{20a}$$

Wie sich also der *Jacobi*sche Satz in der analytischen Formel:

$$(x + x^9 + x^{25} + \cdots)^4 = \sum_{u \text{ pos., unger.}} \zeta_1(u) \cdot x^{4u}$$

zum Ausdrucke bringen ließ, so erschließt man aus vorstehender Gleichung die ähnliche Formel:

$$(x + x^9 + x^{25} + \cdots)^8 = \sum 2^{3h-3} \cdot \zeta_3(u) \cdot x^{2^h+2}u,$$

wo rechts h alle positiven, u alle ungeraden positiven Zahlen zu durchlaufen hat.

Insbesondere gibt die Formel (20) für den Fall $h = 1$ d. h. wenn $s = 2u$ ist, die Beziehung

$$\sum_{2u = s' + s''} \zeta_1(s') \cdot \zeta_1(s'') = \zeta_3(u) \tag{21}$$

und ihr zufolge ist die Anzahl der Zergliederungen der Zahl $8u$ in eine Summe von acht Quadraten positiver ungerader Zahlen gleich der Summe der Kuben aller Teiler von u.

Setzt man in (16c)

$$\psi(x) = x^4,$$

so erhält man, falls $s = 2u$ ist,

$$8 \cdot \left(\sum d'^3 d'' + \sum d' d''^3\right) = 2^4 \cdot \sum t^5.$$

Abgesehen von den Zerfällungen $2u = d'\delta' + d'\delta'$, für welche in den entsprechenden Gliedern der zweiten Summe die Zeichen d', d'' offenbar miteinander vertauschbar sind, gehört zu jeder Zerfällung

$$2u = d'\delta' + d''\delta''$$

eine davon verschiedene

$$2u = d''\delta'' + d'\delta'.$$

Demnach dürfen die Zeichen d', d'' in der zweiten Summe durchweg vertauscht werden, d. h. sie ist der ersten gleich, und die vorige Gleichung nimmt die Gestalt an:

$$\sum d'^3 d'' = \sum t^5,$$

woraus dann, ähnlich der Gleichung (21), die Beziehung

$$\sum_{2u = s' + s''} \zeta_3(s') \zeta_1(s'') = \zeta_5(u) \tag{22}$$

hervorgeht. Nun ist

$$16u = 8s' + 2 \cdot 4s''.$$

Nach der zuvor festgestellten Bedeutung der Funktionswerte $\zeta_3(s')$, $\zeta_1(s'')$ für ungerade Argumente liest man also aus der gefundenen Beziehung nachstehenden Satz ab: Die Anzahl der Zergliederungen der Zahl $16u$ in eine Summe $8s'$ von acht Quadraten positiver ungerader Zahlen, wo s' ungerade, und in das Doppelte einer Summe von vier Quadraten solcher Zahlen ist gleich der Summe der fünften Potenzen aller Teiler von u.

In dieser Richtung kann man weitergehen und findet, wenn in (16c)

$$\psi(x) = x^{2i}$$

gesetzt wird, als Verallgemeinerung der Formeln (21), (22) die folgende:

$$(23)\quad \begin{cases} 2^{2i-1}\cdot\zeta_{2i+1}(u) \\ = \frac{2i}{1}\cdot\sum\zeta_{2i-1}(s')\,\zeta_1(s'') + \frac{2i(2i-1)(2i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\sum\zeta_{2i-3}(s')\,\zeta_3(s'') \\ \quad + \cdots + \frac{2i}{1}\cdot\sum\zeta_1(s')\cdot\zeta_{2i-1}(s''). \end{cases}$$

5. Aus der Formel (21) hat *Liouville* noch einen andersartigen Satz hergeleitet, indem er sich zu diesem Zwecke auf einen auch an sich beachtenswerten Hilfssatz über die Funktion $\zeta_1(s)$ stützte.

Es sei, in Primfaktoren zerlegt,

$$(24)\qquad s = 2^h\cdot p^a q^b \cdots.$$

Dann ist bekanntlich

$$\zeta_1(s) = (1+2+2^2+\cdots+2^h)\cdot(1+p+p^2\cdots+p^a)(1+q+\cdots+q^b)\cdots$$

Der erste Faktor dieses Produktes ist immer ungerade; die folgenden sind gerade oder ungerade, je nachdem resp. $a, b, \ldots$ ungerade oder gerade sind. Daher ist $\zeta_1(s)$ immer ungerade, wenn s eine Quadratzahl oder das Doppelte einer solchen ist; dagegen gerade in jedem andern Falle. Untersuchen wir nun, wann $\zeta_1(s) \equiv 2 \pmod{4}$ ist. Damit es gerade, muß einer der Exponenten $a, b, \ldots$ ungerade sein; damit es nicht durch 4 aufgehe, auch nur einer derselben. Sei dies etwa der Exponent a, so ist

$$\begin{aligned} 1+p+p^2+\cdots+p^a &= (1+p)(1+p^2+p^4+\cdots+p^{a-1}) \\ &\equiv (1+p)\cdot\frac{a+1}{2} \pmod{4}; \end{aligned}$$

damit zugleich mit diesem Faktor $\zeta_1(s)$ nicht durch 4 aufgehe, muß $p\equiv 1$, $a\equiv 1 \pmod{4}$ sein, und alsdann wird er und sonach auch $\zeta_1(s)$ tatsächlich $\equiv 2 \pmod{4}$. Man gelangt so zu dem Satze:

Damit $\zeta_1(s)\equiv 2 \pmod{4}$, ist notwendig und hinreichend, daß s von einer der Formen:

$$s = p^{4\alpha+1}\cdot y^2 \text{ oder } s = p^{4\alpha+1}\cdot 2y^2$$

sei, worin p eine Primzahl von der Form $4k+1$.

Mit Hilfe dieses Satzes schließt man nun aus (21) den folgenden:

Das Doppelte einer Primzahl $\tilde{\omega}$ von der Form $8i+3$ ist auf mindestens eine und stets auf eine ungerade Anzahl Arten in der Form

$$2\tilde{\omega} = x^2 + p^{4\alpha+1}\cdot y^2$$

darstellbar, worin p eine Primzahl von der Form $8h+5$ ist. Man schreibe, um dies zu beweisen, die Gleichung (21) mit Rücksicht auf die Bedingung $2u = s' + s''$ in der Gestalt:

$$\zeta_1(1) \cdot \zeta_1(2u-1) + \zeta_1(3) \cdot \zeta_1(2u-3) + \cdots + \zeta_1(2u-1) \cdot \zeta_1(1) = \zeta_3(u)$$

oder, die gleichen Glieder zusammenfassend, in der folgenden:

$$(25)\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\zeta_3(u) - \zeta_1(u)^2\right) \\ = \zeta_1(1) \cdot \zeta_1(2u-1) + \zeta_1(3) \cdot \zeta_1(2u-3) + \cdots + \zeta_1(u-1) \cdot \zeta_1(u+1). \end{cases}$$

Wenn nun die Gleichung

$$2u = x^2 + y^2$$

unmöglich ist, so können in der Zerfällung

$$2u = s' + s'' = s' + (2u - s')$$

nicht beide ungerade gedachten Summanden Quadrate sein, und daher wird in jedem Gliede

$$(26) \qquad \zeta_1(s') \cdot \zeta_1(2u - s')$$

des Ausdrucks (25) mindestens ein Faktor, also jedes Glied selbst gerade sein. Ist ferner die linke Seite von (25) eine zwar gerade aber nicht durch 4 teilbare Zahl, so muß eine ungerade Anzahl der Glieder (26) kongruent 2 (mod. 4), also einer der Faktoren $\zeta_1(s')$, $\zeta_1(2u - s')$ ungerade, der andere kongruent 2 (mod. 4) sein; nach dem voraufgeschickten Hilfssatze muß also, unter p eine Primzahl von der Form $4k+1$ verstanden, etwa

$$s' = x^2, \; 2u - s' = p^{4\alpha+1} \cdot y^2$$

sein. Es wird dann also eine ungerade Anzahl von Malen

$$2u = x^2 + p^{4\alpha+1} \cdot y^2.$$

Nun sind die gemachten zwei Voraussetzungen erfüllt, wenn $u = \tilde{\omega} = 8i + 3$ gewählt wird. Denn für eine solche Primzahl wird

$$\frac{1}{2}\left(\zeta_3(\tilde{\omega}) - \zeta_1(\tilde{\omega})^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \tilde{\omega}^3 - (1 + \tilde{\omega})^2\right)$$
$$= 2 \cdot (8i + 3)(16i^2 + 10i + 1) \equiv 2 \pmod{4}$$

und die Gleichung

$$2\tilde{\omega} = x^2 + y^2$$

ist unmöglich. Also findet sich die Gleichung

$$2\tilde{\omega} = x^2 + p^{4\alpha+1} \cdot y^2$$

eine ungerade Anzahl von Malen erfüllt. Da hieraus aber die Kongruenz

$$6 \equiv 1 + (4k + 1) \equiv 4k + 2 \pmod{8}$$

d. h. k als ungerade hervorgeht, hat die Primzahl p die Form $8h+5$, wie behauptet.

Wir haben diesen Satz, dem wir bald einen zweiten analogen werden folgen lassen, hier mitgeteilt, nicht allein der eigentümlichen Beweismethode wegen, sondern um eine ganze Kategorie zahlreicher Sätze gleicher Art zu kennzeichnen, welche *Liouville* in den Bänden (2) 4ff. des Journal des Math. ohne weitere Beweise aufgestellt hat.

6. Kehren wir zu dem allgemeinen Falle der Nr. 2 und zu der ihm entsprechenden Formel (14) zurück.

Die in letzterer auftretende zweite Summe bezieht sich auf diejenigen Zerfällungen

$$s = d'\delta' + d''\delta'',$$

in denen $d' > d''$ und $\frac{d''}{d'-d''}$ eine ganze Zahl ist. Setzt man diese gleich k und $d'-d''=d$, so findet man

$$d'' = kd,\ d' = (k+1)d,$$

also muß d ein Teiler von s, und wenn demgemäß

$$s = d\delta \tag{27}$$

gesetzt wird,

$$\delta = k(\delta'+\delta'')+\delta' \tag{28}$$

sein. Hiernach ist $\delta > 2$ und, da δ' positiv zu denken ist, $\delta'+\delta'' < \delta$. Das allgemeine Glied der Summe geht über in $f(d,\ \delta'+\delta'')$ und, um die ganze Summe zu erhalten, ist jede Zerfällung (27) zu berücksichtigen, in welcher $\delta > 2$ ist, und ihr entsprechend für $\delta'+\delta''$ jeder der Werte $2, 3, \ldots, \delta-1$, durch welchen geteilt δ einen positiven Rest δ' gibt, d. h. welcher in δ nicht aufgeht. Die Formel (14) geht auf solche Weise in die andere:

$$\left\{\begin{aligned} S &= \sum_{s=d\delta}(\delta-1)\cdot f(0,\ \delta) \\ &+ 2\cdot\sum_{s=d\delta,\ \delta>2}{}^{'}\big(f(d,\ 2)+f(d,\ 3)+\cdots+f(d,\ \delta-1)\big) \end{aligned}\right. \tag{29}$$

über, wo der Akzent beim Summenzeichen jetzt andeuten soll, daß diejenigen Glieder $f(d,\ i)$ in der Klammer gleich Null zu setzen sind, bei denen i ein Teiler von δ ist.

Die Bedingungen (1), denen die Funktionswerte $f(x, y)$ unterworfen waren, sind u. a. erfüllt, wenn man, unter $\varphi(x)$ eine gerade Funktion von x verstehend, so daß $\varphi(-x) = \varphi(x)$ ist,

$$f(x,\ y) = \varphi(x) - \varphi(y)$$

wählt. Alsdann nimmt die allgemeine Formel (29) die besondere Gestalt an:

$$(30)\quad \begin{cases} \sum\limits_{s=d'\delta'+d''\delta''}\big(\varphi(d'-d'')-\varphi(\delta'+\delta'')\big) \\ \quad =\sum\limits_{s=d\delta}(\delta-1)\cdot\big(\varphi(0)-\varphi(\delta)\big) \\ +\,2\cdot\sum{}'\big(\varphi(d)+\varphi(d)+\cdots+\varphi(d)\big) \\ -\,2\cdot\sum\limits_{s=d\delta,\,\delta>2}{}'\big(\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(\delta-1)\big); \end{cases}$$

in der ersten der akzentuierten Summen steht die Funktion $\varphi(d)$ so oft, als in der Reihe 2, 3, ... $\delta-1$ oder, was dasselbe sagt, in der Reihe 1, 2, 3, ... $\delta-1$, δ Zahlen vorhanden sind, welche keine Teiler von δ sind; zählt man $\varphi(d)$ also δ mal, so hat man so oft zuviel gezählt, als in jener Reihe Teiler von δ sind, d. h. in *Liouville*scher Bezeichnungsweise $\zeta(\delta)$ mal, und daher kann jene Summe ersetzt werden durch

$$2\cdot\sum\big(\delta-\zeta(\delta)\big)\cdot\varphi(d)$$

und zwar ohne die Beschränkung $\delta>2$, da für $\delta=1,\ 2$ sich $\delta-\zeta(\delta)=0$ ergibt. Da ferner in der ersten Summe zur Rechten von (30) δ jeden Teiler von s bedeutet, kann darin δ durch d ersetzt werden, welches die gleiche Bedeutung hat, und so verwandelt sich die Gleichung (30) in die folgende:

$$(31)\quad \begin{cases} \sum\limits_{s=d'\delta'+d''\delta''}\big(\varphi(d'-d'')-\varphi(\delta'+\delta'')\big) \\ =\big(\zeta_1(s)-\zeta(s)\big)\cdot\varphi(0)+\sum\limits_{s=d\delta}\big(2\delta-2\zeta(\delta)-d+1\big)\cdot\varphi(d) \\ -\,2\cdot\sum\limits_{s=d\delta,\,\delta>2}{}'\big(\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(\delta-1)\big). \end{cases}$$

Beachtet man, daß, wenn die lateinischen mit den griechischen Buchstaben vertauscht werden, sich nur die beiden Zerfällungen

$$s=d'\delta'+d''\delta'',\quad s=\delta'd'+\delta''d''$$

miteinander vertauschen, oder, falls $\delta'=d'$, $\delta''=d''$ wäre, die Zerfällung unverändert bleibt, so sieht man, daß offenbar

$$\sum\varphi(\delta'+\delta'')\ \text{durch}\ \sum\varphi(d'+d'')$$

ersetzt, die linke Seite der Formel also auch in der Form

$$(31\text{a})\qquad \sum\big(\varphi(d'-d'')-\varphi(d'+d'')\big)$$

geschrieben werden darf.

7. Aus dieser neuen *Liouville*schen Formel folgern wir sogleich wieder einige interessante zahlentheoretische Sätze.

Wählen wir darin $\varphi(x) = x^2$, so geht die linke, in der zuletzt angegebenen Weise geschriebene Seite über in

$$-4 \cdot \sum d'd'' = -4 \sum_{s=s'+s''} \zeta_1(s') \cdot \zeta_1(s''),$$

und die rechte Seite in

$$\sum_{s=d\delta} \left(2\delta - 2\zeta(\delta) - d + 1\right) d^2 - 2 \cdot \sum_{s=d\delta,\, \delta>2}' \left(2^2 + 3^2 + \cdots + (\delta-1)^2\right).$$

In der akzentuierten Summe sind diejenigen Quadrate t^2 wegzulassen, in denen t ein Teiler von δ ist. Man kann die Summe also schreiben, wie folgt:

$$\sum \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \delta^2 - \sum_{\delta=t\tau} t^2\right)$$
$$= \sum \left(\frac{\delta(\delta+1)(2\delta+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \zeta_2(\delta)\right),$$

wo die Summation über alle Teiler $\delta > 2$ der Zahl s zu erstrecken ist, doch auch $\delta = 1$, 2 umfassen darf, da alsdann das Glied unter dem Summenzeichen verschwindet. Mit Rücksicht hierauf formt sich die rechte Seite der Gleichung leicht um in den Ausdruck:

$$-\frac{5}{3} \cdot \zeta_3(s) + \frac{6s-1}{3} \cdot \zeta_1(s) - 2 \cdot \sum_{s=d\delta} [d^2 \zeta(\delta) - \zeta_2(\delta)].$$

Nun ist

$$\sum_{s=d\delta} \zeta_2(\delta) = \sum_{s=d\tau \cdot t} t^2 = \sum_{s=tt'} t^2 \cdot \zeta(t'),$$

mithin verschwindet das Summenglied des Ausdrucks und folglich geht endlich nachstehende Gleichung hervor:

$$(32) \qquad \sum_{s=s'+s''} \zeta_1(s') \zeta_1(s'') = \frac{5}{12} \cdot \zeta_3(s) - \frac{6s-1}{12} \cdot \zeta_1(s),$$

wie sie von *Lebesgue* (J. des Math. (2) 7 (1862), S. 256) gegeben worden ist.

Für den besonderen Fall einer Primzahl s gab sie schon *Liouville* im vierten seiner Artikel (ebendas. (2) 3, S. 241). Alsdann lautet sie

$$(32\text{a}) \qquad \sum_{s=s'+s''} \zeta_1(s') \zeta_1(s'') = \frac{(s^2-1)(5s-6)}{12},$$

oder, ausführlicher geschrieben:

$$(32\text{b}) \quad \zeta_1(1) \cdot \zeta_1(s-1) + \zeta_1(3) \cdot \zeta_1(s-3) + \cdots + \zeta_1\left(\frac{s-1}{2}\right) \cdot \zeta_1\left(\frac{s+1}{2}\right) = \frac{(s^2-1)(5s-6)}{24},$$

und aus dieser Formel erschließt sich nun wieder ein ähnlicher Satz,

wie der in Nr. 5 aus der Formel (21) gezogene. Wenn nämlich die Primzahl s von der Form $16k + 7$ ist, so ist jede der Gleichungen

$$s = x^2 + y^2, \; s = x^2 + 2y^2$$

unmöglich; demnach können in der Zerfällung $s = s' + s''$ die Summanden, deren einer notwendig gerade, der andere ungerade ist, weder zugleich Quadrate, noch einer ein Quadrat, der andere das Doppelte eines solchen sein. Auf alle Fälle ist also nach dem in Nr. 5 gegebenen Hilfssatze das Produkt $\zeta_1(s') \cdot \zeta_1(s'')$ eine gerade Zahl. Nun überzeugt man sich aber leicht, daß für eine Primzahl s von der bezeichneten Form die rechte Seite der letzten Gleichung kongruent 2 (mod. 4) ist, daher können die Glieder der linken Seite, ob sie schon gerade sind, doch nicht sämtlich durch 4 teilbar sein, vielmehr hat eine ungerade Anzahl derselben den Rest 2 (mod. 4), und demnach ist in jedem Gliede

$$\zeta_1(s') \cdot \zeta_1(s'')$$

dieser Art einer der Faktoren ungerade, der andere $\equiv 2$ (mod. 4), also eine der Zahlen s', s'' ein Quadrat oder das Doppelte eines solchen, und die andere von einer der Formen

$$p^{4\alpha+1} \cdot y^2 \text{ oder } p^{4\alpha+1} \cdot 2y^2,$$

mithin entweder etwa

$$s' = x^2, \quad s'' = p^{4\alpha+1} \cdot 2y^2, \text{ wo } x \text{ ungerade,}$$

oder

$$s' = x^2, \quad s'' = p^{4\alpha+1} \cdot y^2, \quad \text{wo } x \text{ gerade, } y \text{ ungerade, oder umgekehrt,}$$

oder

$$s' = 2x^2, \; s'' = p^{4\alpha+1} \cdot y^2, \quad \text{wo } y \text{ ungerade.}$$

Von den entsprechenden Gleichungen

$$s = x^2 + p^{4\alpha+1} \cdot 2y^2$$
$$s = x^2 + p^{4\alpha+1} \cdot y^2$$
$$s = 2x^2 + p^{4\alpha+1} \cdot y^2$$

ist aber, wie man aus den Resten der Quadrate (mod. 16) unschwer erkennt, da zudem dem Hilfssatze gemäß $p \equiv 1$ (mod. 4) zu denken ist, nur die letzte mit der angenommenen Linearform $16k + 7$ der Zahl s verträglich, und zwar muß dann genauer $p \equiv 5$ (mod. 8) sein. Man erhält demnach den folgenden Satz, den *Liouville Bouniakowsky* zuschreibt: Jede Primzahl $\tilde{\omega}$ von der Form $16k + 7$ läßt sich stets und zwar auf eine ungerade Anzahl von Arten in der Form

$$\tilde{\omega} = 2x^2 + p^{4\alpha+1} \cdot y^2$$

darstellen, in welcher p eine Primzahl von der Form $8h + 5$.

8. Zur Formel (29) zurückkehrend, setzen wir in derselben

$$f(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi(y, x)$$

und nehmen die Funktion $\varphi(x, y)$, um den Bedingungen (1) zu genügen, als eine bezüglich beider Argumente gerade Funktion an, so daß

$$\varphi(-x, y) = \varphi(x, y) = \varphi(x, -y) \tag{33}$$

ist. So erhalten wir die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{s=d'\delta'+d''\delta''}[\varphi(d'-d'', \delta'+\delta'') - \varphi(\delta'+\delta'', d'-d'')] \\ &= \sum_{s=d\delta}(\delta-1)\big(\varphi(0, \delta) - \varphi(\delta, 0)\big) \\ &+ 2\cdot{\sum}'\big(\varphi(d, 2) + \varphi(d, 3) + \cdots + \varphi(d, \delta-1)\big) \\ &- 2\cdot\sum_{s=d\delta,\ \delta>2}{}'\big(\varphi(2, d) + \varphi(3, d) + \cdots + \varphi(\delta-1, d)\big). \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Wegen der ersichtlich erlaubten Vertauschung der lateinischen mit den griechischen Buchstaben darf die linke Seite auch geschrieben werden wie folgt:

$$\sum_{s=d'\delta'+d''\delta''}[\varphi(d'-d'', \delta'+\delta'') - \varphi(d'+d'', \delta'-\delta'')]. \tag{35}$$

Nun nehmen wir an, die Zahl s sei ungerade, so daß in der Zerfällung

$$s = s' + s'' = d'\delta' + d''\delta'' \tag{36}$$

einer der Summanden s', s'' gerade, der andere ungerade ist. Dann sind die beiden Zerfällungen

$$s = d'\delta' + d''\delta'', \quad s = d''\delta'' + d'\delta',$$

welche durch Vertauschung von d', δ' mit d'', δ'' resp. entstehen, stets zwei verschiedene Zerfällungen. Faßt man daher in der Summe (35) immer die beiden ihnen entsprechenden Summanden

$$\varphi(d'-d'', \delta'+\delta'') - \varphi(d'+d'', \delta'-\delta'')$$
$$\varphi(d''-d', \delta''+\delta') - \varphi(d''+d', \delta''-\delta'),$$

welche nach den vorausgesetzten Gleichungen (33) einander gleich sind, zusammen, so darf (35) einfacher geschrieben werden gleich

$$2\cdot\sum_{s=d'\delta'+d''\delta'',\ d'\delta'\ \text{ungerade}}[\varphi(d'-d'', \delta'+\delta'') - \varphi(d'+d'', \delta'-\delta'')], \tag{37}$$

wobei man sich auf diejenigen Zerfällungen (36) zu beschränken hat, in welchen $s' = d'\delta'$ ungerade und demgemäß $s'' = d''\delta''$ gerade ist. Man setze dementsprechend

$$s' = s_1, \quad s'' = 2^i \cdot s_2,$$

wo s_1, s_2 ungerade, und betrachte alle Zerfällungen

$$s = s_1 + 2^i \cdot s_2 = d_1 \delta_1 + 2^i \cdot d_2 \delta_2. \tag{36'}$$

Die Zerfällungen $s_1 = d_1 \delta_1$ stimmen insgesamt mit denen von $s' = d' \delta'$ überein, so daß $d_1 = d'$, $\delta_1 = \delta'$ gesetzt werden kann; die Zerfällungen $s'' = d'' \delta''$, in welchen δ'' ungerade ist, sind insgesamt mit denjenigen von $s'' = 2^i \cdot s_2$ identisch, bei welchen δ'' ein Teiler von s_2 ist, d. h. man darf $\delta'' = \delta_2$ und dann $d'' = 2^i d_2$ denken. Beschränkt man sich also auf diejenigen Zerfällungen (36), bei welchen

$d' \delta'$ ungerade und zugleich $\delta' + \delta''$ gerade

ist, womit zugleich δ' und δ'' ungerade werden, so darf man setzen

$$d_1 = d', \quad \delta_1 = \delta', \quad d'' = 2^i d_2, \quad \delta'' = \delta_2.$$

Auf diese Zerfällungen aber darf man sich im Ausdrucke (37) beschränken, wenn man jetzt die Funktion $\varphi(x, y)$, was mit den Bedingungen (33) verträglich ist, als eine solche voraussetzt, die für jeden ungeraden Wert von y verschwindet. Alsdann geht demnach der Ausdruck (37) über in diesen:

$$2 \cdot \sum_{s = d_1 \delta_1 + 2^i d_2 \delta_2} [\varphi(d_1 - 2^i d_2, \ \delta_1 + \delta_2) - \varphi(d_1 + 2^i d_2, \ \delta_1 - \delta_2)]. \tag{38}$$

Während so den gemachten Voraussetzungen entsprechend die linke Seite der Formel (34) bestimmt ist, geht zur Rechten derselben die erste Summe, da δ ungerade ist, in

$$-\sum_{s = d\delta} (\delta - 1) \cdot \varphi(\delta, 0) = -\sum_{s = d\delta} (d - 1) \cdot \varphi(d, 0)$$

über. In der ersten der akzentuierten Summen fallen diejenigen Funktionswerte $\varphi(d, i)$ aus, deren zweites Argument ungerade ist; da andererseits ein gerades i niemals Teiler der ungeraden Zahl δ sein kann, fällt für sie die durch den Akzent angedeutete Beschränkung fort, und die ganze Summe wird einfach

$$2 \cdot \sum [\varphi(d, 2) + \varphi(d, 4) + \cdots + \varphi(d, \delta - 1)].$$

Endlich verschwindet die ganze zweite der akzentuierten Summen, da d ungerade ist, und man erhält schließlich die neue *Liouville*sche Formel:

$$\left\{ \begin{aligned} & 2 \cdot \sum_{s = d_1 \delta_1 + 2^i d_2 \delta_2} [\varphi(d_1 - 2^i d_2, \ \delta_1 + \delta_2) - \varphi(d_1 + 2^i d_2, \ \delta_1 - \delta_2)] \\ & = \sum_{s = d\delta} [\varphi(d, 0) + 2\varphi(d, 2) + 2\varphi(d, 4) + \cdots + 2\varphi(d, \delta - 1) - d\varphi(d, 0)]. \end{aligned} \right. \tag{39}$$

Da durch sie nur zwischen Funktionswerten, in denen das zweite Argument gerade ist, eine Beziehung festgestellt wird, muß das Verhalten der Funktion φ bei ungeradem zweiten Argumente dafür unerheblich sein; sie gilt demnach, sobald nur die Funktion φ für die in Frage kommenden Argumente die Bedingungen (33) erfüllt.

9. Wir heben zwei besondere Fälle dieser Gleichung hervor.

Wird

$$\varphi(x, y) = f(x) = f(-x)$$

als unabhängig von y vorausgesetzt, so kommt rechts unter dem Summenzeichen die Funktion $f(d)$

$$1 + 2 \cdot \frac{\delta - 1}{2} - d = \delta - d$$

mal vor, also nimmt die Gleichung (39) die Gestalt an:

$$\text{(39a)} \qquad 2 \cdot \sum_{s = d_1\delta_1 + 2^i d_2\delta_2} [f(d_1 - 2^i d_2) - f(d_1 + 2^i d_2)] = \sum_{s = d\delta} (\delta - d) \cdot f(d).$$

Setzt man dagegen

$$\varphi(x, y) = f(y) = f(-y)$$

also von x unabhängig voraus, so erhält man

$$\text{(39b)} \quad \begin{cases} 2 \cdot \sum\limits_{s = d_1\delta_1 + 2^i d_2\delta_2} [f(\delta_1 - \delta_2) - f(\delta_1 + \delta_2)] \\ = f(0) \cdot \zeta_1(s) - \sum\limits_{s = d\delta} [f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \cdots + 2f(\delta - 1)]. \end{cases}$$

Wählt man hier insbesondere, indem man bemerkt, daß nur geradzahlige Werte des Arguments y auftreten,

$$f(y) = (-1)^{\frac{y}{2}},$$

so wird das allgemeine Glied der Summe zur Linken, da

$$(-1)^{\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}} = (-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2} + \frac{\delta_2 - 1}{2}} = (-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}}$$

$$-(-1)^{\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}} = (-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}}$$

ist, gleich $2 \cdot (-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}}$, die linke Seite selbst also gleich

$$4 \cdot \sum (-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}} = 4 \cdot \sum_{s = s_1 + 2^i s_2} \varrho(s_1)\varrho(s_2).$$

Das allgemeine Glied der Summe zur Rechten wird

$$1 + 2 \cdot (-1)^1 + 2 \cdot (-1)^2 + \cdots + 2 \cdot (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} = (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}},$$

die Summe also gleich
$$\sum_{s=d\delta}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} = \varrho(s),$$
und daher nimmt die Gleichung (39b) die Gestalt an:
$$(40) \qquad 4\cdot\sum_{s=s_1+2^i s_2}\varrho(s_1)\cdot\varrho(s_2) = \zeta_1(s) - \varrho(s).$$

Da nun s, s_1 und s_2 ungerade vorausgesetzt sind und
$$2s = 2s_1 + 2^i\cdot 2s_2$$
ist, so bedeutet die Summe zur Linken offenbar die Anzahl der Darstellungen von $2s$ in der Form
$$(41) \qquad 2s = x^2 + y^2 + 2^i(z^2+t^2)$$
bei allen möglichen positiven Exponenten i und positiven ungeraden x, y, z, t, oder auch die Anzahl der Darstellungen von s in der Form
$$(42) \qquad s = x^2 + 4y^2 + 2^i(z^2+4t^2)$$
bei allen möglichen positiven Exponenten i und ganzen Zahlen x, y, z, t, von denen x, z positiv und ungerade sind. Die Gleichung (40) spricht sich daher aus in dem Satze:

Die vierfache Anzahl der Darstellungen des Doppelten einer ungeraden Zahl s in der Form (41) oder die vierfache Anzahl der Darstellungen dieser Zahl selbst in der Form (42) bei der bezeichneten Beschaffenheit der Zahlen i, x, y, z, t ist gleich dem Überschusse der Anzahl der Zergliederungen von $4s$ in vier, über die Anzahl der Zergliederungen von $2s$ in zwei Quadrate positiver ungerader Zahlen.

Wird dagegen in (39b) $f(y) = y^2$, in (39a) $f(x) = x^2$ gewählt, so entstehen die nachfolgenden zwei besonderen Formeln:
$$8\cdot\sum_{s=d_1\delta_1+2^i d_2\delta_2}\delta_1\delta_2 = 8\cdot\sum_{s=d\delta}\left(1^2+2^2+\cdots+\left(\frac{\delta-1}{2}\right)^2\right),$$
d. i., weil
$$1^2+2^2+\cdots+\left(\frac{\delta-1}{2}\right)^2 = \frac{\frac{\delta-1}{2}\cdot\frac{\delta+1}{2}\cdot\delta}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{\delta^3-\delta}{24}$$
ist, einfacher
$$(43) \qquad \sum_{s=s_1+2^i s_2}\zeta_1(s_1)\cdot\zeta_1(s_2) = \frac{1}{24}\left(\zeta_3(s)-\zeta_1(s)\right);$$
und
$$8\cdot\sum_{s=d_1\delta_1+2^i d_2\delta_2} d_1\cdot 2^i d_2 = \sum(d-\delta)d^2 = \sum_{s=d\delta}d^3 - s\cdot\sum_{s=d\delta}d$$
oder einfacher
$$(44) \qquad \sum_{s=s_1+2^i s_2}2^i\zeta_1(s_1)\zeta_1(s_2) = \frac{1}{8}\left(\zeta_3(s) - s\cdot\zeta_1(s)\right).$$

Auch diese Formeln führen zu ähnlichen Sätzen, wie die Formel (40), doch fällt ihre Aussage bedeutend umständlicher aus.

10. Die *Liouville*sche Formel, die wir nun ableiten wollen, setzt wieder s als das Doppelte einer ungeraden Zahl

$$s = 2u$$

voraus und bezieht sich auf ihre Zerfällungen

$$2u = s' + s''$$

in zwei ungerade Summanden, die auf alle Weise in je zwei positive Faktoren zu zerlegen sind, d. i. auf alle Zerfällungen

$$2u = d'\delta' + d''\delta'' \tag{45}$$

in positiven ungeraden Zahlen d', δ', d'', δ''. Sei $F(x, y)$ eine für alle vorkommenden Werte von x, y gegebene Funktion mit den Eigenschaften, daß

$$F(x, -y) = F(x, y), \quad F(-x, y) = -F(x, y), \quad F(0, y) = 0 \tag{46}$$

sei. Wir versuchen, die Summe

$$S = \sum_{2u=d'\delta'+d''\delta''} (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \cdot [F(d'+d'', \delta'-\delta'') + F(d'-d'', \delta'+\delta'')] \tag{47}$$

zu ermitteln. Da eine Vertauschung der lateinischen mit den griechischen Buchstaben nur zwei Zerfällungen miteinander vertauscht oder keine Veränderung hervorbringt, läßt sich die Summe S zunächst folgendermaßen schreiben:

$$S = \sum\left[(-1)^{\frac{d''-1}{2}} \cdot F(d'+d'', \delta'-\delta'') + (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \cdot F(\delta'-\delta'', d'+d'')\right]. \tag{47'}$$

Wir unterscheiden nun die Zerfällungen wieder in zwei Klassen. In der ersten sind δ', δ'' gleich, ihr gemeinsamer Wert δ also ein Teiler von u, so daß $u = d\delta$ gesetzt werden kann und dann

$$2d = d' + d'' \tag{48}$$

wird. Der diesen Zerfällungen entsprechende Bestandteil der Summe S, den wir kurz S_0 nennen, wird wegen (46)

$$S_0 = \sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \cdot F(2d, 0)$$

d. h., da d'' wegen (48) die ungeraden Zahlen $1, 3, \ldots, 2d-1$ zu durchlaufen hat, und somit

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{d-1} = 1$$

ist,

$$S_0 = \sum_{u=d\delta} F(2d, 0). \tag{49}$$

In der zweiten Klasse der Zerfällungen sind die folgenden beiden

$$2u = d'\delta' + d''\delta'',\ 2u = d''\delta'' + d'\delta'$$

stets voneinander verschieden, da δ', δ'' es sind, und wir dürfen voraussetzen, daß etwa $\delta' > \delta''$ sei. In der Summe S geben sie zusammengenommen den Ausdruck

$$(-1)^{\frac{d''-1}{2}} \cdot F(d' + d'',\ \delta' - d'') + (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \cdot F(\delta' - \delta'',\ d' + d'')$$
$$+ (-1)^{\frac{d'-1}{2}} \cdot F(d'' + d',\ \delta'' - \delta') + (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} \cdot F(\delta'' - \delta',\ d'' + d'),$$

der nach den Voraussetzungen (46) gleich

$$\left((-1)^{\frac{d'-1}{2}} + (-1)^{\frac{d''-1}{2}}\right) \cdot F(d' + d'',\ \delta' - \delta'')$$
$$+ \left((-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} - (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}\right) \cdot F(\delta' - \delta'',\ d' + d'')$$

ist. Nennen wir also S_1 den der zweiten Klasse entsprechenden Bestandteil der Summe S, so erhalten wir

$$(50)\quad \left\{ \begin{aligned} S_1 = \sum \Bigg[& \left((-1)^{\frac{d'-1}{2}} + (-1)^{\frac{d''-1}{2}}\right) \cdot F(d' + d'',\ \delta' - \delta'') \\ & + \left((-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} - (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}\right) \cdot F(\delta' - \delta'',\ d' + d'') \Bigg], \end{aligned} \right.$$

worin nun nur noch über alle diejenigen Zerfällungen (45) zu summieren ist, bei welchen $\delta' > \delta''$ ist. Je zwei dieser letzteren lassen sich aber wieder zusammenordnen. Schreibt man nämlich die Zerfällung (45) wie folgt:

$$(45\text{a})\qquad 2u = (d' + d'')\,\delta'' + (\delta' - \delta'')d'$$

und setzt

$$(51)\quad \left\{ \begin{aligned} & d_1 = \delta'' - \theta(\delta' - \delta''), \quad \delta_1 = d' + (\theta + 1)\,(d' + d'') \\ & d_2 = (\theta + 1)\,(\delta' - \delta'') - \delta'', \quad \delta_2 = d' + \theta(d' + d''), \end{aligned} \right.$$

so findet sich

$$(52)\qquad \delta_1 - \delta_2 = d' + d'',\quad d_1 + d_2 = \delta' - \delta''$$

und die neue Zerfällung von $2u$:

$$(53)\quad \begin{aligned} 2u & = (\delta_1 - \delta_2)\left(d_1 + \theta\,(\delta' - \delta'')\right) + (\delta' - \delta'')\left(\delta_2 - \theta\,(d' + d'')\right) \\ & = (\delta_1 - \delta_2)\,d_1 + (d_1 + d_2)\,\delta_2 = d_1\delta_1 + d_2\delta_2 \end{aligned}$$

in ganzen ungeraden Zahlen, von denen $\delta_1 > \delta_2$ ist, falls θ als ganze Zahl gedacht wird. Damit sie auch positiv werden, ist θ nur auf eine einzige Weise wählbar, nämlich als das größte in der offenbar gebrochenen Zahl $\frac{\delta''}{\delta' - \delta''}$ enthaltene Ganze

$$(54)\qquad \theta = \left[\frac{\delta''}{\delta' - \delta''}\right].$$

Da aus der Substitution (51)

$$\frac{\delta_2}{\delta_1 - \delta_2} = \frac{d'}{d' + d''} + \theta$$

hervorgeht, ist zugleich auch

$$(55) \qquad \theta = \left[\frac{\delta_2}{\delta_1 - \delta_2}\right],$$

und man erkennt, wie in früheren Fällen, daß die beiden Zerfällungen (45) und (53) eindeutig umkehrbar einander zugeordnet sind. Addieren wir nun die je zwei solchen Zerfällungen zugehörigen Glieder der Summe S_1:

$$(56) \quad \begin{cases} \left((-1)^{\frac{d'-1}{2}} + (-1)^{\frac{d''-1}{2}}\right) \cdot F(d' + d'', \delta' - \delta'') \\ + \left((-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} - (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}\right) \cdot F(\delta' - \delta'', d' + d'') \\ + \left((-1)^{\frac{d_1-1}{2}} + (-1)^{\frac{d_2-1}{2}}\right) \cdot F(d_1 + d_2, \delta_1 - \delta_2) \\ + \left((-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} - (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}}\right) \cdot F(\delta_1 - \delta_2, d_1 + d_2). \end{cases}$$

Wegen (45a) muß eine der Zahlen $d' + d''$, $\delta' - \delta''$, welche beide gerade sind, durch 4, die andere nur durch 2 aufgehen. Ist e r s t e n s $d' + d'' \equiv 0$, $\delta' - \delta'' \equiv 2 \pmod{4}$, so ist wegen (52)

$$d_1 + d_2 \equiv 2, \; \delta_1 - \delta_2 \equiv 0 \pmod{4}$$

und der Ausdruck (56) geht mit Rücksicht auf dieselben Beziehungen in

$$2 \cdot \left((-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} + (-1)^{\frac{d_1-1}{2}}\right) \cdot F(d_1 + d_2, \delta_1 - \delta_2)$$

über und verschwindet, wenn θ ungerade ist, da nach (51)

$$d_1 \equiv \delta'' + 2\theta \pmod{4}$$

gefunden wird, verwandelt sich dagegen in

$$4 \cdot (-1)^{\frac{d_1-1}{2}} \cdot F(d_1 + d_2, \delta_1 - \delta_2),$$

wenn θ gerade ist.

Ist aber z w e i t e n s umgekehrt $d' + d'' \equiv 2$, $\delta' - \delta'' \equiv 0$, also auch

$$d_1 + d_2 \equiv 0, \; \delta_1 - \delta_2 \equiv 2 \pmod{4},$$

so verwandelt sich (56) in

$$2 \cdot \left((-1)^{\frac{d'-1}{2}} + (-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}}\right) \cdot F(d' + d'', \delta' - \delta'')$$

d. i., da nach (51)

$$\delta_2 \equiv d' + 2\theta \pmod{4}$$

ist, je nachdem θ ungerade oder gerade ist, in Null oder in

$$4 \cdot (-1)^{\frac{d'-1}{2}} \cdot F(d' + d'', \delta' - \delta'').$$

Ist also θ ungerade, so zerstören sich die Beiträge, welche je zwei zugeordnete Zerfällungen der zweiten Klasse zur Summe S_1 liefern; für gerades θ dagegen ist — so können wir sagen — ihr gesamter Beitrag gleich dem Ausdrucke

$$4 \cdot (-1)^{\frac{d'-1}{2}} \cdot F(d' + d'', \delta' - \delta'')$$

für diejenige der beiden Zerfällungen, in welcher $d' + d'' \equiv 2$, $\delta' - \delta'' \equiv 0 \pmod{4}$, d. h.

$$d' + d'' = 2t', \; \delta' - \delta'' = 2^{i+1} \cdot t'',$$

t', t'' ungerade, $i > 0$ ist. Dieser Zerfällung entspricht nach (45a) die Zerfällung

$$u = t'\tau' + 2^i t''\tau''$$

von u, worin $\tau' = \delta''$, $\tau'' = d'$, also τ', τ'' ungerade Zahlen sind, deren letztere $< 2t'$. Demnach ergibt sich aus unserer Betrachtung, daß die gesamte Summe S dem folgenden Ausdrucke gleichgesetzt werden kann:

$$S = \sum F(2d, 0) + 4 \cdot \sum (-1)^{\frac{d'-1}{2}} \cdot F(d' + d'', \delta' - \delta''),$$

wenn die zweite Summe auf alle Zerfällungen (45a) erstreckt wird, in denen

$$d' + d'' = 2t', \; \delta' - \delta'' = 2^{i+1} \cdot t'',$$

während t', t'' ungerade, zugleich aber $\theta = \left[\frac{\delta''}{\delta' - \delta''}\right]$ gerade ist; oder auch

$$S = \sum F(2d, 0) + 4 \cdot \sum (-1)^{\frac{\tau''-1}{2}} \cdot F(2t', 2^{i+1}t''), \tag{57}$$

wo die zweite Summe auf alle Zerfällungen

$$u = t'\tau' + 2^i t''\tau'' \tag{58}$$

sich bezieht, in denen τ', τ'' ungerade, $\tau'' < 2t'$, $\theta = \left[\frac{\tau'}{2^{i+1}t''}\right]$ gerade ist.

Man denke sich nun alle Zerfällungen

$$u = t'\theta' + 2^i t''\theta'' \tag{59}$$

von u in ungeraden t', θ', t'', θ'', welchen die Zahlen i, t', t'' gemeinsam sind. Unter ihnen ist eine einzige: $\theta' = \tau'$, $\theta'' = \tau''$, bei welcher $\tau'' < 2t'$, und ihr entspricht ein Glied

$$(-1)^{\frac{\tau''-1}{2}} \cdot F(2t', 2^{i+1}t'')$$

der vorgedachten Summe in (57). Alle übrigen Lösungen der Gleichung (59) in positiven ungeraden θ', θ'' werden gegeben durch die Formeln

$$\theta' = \tau' - \lambda \cdot 2^{i+1}t'', \; \theta'' = \tau'' + \lambda \cdot 2t', \tag{60}$$

wenn der unbestimmten ganzen Zahl λ die Werte $0, 1, 2, \ldots \left[\frac{\tau'}{2^{i+1}t''}\right] = \theta$ beigelegt werden. Bildet man daher die Summe

$$(61)\qquad \sum_{u = t'\theta' + 2^i t''\theta''} (-1)^{\frac{\theta''-1}{2}} \cdot F(2t', 2^{i+1}t''),$$

so werden diejenigen Glieder derselben, in welchen i, t', t'' dieselben Werte haben, eine Partialsumme bilden von der Form:

$$(-1)^{\frac{\tau''-1}{2}}\left(1 + (-1)^{t'} + (-1)^{2t'} + \cdots + (-1)^{\theta t'}\right) \cdot F(2t', 2^{i+1}t''),$$

welche, je nachdem θ ungerade oder gerade ist, sich auf Null oder auf das entsprechende Glied $(-1)^{\frac{\tau''-1}{2}} \cdot F(2t', 2^{i+1}t'')$ der zweiten Summe in (57) reduziert. Mit anderen Worten, die letztere Summe und die Summe (61) haben gleichen Wert.

Schließlich findet sich also als Ergebnis unserer Betrachtungen die *Liouville*sche Formel:

$$(62)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{2u = d'\delta' + d''\delta''} (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \cdot [F(d' + d'', \delta' - \delta'') + F(d' - d'', \delta' + \delta'')] \\ &= \sum_{u = d\delta} F(2d, 0) + 4 \sum_{u = t'\theta' + 2^i t''\theta''} (-1)^{\frac{\theta''-1}{2}} \cdot F(2t', 2^{i+1}t''), \end{aligned}\right.$$

wobei $d', \delta', d'', \delta''$ sowohl, wie $t', \theta', t'', \theta''$ ungerade und ebenso wie i positiv zu denken sind.

11. Wählt man z. B., was mit den Bedingungen (46) verträglich ist,

$$(46\,a)\qquad F(x, y) = f(x) = -f(-x),\ f(0) = 0,$$

so nimmt die allgemeine Formel die besondere Gestalt an:

$$\begin{aligned} &\sum_{2u = d'\delta' + d''\delta''} (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \cdot [f(d' + d'') + f(d' - d'')] \\ &= \sum_{u = d\delta} f(2d) + 4 \cdot \sum_{u = t'\theta' + 2^i t''\theta''} (-1)^{\frac{\theta''-1}{2}} \cdot f(2t'). \end{aligned}$$

Da jedoch in der letzten Summe die Summationen bez. t', θ'' voneinander unabhängig sind, kann man deutlicher schreiben:

$$(62\,a)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{2u = d'\delta' + d''\delta''} (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \cdot [f(d' + d'') + f(d' - d'')] \\ &= \sum_{u = d\delta} f(2d) + 4 \sum_{u = u_1 + 2^i u_2} \Big(\varrho(u_2) \sum_{u_1 = t'\theta'} f(2t')\Big), \end{aligned}\right.$$

wobei u_1, u_2 ungerade zu denken sind.

Für $f(x) = x$ liefert diese Formel ohne weiteres die bemerkenswerte Beziehung:

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \cdot 2d' = 2 \cdot \sum d + 4 \cdot \sum \left(\varrho(u_2) \cdot \sum 2t'\right)$$

d. h. ausführlicher geschrieben:

$$(62\,\text{b}) \qquad \sum_{2u = u' + u''} \zeta_1(u')\,\varrho(u'') = \zeta_1(u) + 4 \cdot \sum_{u = u_1 + 2^i u_2} \zeta_1(u_1)\,\varrho(u_2).$$

Bedenkt man, daß die Summation links über alle Zerfällungen

$$2u = u' + u'' \text{ oder } 8u = 4u' + 2 \cdot 2u''$$

bei ungeraden u', u'', die Summation rechts über alle Zerfällungen

$$u = u_1 + 2^i u_2 \text{ oder } 4u = 4u_1 + 2^{i+1} \cdot 2u_2,$$

worin u_1, u_2 ungerade und $i > 0$, zu erstrecken ist, so spricht sich die letzte Formel in folgendem Satze aus:

Ist A die Anzahl der Darstellungen von $8u$ in der Form

$$8u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(v^2 + w^2)$$

und $\mathfrak{A}$ die Anzahl der Darstellungen von $4u$ in der Form

$$4u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2^{i+1}(v^2 + w^2)$$

mit positivem i und beidemal mit positiven ungeraden Zahlen x, y, z, t, v, w, so ist der Unterschied

$$A - 4 \cdot \mathfrak{A} = \zeta_1(u)$$

d. i. gleich der Summe der Teiler von u.

Durch eine völlig analoge Behandlung wie für die Formel (62) weist man die andere nachfolgende Formel von *Liouville* nach, in welcher für die Funktion $F(x, y)$ die Bedingungen

$$(63) \qquad F(x, y) = F(-x, y) = F(x, -y) = F(y, x)$$

vorausgesetzt sind:

$$(64) \begin{cases} \displaystyle\sum_{2u = d'\delta' + d''\delta''} (-1)^{\frac{\delta'-1}{2} + \frac{d''-1}{2}} \cdot F(d' - d'', \delta' + \delta'') \\ \displaystyle = \sum_{u = d\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \cdot F(0, 2d) + 4 \cdot \sum_{u = t'\theta' + 2^i t''\theta''} (-1)^{\frac{\theta'-1}{2} + \frac{\theta''-1}{2}} \cdot F(2^{i+1}t'', 2t'). \end{cases}$$

Man darf z. B. die Funktion $F(x, y)$ so spezialisieren, daß sie für alle in Frage kommenden Argumente konstant, etwa $F(x, y) = 1$ ist. Für diesen äußerst einfachen Fall verwandelt sich dann die vorstehende Beziehung in die andere:

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2} + \frac{d''-1}{2}} = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} + 4 \cdot \sum (-1)^{\frac{\theta'-1}{2} + \frac{\theta''-1}{2}}$$

d. h. ausführlicher geschrieben:

$$\sum_{2u=u'+u''} \varrho(u')\varrho(u'') = \varrho(u) + 4 \cdot \sum_{u=u_1+2^i u_2} \varrho(u_1)\varrho(u_2), \tag{64a}$$

eine Gleichung, welche abgesehen von der Bezeichnung mit der schon gefundenen Gleichung (40) als identisch erkannt wird, wenn man sich der Beziehung (17^1) erinnert, nach welcher

$$\sum_{2u=u'+u''} \varrho(u')\varrho(u'') = \zeta_1(u)$$

ist.

12. Wir wenden uns nun zu zusammengesetzteren Formeln, deren Beweis etwas größere Schwierigkeiten bietet. In der ersten derselben handelt es sich um eine Funktion $F(t, x, y, z)$ von vier Veränderlichen, von der wir nur voraussetzen, daß sie den beiden Bedingungen genüge:

$$F(t, -x, y, z) = F(t, x, y, z), \quad F(-t, x, -y, -z) = -F(t, x, y, z). \tag{65}$$

Ferner sei s irgendeine positive ganze Zahl, die wir auf alle Weise nach den Formeln

$$s = s'^2 + s'' = s'^2 + 2^i d'' \delta'', \tag{66}$$

in denen s'', d'', δ'' positiv, zudem d'', δ'' ungerade sein sollen, so daß 2^i die höchste in s'' aufgehende Potenz von 2 bedeutet, während s' positiv, Null oder negativ sein darf, zerfällt denken. Auf alle diese Zerfällungen beziehen wir die Summe

$$S_1 = \sum (-1)^{s''-1} \cdot F(2^i d'' + s', \ \delta'' - 2s', \ 2^i d'' + s' - \delta'', \ \delta''). \tag{67}$$

Dieselbe Zahl s werde aber zweitens auf alle Weise nach der Formel

$$s = s_1^2 + 2 d_2 \delta_2, \tag{68}$$

in welcher d_2, δ_2 positiv, zudem δ_2 ungerade, s_1 aber beliebig beschaffen sein soll, in zwei Summanden zerfällt, und nun auf alle diese letzteren Zerfällungen die Summe

$$S_2 = \sum F(s_1, \ 2d_2 + \delta_2, \ 2d_2 - s_1 - \delta_2, \ 2s_1 - 2d_2 + \delta_2) \tag{69}$$

bezogen. Wir suchen den Wert des Ausdrucks

$$S = S_1 + S_2. \tag{70}$$

Man bemerke zunächst, daß in jeder der beiden Summen S_1, S_2 das erste Argument der Funktion F die Summe der zwei letzten ist, daß also nur solche Funktionswerte $F(y + z, \ x, \ y, \ z)$ auftreten, in denen $t = y + z$ ist.

In der Summe S_1 sind zudem die Werte von x, z stets ungerade und z positiv. Setzen wir

$$(71)\qquad \begin{cases} \delta'' - 2s' = x \\ 2^i d'' + s' - \delta'' = y \\ \delta'' = z, \end{cases}$$

so ergibt sich daraus umgekehrt

$$(72)\qquad \begin{cases} 2s' = z - x \\ \delta'' = z \\ 2 \cdot 2^i d'' = x + 2y + z \end{cases}$$

und aus der Zerfällung (66) geht eine ganzzahlige Auflösung der Gleichung

$$(s)\qquad 4s = x^2 + 4yz + 3z^2$$

hervor, in welcher

$$(73)\qquad x,\ z \text{ ungerade},\ z > 0$$

$$(74)\qquad x + 2y + z > 0$$

ist. Wenn umgekehrt x, y, z eine solche Auflösung der Gleichung (s) bedeuten, so folgt nach den Formeln (72) oder den ihnen gleichbedeutenden Formeln (71) eine Zerfällung (66), welcher entsprechend in der Summe S_1 ein Glied

$$(-1)^{s''-1} \cdot F(y+z, x, y, z)$$

oder, da $s'' = 2^i d'' \delta''$, also wegen des ungeraden δ''

$$s'' \equiv 2^i d'' \equiv \frac{x+2y+z}{2} \pmod 2$$

ist, das Glied

$$(75)\qquad (-1)^{\frac{x+2y+z}{2}-1} \cdot F(y+z, x, y, z)$$

auftritt.

Nun steht einer Auflösung x, y, z der Gleichung (s), welche die Bedingungen (73) erfüllt, stets eine zweite $-x, y, z$ zur Seite, für die sie gleichfalls erfüllt sind. In einer von beiden ist also die erste Variable positiv, und man darf annehmen, daß dies bei der Auflösung x, y, z der Fall, d. h. $x > 0$ sei. Genügt dann die zweite Auflösung nicht auch der mit (74) korrespondierenden Bedingung

$$-x + 2y + z > 0,$$

so gehört zu ihr kein Glied in der Summe S_1. Ist dagegen

$$(76)\qquad -x + 2y + z > 0,$$

so entspricht ihr ein solches, nämlich das Glied

$$(-1)^{\frac{-x+2y+z}{2}-1} \cdot F(y+z, -x, y, z)$$

d. h. mit Rücksicht auf die erste der Voraussetzungen (65) das Glied

$$(77)\qquad (-1)^{\frac{-x+2y+z}{2}-1} \cdot F(y+z, x, y, z).$$

Aus (76) folgt aber um so mehr (74), demnach entspricht auch der zugehörigen ersten Auflösung x, y, z ein Glied der Summe S_1, nämlich das Glied (75), welches dem eben gedachten gleich aber entgegengesetzt ist, da

$$(-1)^{\frac{-x+2y+z}{2}-1} = (-1)^{\frac{x+2y+z}{2}-1} \cdot (-1)^x = -(-1)^{\frac{x+2y+z}{2}-1}$$

ist. Da hiernach je zwei derartige Glieder sich heben, bleiben in der Summe S_1 nur solche Glieder bestehen, welche Auflösungen x, y, z der Gleichung (s) von der Art entsprechen, daß

$$(78)\qquad \left\{\begin{array}{ll} & x,\ z \text{ positiv und ungerade} \\ & x+2y+z>0 \\ \text{zugleich aber} & \\ & x-2y-z \gtreqless 0 \end{array}\right.$$

ist.

Nachdem dies für die Summe S_1 festgestellt ist, behandeln wir in gleicher Weise die Summe S_2. Setzen wir wieder

$$(79)\qquad \left\{\begin{aligned} 2d_2+\delta_2 &= x \\ 2d_2-s_1-\delta_2 &= y \\ -2d_2+2s_1+\delta_2 &= z, \end{aligned}\right.$$

woraus umgekehrt

$$(80)\qquad \left\{\begin{aligned} s_1 &= y+z \\ 2\delta_2 &= x-2y-z \\ 4d_2 &= x+2y+z \end{aligned}\right.$$

hervorgeht, so erkennt man mit Rücksicht auf die Zerfällung (68) leicht, daß x, y, z wieder eine ganzzahlige Auflösung der Gleichung (s) bilden, in welcher

$$(81)\qquad x>0 \text{ und ungerade, } z \text{ ungerade}$$

und zugleich

$$(82)\qquad \left\{\begin{array}{l} x-2y-z>0 \\ x+2y+z>0 \\ x+2y+z\equiv 0 \pmod{4} \end{array}\right.$$

ist. Umgekehrt findet sich aus einer derartigen Auflösung der Gleichung (s) vermittelst der Formeln (80) eine Zerfällung von der Form (68), also stets auch ein entsprechendes, in S_2 auftretendes Glied

$$(83)\qquad F(y+z,\ x,\ y,\ z) = (-1)^{\frac{x+2y+z}{2}} \cdot F(y+z,\ x,\ y,\ z).$$

Nun kann man wieder jeder Auflösung x, y, z der Gleichung (s), für welche die Bedingungen (81) erfüllt sind, eine zweite ihnen gleichfalls genügende $x, -y, -z$ an die Seite stellen, und da in einer von beiden die dritte Variable positiv sein muß, dürfen wir annehmen,

daß dies etwa bei der Auflösung x, y, z der Fall d. h. $z > 0$ sei. Wenn dann die zweite Auflösung die den Bedingungen (82) entsprechenden:

$$(84)\qquad \begin{cases} x + 2y + z > 0 \\ x - 2y - z > 0 \\ x - 2y - z \equiv 0 \pmod{4}, \end{cases}$$

deren letzte auch in der Form

$$(84\text{a})\qquad x + 2y + z \equiv 2 \pmod{4}$$

geschrieben werden kann, nicht erfüllt, so gehört ihr in der Summe S_2 kein Glied zu. Entgegengesetztenfalls entspricht ihr das Glied

$$F(-y-z,\ x,\ -y,\ -z),$$

welches mit Rücksicht auf die zweite der Voraussetzungen (65) gleich

$$(85)\qquad -F(y+z,\ x,\ y,\ z) = (-1)^{\frac{x+2y+z}{2}} \cdot F(y+z,\ x,\ y,\ z)$$

gefunden wird. Man bemerke endlich, daß immer nur eins der beiden Bedingungssysteme (82) und (84) erfüllt sein kann.

Sieht man jetzt bei der Summe S_1 zuvörderst von denjenigen etwa vorhandenen Gliedern ab, welche Auflösungen der Gleichung (s) zugehören, bei denen

$$(86)\qquad x - 2y - z = 0$$

ist, so stimmen offenbar die Lösungen dieser Gleichung, welche den Bedingungen (78) genügen, insgesamt mit denjenigen Lösungen überein, welche den Forderungen (81) zusammen mit $z > 0$ und sei es (82) oder (84) gehorchen. Da aber die jenen Auflösungen zugehörigen Glieder (75) der Summe S_1 den den letzteren zugehörigen Gliedern (83) resp. (85) der Summe S_2 entgegengesetzt gleich sind, so heben sich alle Glieder der letzteren Summe im Ausdrucke S gegen die Summe S_1 fort, und es bleiben darin nur diejenigen Glieder der Summe S_1 bestehen, für welche etwa die Gleichung (86) erfüllt ist.

Setzt man aber $x = 2y + z$, so nimmt die Gleichung (s) die Gestalt an:

$$s = (y+z)^2.$$

Derartige Auflösungen sind also nicht vorhanden, wenn die gegebene Zahl s keine Quadratzahl ist. Man schließt daraus, daß in diesem Falle $S = 0$ ist.

Ist dagegen s eine Quadratzahl, $s = \sigma^2$, wo $\sigma > 0$, so ergibt sich

$$y + z = \sigma,$$

da aus $y + z = -\sigma$ und $x = 2y + z > 0$ sich $y > \sigma > 0$ also das positiv zu denkende z sich als negativ ergeben würde. Demnach erhält man folgendes Wertsystem:

$$x = 2y + z = 2\sigma - z, \quad y = \sigma - z,$$

während z, ohne daß x aufhört positiv zu sein, alle ungeraden Zahlen 1, 3, 5, ..., $2\sigma - 1$ durchlaufen darf. Da zudem

$$\frac{x + 2y + z}{2} - 1 = x - 1$$

gerade ist, geht das jedem dieser Wertsysteme zugehörige Glied der Summe S_1 über in

$$F(\sigma, 2\sigma - z, \sigma - z, z),$$

und somit findet sich im gegenwärtigen Falle

$$S = \sum_{z = 1, 3, 5, \ldots, 2\sigma - 1} F(\sigma, 2\sigma - z, \sigma - z, z).$$

Schließlich gelangt man also zu folgendem *Liouville*schen Satze:

Der Ausdruck

$$(87) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s = s'^2 + 2^i d'' \delta'' = s'^2 + s''} (-1)^{s'' - 1} \cdot F(2^i d'' + s', \delta'' - 2s', 2^i d'' + s' - \delta'', \delta'') \\ \displaystyle + \sum_{s = s_1^2 + 2 d_2 \delta_2} F(s_1, 2d_2 + \delta_2, 2d_2 - s_1 - d_2, 2s_1 - 2d_2 + \delta_2) \end{cases}$$

ist Null oder gleich der Summe

$$\sum_{i = 1, 3, 5, \ldots, 2\sqrt{s} - 1} F(\sqrt{s}, 2\sqrt{s} - i, \sqrt{s} - i, i),$$

je nachdem s kein Quadrat oder eine Quadratzahl ist.

13. Von den zahlreichen bemerkenswerten besonderen Gestalten, welche dies allgemeine Ergebnis annimmt, wenn die Funktion F näher bestimmt wird, erwähnen wir hier nur zwei.

Sei zuerst

$$F(t, x, y, z) = z \cdot f(t),$$

wobei die Funktion $f(t)$ als eine gerade d. h.

$$f(-t) = f(t)$$

gedacht werde. Offenbar sind bei diesen Annahmen die beiden Voraussetzungen (65) erfüllt. Ihnen entsprechend geht aber der Ausdruck (87) in den folgenden über:

$$\sum (-1)^{s'' - 1} \cdot \delta'' \cdot f(2^i d'' + s') + \sum (2s_1 - 2d_2 + \delta_2) f(s_1).$$

Hier darf $\sum 2s_1 \cdot f(s_1)$ unterdrückt werden, denn die Zerfällungen (68), bei denen s_1 von Null verschieden ist, sind immer paarweise mit gleichen aber entgegengesetzten Werten $s_1, -s_1$ vorhanden, während

$f(-s_1) = f(s_1)$ ist; demnach reduziert sich die gesamte Summe auf Null. Ferner ist.

$$\sum_{s=s_1^2+2d_2\delta_2}(2d_2-\delta_2)\cdot f(s_1) = \sum_{s=s_1^2+2s_2,\ s_2=d_2\delta_2}\Big(f(s_1)\cdot\sum(2d_2-\delta_2)\Big).$$

Setzt man nun $s_2 = 2^k \cdot u$, wo u ungerade, so bedeutet δ_2 jeden Teiler von u, d_2 aber jeden Teiler von s_2, dessen komplementärer Teiler ungerade ist d. h. das 2^k fache jeden Teilers von u. Somit ist

$$\sum d_2 = 2^k\cdot\zeta_1(u),\quad \sum\delta_2 = \zeta_1(u)$$

und

$$\sum(2d_2-\delta_2) = (2^{k+1}-1)\cdot\zeta_1(u) = \zeta_1(s_2).$$

Mit Rücksicht auf diese Umstände sowie auf die bekannte Beziehung

$$1+3+5+\cdots+(2h-1) = h^2$$

nimmt der Satz (87) endlich folgenden besonderen Ausdruck an:

Ist $f(t)$ eine gerade Funktion von t, so ist

$$(87\text{a})\qquad \sum_{s=s'^2+2^i d''\delta''=s'^2+2^i s''}(-1)^{s''-1}\cdot\delta''\cdot f(2^i d''+s') - \sum_{s=s_1^2+2s_2} f(s_1)\cdot\zeta_1(s_2)$$

gleich Null oder gleich $s\cdot f(\sqrt{s})$, je nachdem s kein Quadrat oder eine Quadratzahl ist.

Wählt man zweitens

$$F(t,x,y,z) = f(t),$$

unter $f(t)$ eine ungerade Funktion verstehend, so daß

$$f(-t) = -f(t),\ f(0) = 0$$

ist, so findet man wieder die Voraussetzungen (65) erfüllt. Der Ausdruck (87) geht dann über in den folgenden:

$$(-1)^{s''-1}\cdot f(2^i d''+s') + \sum f(s_1),$$

in welchem zudem noch die zweite Summe verschwindet, da für $s_1 = 0$ auch $f(s_1) = 0$, für zwei Zerfällungen (68) mit entgegengesetzten s_1, $-s_1$ aber $f(s_1)+f(-s_1) = 0$ ist. Da in der dritten Summe in (87) der Summande konstant, die Anzahl derselben gleich $\sqrt{s}$ ist, erhellt für diesen Fall der äußerst einfache Satz:

Ist $f(t)$ eine ungerade Funktion von t, so ist

$$(87\text{b})\qquad \sum_{s=s'^2+2^i d''\delta''=s'^2+s''}(-1)^{s''-1}\cdot f(2^i d''+s')$$

gleich Null oder gleich $\sqrt{s}\cdot f(\sqrt{s})$, je nachdem s kein Quadrat oder eine Quadratzahl ist.

14. Sei z. B. $f(x) = x$. Dann liegt die Summe

$$\sum (-1)^{s''-1} \cdot (2^i d'' + s')$$

vor, die sich einfacher auf die Summe

$$(88) \qquad \sum_{s=s'^2+s''} (-1)^{s''-1} \cdot 2^i d'' = \sum_{s=s'^2+s''} \left((-1)^{s''-1} \cdot \sum_{s''=2^i d'' \delta''} 2^i d'' \right)$$

reduziert, da jedem von Null verschiedenen Werte s' ein zweiter $-s'$ zur Seite steht. Vorstehende Summe ist also Null oder gleich s, je nachdem s kein Quadrat oder eine Quadratzahl ist. Nun ist für eine gerade Zahl $s'' = 2^h u$, wo u ungerade ist, die Summe

$$\sum_{s''=2^h d \delta} 2^h d = 2^h \cdot \zeta_1(u)$$

$$= [(2^{h+1} - 1) - (2^h - 1)] \zeta_1(u) = \zeta_1(s'') - \zeta_1\left(\frac{s''}{2}\right),$$

während für eine ungerade Zahl $s'' = u$

$$\sum_{s''=d\delta} d = \zeta_1(s'')$$

ist. Hieraus folgt, wenn zunächst s gerade gedacht wird, wo dann

$$s'' = s - s'^2$$

gerade oder ungerade ist, je nachdem s', das die Werte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ annehmen kann, bis $s - s'^2$ aufhört positiv zu sein, gerade oder ungerade ist, für die Summe (88) der Ausdruck

$$\begin{aligned}&-\zeta_1(s) + 2 \cdot \zeta_1(s-1) - 2 \cdot \zeta_1(s-4) + 2 \cdot \zeta_1(s-9) - 2 \cdot \zeta_1(s-16) + \cdots \\ &+ \zeta_1\left(\frac{s}{2}\right) \qquad\qquad + 2 \cdot \zeta_1\left(\frac{s-4}{2}\right) \qquad\qquad + 2 \cdot \zeta_1\left(\frac{s-16}{2}\right)\end{aligned}$$

und demnach die Gleichung

$$(89) \left\{\begin{aligned}&-\zeta_1(s) + 2 \cdot \zeta_1(s-1) - 2 \cdot \zeta_1(s-4) + 2 \cdot \zeta_1(s-9) \ldots \\ &+ \zeta_1\left(\frac{s}{2}\right) \qquad\qquad + 2 \cdot \zeta_1\left(\frac{s-4}{2}\right) \qquad\qquad = \omega(s) \cdot s,\end{aligned}\right.$$

in welcher $\omega(s)$ die Null oder Eins bedeutet, je nachdem s kein Quadrat oder eine Quadratzahl ist.

Wenn dagegen s ungerade ist, also

$$s'' = s - s'^2$$

gerade oder ungerade wird, je nachdem s' ungerade oder gerade gewählt wird, so entsteht aus gleicher Erwägung die Formel

$$(90) \left\{\begin{aligned}&\zeta_1(s) - 2 \cdot \zeta_1(s-1) + 2 \zeta_1(s-4) - 2 \cdot \zeta_1(s-9) + \cdots \\ &\qquad + 2 \cdot \zeta_1\left(\frac{s-1}{2}\right) \qquad\qquad + 2 \cdot \zeta_1\left(\frac{s-9}{2}\right)\end{aligned}\right. = \omega(s) \cdot s$$

Die ungerade Zahl s ist gewiß keine Quadratzahl, wenn sie von einer der Formen $8k+3$, 5, 7 ist.

Im Falle $s=8k+5$ ist $\frac{s-s'^2}{4}$ für jedes ungerade s' eine ungerade Zahl u d. h. $s-s'^2=2^2\cdot u$, daher

$$\zeta_1(s-s'^2)=(2^3-1)\cdot\zeta_1(u),\quad \zeta_{11}\left(\frac{s-s'^2}{2}\right)=(2^2-1)\cdot\zeta_1(u)$$

also

$$\zeta_1(s-s'^2)-\zeta_1\left(\frac{s-s'^2}{2}\right)=4\cdot\zeta_1\left(\frac{s-s'^2}{4}\right).$$

Demnach nimmt in diesem Falle die Gleichung (90), da ihre rechte Seite verschwindet, die Gestalt an:

$$(90\text{a})\qquad \begin{cases} \zeta_1(s)+2\cdot\zeta_1(s-4)+2\cdot\zeta_1(s-16)+\cdots \\ \qquad =8\left(\zeta_1\left(\frac{s-1}{4}\right)+\zeta_1\left(\frac{s-9}{4}\right)+\cdots\right). \end{cases}$$

In den Fällen dagegen, wo $s=8k+3$ oder $8k+7$ ist, findet man $\frac{s-s'^2}{2}$ für jedes ungerade s' ungerade d. h. $s-s'^2=2\cdot u$, wo u ungerade, mithin ist

$$\zeta_1(s-s'^2)=(2^2-1)\cdot\zeta_1(u)=3\cdot\zeta_1\left(\frac{s-s'^2}{2}\right)$$

oder

$$\zeta_1(s-s'^2)-\zeta_1\left(\frac{s-s'^2}{2}\right)=2\cdot\zeta_1\left(\frac{s-s'^2}{2}\right).$$

Für diese Fälle nimmt also die Gleichung (90), da wieder ihre rechte Seite Null ist, die Gestalt an:

$$(90\text{b})\qquad \begin{cases} \zeta_1(s)+2\cdot\zeta_1(s-4)+2\cdot\zeta_1(s-16)+\cdots \\ \qquad =4\left(\zeta_1\left(\frac{s-1}{2}\right)+\zeta_1\left(\frac{s-9}{2}\right)+\cdots\right). \end{cases}$$

Diesen interessanten für die Funktion $\zeta_1(s)$ geltenden Beziehungen kann man ähnliche auf die Funktion $\varrho(s)$ bezügliche an die Seite stellen. Setzen wir, um sie herzuleiten, in (87b) an Stelle von $f(t)$ die Funktion $\sin\frac{t\pi}{2}$, so finden wir

$$(91)\qquad \sum(-1)^{s''-1}\cdot\sin\frac{(2^i d''+s')\pi}{2}=\omega(s)\cdot\sqrt{s}\cdot\sin\frac{\pi\sqrt{s}}{2}.$$

Sei nun s eine ungerade Zahl. Da

$$\sin\frac{(2^i d''+s')\pi}{2}=\sin\frac{2^i d''\pi}{2}\cdot\cos\frac{s'\pi}{2}+\cos\frac{2^i d''\pi}{2}\cdot\sin\frac{s'\pi}{2}$$

gesetzt werden kann, zerlegt sich die Summe in zwei andere, deren zweite verschwindet, da s' die Werte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ annehmen

darf und $\sin\frac{s'\pi}{2}$ für gleiche doch entgegengesetzte Werte von s' ebenfalls gleiche aber entgegengesetzte Werte annimmt. Somit kommt

$$\sum(-1)^{s''-1}\cdot\sin\frac{2^i d''\pi}{2}\cdot\cos\frac{s'\pi}{2}=\omega(s)\cdot\sqrt{s}\cdot\sin\frac{\pi\sqrt{s}}{2},$$

wo die Summation nur noch über alle geraden s' erstreckt zu werden braucht, da $\cos\frac{s'\pi}{2}$ für ungerade s' verschwindet. Da aber alsdann aus der Formel

$$s=s'^2+s''$$

sich s'' als ungerade ergibt, so ist $i=0$ zu setzen, und die vorige Gleichung nimmt die Gestalt an:

$$\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\cdot(-1)^{\frac{s'}{2}}=\omega(s)\cdot\sqrt{s}\cdot\sin\frac{\pi\sqrt{s}}{2}.$$

Da die Summe, ausführlicher geschrieben, gleich

$$\sum_{s=s'^2+s'',}\left((-1)^{\frac{s'}{2}}\sum_{s''=s-s'^2=d'd''}(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\right)=\sum_{s'}(-1)^{\frac{s'}{2}}\cdot\varrho(s-s'^2)$$

gefunden wird, erhält man folgenden Satz:

Ist s eine ungerade Zahl, so ist

$$\sum_{s'}(-1)^{\frac{s'}{2}}\cdot\varrho(s-s'^2)=\omega(s)\cdot\sqrt{s}\cdot\sin\frac{\pi\sqrt{s}}{2}$$

oder

(92) $$\varrho(s)-2\varrho(s-4)+2\cdot\varrho(s-16)-\cdots=\omega(s)\cdot\sqrt{s}\cdot\sin\frac{\pi\sqrt{s}}{2}.$$

Diese Formel verstattet, Sätze über die Zerfällung einer ungeraden Zahl s in drei Quadrate auszusprechen. Ist z. B. s von der Form $8k+5$, so ist eine Zerfällung

$$s=x^2+y^2+z^2$$

nur möglich, wenn eine der Zahlen x, y, z ungerade, die beiden anderen gerade sind, also etwa

$$s=u^2+4a^2+4b^2$$

mit ungeradem u. Nun bedeutet $2\cdot\varrho(s-4a^2)$ die Anzahl der Zerfällungen von $s-4a^2$ in die Summe aus einem ungeraden und einem geraden Quadrate; somit bezeichnet

$$2\left(\varrho(s)+\varrho(s-16)+\cdots\right)$$

die Anzahl der Darstellungen

$$s=u^2+4a^2+4b^2,$$

in denen $a \overline{\gtrless} 0$ und gerade ist, und

$$2\left(\varrho(s-4)+\varrho(s-36)+\cdots\right)$$

die Anzahl jener Darstellungen, in denen $a > 0$ und ungerade ist. Da nun bei der für s angenommenen Form die rechte Seite der Gleichung (92) verschwindet, erhellt der folgende Satz:

Ist $s \equiv 5$ (mod. 8), so ist der Überschuß der Anzahl der Darstellungen von s in der Form

$$s = u^2 + 4a^2 + 4b^2$$

mit nicht negativem geraden a über die Anzahl derjenigen Darstellungen mit positivem ungeraden a gleich $\varrho(s)$ d. i. gleich dem Überschusse der Anzahl der Teiler von s von der Form $4k+1$ über die Anzahl derjenigen von der Form $4k+3$; d. h. es gilt nach *Vahlens* Bezeichnung die Gleichung:

$$N\left(s = u^2 + 4a^2 + 4b^2;\ (-1)^a\right)_{a \overline{\gtrless} 0} = \varrho(s). \tag{93}$$

15. Zur Formel (87a) zurückkehrend setzen wir s als ungerade voraus und wählen

$$f(t) = t \cdot \sin\frac{t\pi}{2}.$$

So erhalten wir aus ihr die Beziehung:

$$\sum(-1)^{s''-1}\cdot\delta''\cdot(2^i d''+s')\sin\frac{(2^i d''+s')\pi}{2} - \sum s_1\cdot\sin\frac{s_1\pi}{2}\cdot\zeta_1(s_2)$$
$$= \omega(s)\cdot s\sqrt{s}\cdot\sin\frac{\pi\sqrt{s}}{2}.$$

Löst man in der ersten Summe den Sinus auf, so zerfällt sie in die zwei Bestandteile

$$\sum(-1)^{s''-1}\cdot s''\left(\sin\frac{2^i d''\pi}{2}\cdot\cos\frac{s'\pi}{2}+\cos\frac{2^i d''\pi}{2}\cdot\sin\frac{s'\pi}{2}\right)$$
$$+\sum(-1)^{s''-1}\cdot\delta'' s'\left(\sin\frac{2^i d''\pi}{2}\cdot\cos\frac{s'\pi}{2}+\cos\frac{2^i d''\pi}{2}\cdot\sin\frac{s'\pi}{2}\right).$$

Im ersten derselben darf man das zweite, im zweiten das erste Glied in der Klammer unterdrücken, da die bezüglichen Summen wegen der gleichen aber entgegengesetzten Werte, die s' annimmt, verschwinden. Daher geht aus vorstehender Gleichung die folgende hervor:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum(-1)^{s''-1}\cdot s''\cdot\sin\frac{2^i d''\pi}{2}\cdot\cos\frac{s'\pi}{2}\\ &+\sum(-1)^{s''-1}\cdot\delta'' s'\cdot\cos\frac{2^i d''\pi}{2}\cdot\sin\frac{s'\pi}{2} - \sum s_1\cdot\sin\frac{s_1\pi}{2}\cdot\zeta_1(s_2)\\ &= \omega(s)\cdot s\sqrt{s}\cdot\sin\frac{\pi\sqrt{s}}{2}.\end{aligned}\right. \tag{94}$$

Hierbei braucht die erste Summation nur noch über alle geraden, die zweite über alle ungeraden Werte von s' ausgedehnt zu werden, da für die übrigen $\cos\frac{s'\pi}{2}$ resp. $\sin\frac{s'\pi}{2}$ verschwindet.

Beschränken wir uns nun wieder auf den Fall $s = 8k + 5$. Dann folgt aus der Gleichung

$$s = s'^2 + s'',$$

falls s' gerade ist, s'' ungerade, also $i = 0$; ist aber s' ungerade, so wird $s'' = s - s'^2$ von der Form $8k + 4$ also $i = 2$. Ferner ist der Gleichung $s = s_1^2 + 2d_2\delta_2$ zufolge s_1 ungerade. Demnach geht dann aus (94) diese andere Gleichung:

$$\sum s''\cdot(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\cdot(-1)^{\frac{s'}{2}} - \sum \delta'' s'\cdot(-1)^{\frac{s'-1}{2}} = \sum s_1\cdot(-1)^{\frac{s_1-1}{2}}\cdot\zeta_1(s_2)$$

hervor, in welcher man den einzelnen Summen die ausführlichere Gestalt:

$$\sum\left[(-1)^{\frac{s'}{2}}\cdot(s-s'^2)\cdot\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\right] = \sum(-1)^{\frac{s'}{2}}(s-s'^2)\cdot\varrho(s-s'^2)$$

$$\sum\left[(-1)^{\frac{s'-1}{2}}\cdot s'\cdot\sum\delta''\right] = \sum(-1)^{\frac{s'-1}{2}} s'\cdot\zeta_1\left(\frac{s-s'^2}{4}\right)$$

und, da $\frac{s-s_1^2}{2}$ eine nur durch 2 teilbare Zahl, mithin

$$\zeta_1\left(\frac{s-s_1^2}{2}\right) = (2^2-1)\cdot\zeta_1\left(\frac{s-s_1^2}{4}\right)$$

ist,

$$\sum s_1\cdot(-1)^{\frac{s_1-1}{2}}\zeta_1\left(\frac{s-s_1^2}{2}\right) = 3\cdot\sum(-1)^{\frac{s_1-1}{2}}\cdot s_1\cdot\zeta_1\left(\frac{s-s_1^2}{4}\right)$$

geben kann. Mit Rücksicht hierauf nimmt die erhaltene Gleichung diese neue Gestalt an:

$$\begin{aligned} s\cdot\varrho(s) - 2\cdot(s-4)\cdot\varrho(s-4) + 2\cdot(s-16)\cdot\varrho(s-16) - \cdots \\ -2\cdot\zeta_1\left(\frac{s-1}{4}\right) + 6\cdot\zeta_1\left(\frac{s-9}{4}\right) - 10\cdot\zeta_1\left(\frac{s-25}{4}\right) + \cdots \\ = 6\cdot\zeta_1\left(\frac{s-1}{4}\right) - 18\cdot\zeta_1\left(\frac{s-9}{4}\right) + 30\cdot\zeta_1\left(\frac{s-25}{4}\right) - \cdots \end{aligned}$$

woraus, wenn man sich der Gleichung (92) erinnert, nach welcher, falls $s = 8k + 5$ ist,

$$\varrho(s) - 2\varrho(s-4) + 2\varrho(s-16) - \cdots = 0$$

ist, schließlich die Beziehung

$$(95)\quad \left\{\begin{aligned} &\varrho(s-4) - 4\cdot\varrho(s-16) + 9\cdot\varrho(s-36) - \cdots \\ &= \zeta_1\left(\frac{s-1}{4}\right) - 3\cdot\zeta_1\left(\frac{s-9}{4}\right) + 5\cdot\zeta_1\left(\frac{s-25}{4}\right) - \cdots \end{aligned}\right.$$

erschlossen wird.

Um sie zu deuten, bemerke man, daß $4 \cdot \varrho(s - 4a^2)$ die Anzahl der Darstellungen

$$s = 4a^2 + b^2 + c^2 \tag{s}$$

anzeigt, in denen die erste Unbestimmte den Wert a hat, und daß folglich die vierfache linke Seite der Gleichung die Summe

$$\sum (-1)^{a-1} \cdot a^2$$

ist, wenn letztere auf sämtliche Lösungen von (s) mit positivem a erstreckt wird, eine Summe, die in *Vahlen*scher Bezeichnungsweise durch

$$\underset{a > 0}{N(s = 4a^2 + b^2 + c^2;\ (-1)^{a-1} \cdot a^2)}$$

ausgedrückt werden kann. Da ebenso $8 \cdot \zeta_1\left(\frac{s - U^2}{4}\right)$ für ein ungerades U die Anzahl der Darstellungen von s in der Form

$$s = U^2 + 4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$$

ergibt, so ist die achtfache rechte Seite der Gleichung die über alle solche Darstellungen mit positivem ungeraden U erstreckte Summe

$$\sum (-1)^{\frac{U-1}{2}} \cdot U$$

oder

$$\underset{U > 0,\ \text{ungerade}}{N\left(s = U^2 + 4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2);\ (-1)^{\frac{U-1}{2}} \cdot U\right)}.$$

Endlich aber ist $\zeta_1\left(\frac{s - u^2}{4}\right)$ für ein ungerades u die Anzahl der Darstellungen von s in der Form

$$s = u^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

mit positiven ungeraden u, u_1, u_2, u_3, u_4, und daher die rechte Seite der Gleichung selbst die über alle solche Darstellungen ausgedehnte Summe

$$\sum (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u$$

oder

$$\underset{u,\ u_i\ \text{pos., unger.}}{N\left(s = u^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u\right)}.$$

Man erhält demnach zwischen den soeben definierten Summen die Verhältnisse:

$$8 \cdot \sum (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u = 2 \cdot \sum (-1)^{a-1} \cdot a^2 = \sum (-1)^{\frac{U-1}{2}} \cdot U$$

oder die Gleichungen:

$$(96)\quad \begin{cases} 8 \cdot N\left(s = u^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u\right) \\ \qquad u,\ u_i > 0,\ \text{unger.} \\ = 2 \cdot N\left(s = 4a^2 + b^2 + c^2;\ (-1)^{a-1} \cdot a^2\right) \\ \qquad a > 0 \\ = N\left(s = U^2 + 4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2);\ (-1)^{\frac{U-1}{2}} \cdot U\right). \\ \qquad U > 0,\ \text{unger.} \end{cases}$$

16. Noch eine der *Liouville*schen Formeln wollen wir ableiten, um eine wichtige Anwendung davon machen zu können.

Sei $F(x, y, z)$ eine Funktion dreier Veränderlichen, welche für alle in Frage kommenden Werte von x, y, z die Bedingungen erfüllt, daß

$$(97)\qquad F(-x, y, z) = -F(x, y, z),\ F(x, -y, -z) = F(x, y, z)$$

sei. Ferner sei s eine ungerade Zahl, die wir auf alle Weise nach der Formel

$$(98)\qquad s = 2s'^2 + s'' = 2s'^2 + d''\delta'',$$

worin d'', δ'' ungerade sein müssen und positiv gedacht werden sollen, zerfällen, und wir bilden die auf alle solche Zerfällungen bezogene Summe

$$S_1 = \sum F(d'' + 2s',\ \delta'' - 2s',\ 2s' + d'' - \delta'').$$

Andererseits denken wir alle möglichen Zerfällungen

$$(99)\qquad 2s = s_1^2 + d_2\delta_2,$$

worin s_1 also auch d_2, δ_2, die positiv gedacht werden sollen, ungerade sind, und bilden die auf alle solche Zerfällungen erstreckte Summe

$$S_2 = \sum F\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2},\ s_1,\ \frac{d_2 - \delta_2}{2}\right).$$

Es soll gezeigt werden, daß

$$(100)\qquad 2S_1 = S_2$$

ist.

Setzt man zu diesem Zwecke

$$(101)\qquad d'' + 2s' = x,\ \delta'' - 2s' = y,\ 2s' + d'' - \delta'' = 2z,$$

wobei z eine ganze, x, y ungerade Zahlen sein werden, so nimmt das allgemeine Glied der Summe S_1 die Form $F(x, y, 2z)$ an, und wir teilen alle diese Glieder in zwei Klassen: in diejenigen, bei welchen $z = 0$, und in die übrigen, bei denen z von Null verschieden ist. Den die letzteren umfassenden Teil der Summe S_1 nennen wir S_1' und handeln zunächst von ihm. Die Gleichungen (101) sind gleichbedeutend mit diesen:

(102) $\delta'' = x - 2z,\ d'' = y + 2z,\ 2s' = x - y - 2z,$

vermittelst deren die Zerfällung (98) eine ganzzahlige Auflösung der Gleichung

(s) $$2s = x^2 + y^2 - 4z^2$$

liefert, bei welcher

(103a) $$x,\ y \text{ ungerade},\ z \gtrless 0$$

und

(103b) $$x - 2z > 0,\ y + 2z > 0$$

ist. Umgekehrt ist für jede solche Auflösung in der Summe S_1' ein zugehöriges Glied $F(x, y, 2z)$ vorhanden, dessen Argumente der durch die Formeln (102) bestimmten Zerfällung (98) entsprechen. Nun gehören immer acht den Bedingungen (103a) genügende Auflösungen der Gleichung (s) zusammen, die sich nur durch verschiedene Vorzeichen voneinander unterscheiden. Von ihnen besteht eine aus lauter positiven ganzen Zahlen ξ, η, ζ, und nur vier von ihnen:

$$\xi, \eta, \zeta; \quad \xi, \eta, -\zeta; \quad \xi, -\eta, \zeta; \quad -\xi, \eta, -\zeta$$

vermögen die Bedingungen (103b) zu erfüllen, also ein Glied für die Summe S_1' zu liefern. Diese Bedingungen nehmen für sie resp. folgende Formen an:

$$\begin{array}{rll} 1) & \xi - 2\zeta > 0, & \eta + 2\zeta > 0 \\ 2) & \xi + 2\zeta > 0, & \eta - 2\zeta > 0 \\ 3) & \xi - 2\zeta > 0, & -\eta + 2\zeta > 0 \\ 4) & -\xi + 2\zeta > 0, & \eta - 2\zeta > 0; \end{array}$$

bei 1) kann die zweite, bei 2) die erste Ungleichheit als selbstverständlich erfüllt unterdrückt werden. Wenn nun aber die Bedingungen 4) erfüllt sind, d. h. wenn der vierten Auflösung ein Glied

$$F(-\xi, \eta, -2\zeta) = -F(\xi, \eta, -2\zeta)$$

der Summe S_1' zugehört, so sind um so mehr die Bedingungen 2) erfüllt, es gehört also auch der zweiten Auflösung ein Glied $F(\xi, \eta, -2\zeta)$ zu, und die Beiträge beider Auflösungen zur Summe S_1' zerstören einander, während die Bedingungen 1) und 3) nicht erfüllt sind. In diesem Falle ist also der gesamte Beitrag der vier Auflösungen Null. Sind dagegen die Bedingungen 4) nicht erfüllt, so gehört weder der vierten Auflösung, noch auch, falls $\xi - 2\zeta < 0$ wäre, einer der drei anderen Auflösungen ein Glied zu; sooft aber $\xi - 2\zeta > 0$ ist, (der Fall der Gleichheit ist ausgeschlossen, da ξ ungerade ist), sind nicht nur die Bedingungen 1), sondern auch eine der Bedingungen 2), 3) erfüllt, und man erhält in S_1' die zugehörigen Glieder $F(\xi, \eta, 2\zeta)$ und resp. $F(\xi, \eta, -2\zeta)$ oder das diesem nach (97) gleiche Glied

$F(\xi, -\eta, 2\zeta)$, zusammen also als den den vier Auflösungen zugehörigen Beitrag

$$F(\xi, \eta, 2\zeta) + F(\xi, \eta, -2\zeta).$$

Daraus erkennt man, daß

$$S_1' = \sum \bigl(F(x, y, 2z) + F(x, y, -2z)\bigr) \tag{104}$$

zu setzen ist, wenn man die Summation auf alle Auflösungen der Gleichung (s) erstreckt, bei denen x, y, z positive ganze Zahlen, x, y ungerade und

$$x - 2z > 0 \tag{105}$$

ist.

17. Setzen wir nunmehr zur Behandlung der Summe S_2

$$\frac{d_2 + \delta_2}{2} = x, \quad s_1 = y, \quad \frac{d_2 - \delta_2}{2} = 2z, \tag{106}$$

so werden x, y, z ganze Zahlen sein; daß es auch z ist, ersieht man da aus (99) die Kongruenz $1 \equiv d_2 \delta_2$, also $d_2 \equiv \delta_2 \pmod{4}$ hervorgeht. Hiernach wird das allgemeine Glied der Summe S_2 wieder $F(x, y, 2z)$, und wir betrachten auch hier zunächst denjenigen Bestandteil S_2' der Summe, welcher die Glieder mit nicht verschwindendem z umfaßt. Aus (106) folgen als gleichbedeutend die Beziehungen

$$s_1 = y, \quad d_2 = x + 2z, \quad \delta_2 = x - 2z \tag{107}$$

und die Zerfällung (99) liefert eine ganzzahlige Auflösung der Gleichung

$$2s = x^2 + y^2 - 4z^2, \tag{s}$$

bei welcher

$$x, y \text{ ungerade}, \quad x > 0, \quad z \gtrless 0 \tag{108 a}$$

und

$$x + 2z > 0, \quad x - 2z > 0 \tag{108 b}$$

ist. Umgekehrt entspricht jeder Auflösung dieser Art in S_2' ein Glied $F(x, y, 2z)$. Nun gehören immer vier Auflösungen zusammen, bei denen die Bedingungen (108 a) erfüllt sind; eine von ihnen besteht aus lauter positiven ganzen Zahlen ξ, η, ζ, und die anderen unterscheiden sich davon nur durch verschiedene Vorzeichen:

$$\xi, \eta, \zeta; \quad \xi, \eta, -\zeta; \quad \xi, -\eta, \zeta; \quad \xi, -\eta, -\zeta.$$

Die ihnen entsprechenden Ungleichheiten (108 b) reduzieren sich stets auf die einzige:

$$\xi - 2\zeta > 0; \tag{109}$$

ist sie nicht erfüllt, so liefern die vier Auflösungen kein Glied zu S_2', andernfalls erhält man die vier Glieder

$$F(\xi, \eta, 2\zeta), \quad F(\xi, \eta, -2\zeta), \quad F(\xi, -\eta, 2\zeta), \quad F(\xi, -\eta, -2\zeta),$$

also zusammengenommen und mit Rücksicht auf (97) den Beitrag

$$2 \cdot [F(\xi, \eta, 2\zeta) + F(\xi, \eta, -2\zeta)]$$

zur Summe S_2'. Hieraus folgt

$$S_2' = 2 \cdot \sum [F(x, y, 2z) + F(x, y, -2z)],$$

wenn auch diese Summe wieder über alle Lösungen der Gleichung (s) bezogen wird, bei denen x, y, z positive ganze Zahlen, x, y ungerade, und

$$x - 2z > 0$$

ist. Man schließt also durch Vergleichung mit (104) zunächst die Gleichheit

$$(110) \qquad 2S_1' = S_2'.$$

Was nun die beiden zunächst ausgeschlossenen Bestandteile der Summen S_1, S_2 betrifft, welche den Auflösungen der Gleichung (s) entsprechen, in denen $z = 0$ ist, so gehört der erstere nach (101) zu denjenigen Auflösungen, bei welchen

$$x = 2s' + d'' = \delta'' > 0, \; y = \delta'' - 2s' = d'' > 0$$

ist, d. i. zu den Auflösungen der Gleichung

$$2s = x^2 + y^2$$

in positiven x, y, und er ist folglich die über solche Auflösungen bezogene Summe

$$(111) \qquad \sum F(x, y, 0).$$

Der andere entspricht den Auflösungen derselben Gleichung (s), in denen nach (106) $d_2 = \delta_2$ also $x = d_2 = \delta_2 > 0$, dagegen die Zahl y, welche, da $2s$ kein Quadrat ist, nicht Null sein kann, positiv oder negativ sein darf; dieser Bestandteil ist also gleich der Summe

$$\sum \big(F(x, y, 0) + F(x, -y, 0)\big),$$

wenn der letzteren gleiche Ausdehnung wie (111) gegeben wird. Wegen (97) ergibt er sich also doppelt so groß, wie (111). In Verbindung mit der Gleichheit (110) erschließt man also auch die zu beweisende Gleichung (100).

Ausführlich geschrieben besteht also die neue *Liouville*sche Formel:

$$(112) \qquad \begin{cases} 2 \cdot \sum\limits_{s = 2s'^2 + d''\delta''} F(d'' + 2s', \; \delta'' - 2s', \; 2s' + d'' - \delta'') \\ = \sum\limits_{2s = s_1^2 + d_2\delta_2} F\left(\dfrac{d_2 + \delta_2}{2}, \; s_1, \; \dfrac{d_2 - \delta_2}{2}\right). \end{cases}$$

Da in der Zerfällung (99) die Buchstaben d_2, δ_2 vertauscht werden dürfen, kann das allgemeine Glied der Summe zur Rechten auch geschrieben werden:

$$F\left(\frac{\delta_2 + d_2}{2}, s_1, \frac{\delta_2 - d_2}{2}\right)$$

d. i. mit Rücksicht auf (97) gleich

$$F\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2}, -s_1, \frac{d_2 - \delta_2}{2}\right).$$

Nun ist in der Zerfällung (99) s_1 als ungerade Zahl nicht Null, erhält aber immer zwei gleiche und entgegengesetzte Werte. Wendet man also bei demjenigen Teile der Summe, welcher sich auf die negativen Werte von s_1 bezieht, die angegebene Umformung an, so erkennt man, daß die ganze Summe durch

$$2 \cdot \sum F\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2}, s_1, \frac{d_2 - \delta_2}{2}\right)$$

ersetzt werden darf, in welcher s_1 nur noch positive Werte erhält. Man kann also (112) auch folgendermaßen schreiben:

$$(112') \quad \sum_{s = 2s'^2 + d''\delta''} F(d'' + 2s', \delta'' - 2s', 2s' + d'' - \delta'') = \sum_{2s = s_1^2 + d_2\delta_2,\, s_1 > 0} F\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2}, s_1, \frac{d_2 - \delta_2}{2}\right).$$

18. Wählt man hierin

$$F(x, y, 2z) = (-1)^{\frac{x-1}{2} + z} \cdot f(y)$$

und versteht dabei unter $f(y)$ eine gerade Funktion von y, so verwandelt sich die allgemeine Formel in diese besondere:

$$\sum (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \cdot f(\delta'' - 2s') = \sum (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}} \cdot f(s_1),$$

deren rechter Seite man auch, wenn $2s - s_1^2 = s_2$ gesetzt wird, die Gestalt

$$\sum_{2s = s_1^2 + s_2} f(s_1) \cdot \varrho(s_2)$$

geben, die man also auch schreiben darf:

$$(113) \qquad \sum_{s = 2s'^2 + d''\delta''} (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \cdot f(\delta'' - 2s') = \sum_{2s = s_1^2 + s_2,\, s_1 > 0} f(s_1) \cdot \varrho(s_2).$$

Nun bedeutet $\varrho(s_2)$ die Anzahl der Zerfällungen

$$s_2 = u_1^2 + g^2$$

in das Quadrat einer positiven ungeraden Zahl u_1 und einer geraden Zahl g; da auch s_1 eine positive ungerade Zahl bezeichnet, die der Übereinstimmung wegen u genannt werden mag, so tritt unter dem Summenzeichen zur Rechten von (113) die Funktion $f(u)$ so oft auf, als

$$2s - u^2 = u_1^2 + g^2$$

Lösungen der angegebenen Art besitzt, und die ganze Summe läßt sich schreiben als

$$\sum f(u)$$

ausgedehnt über alle Lösungen der Gleichung

$$2s = u^2 + u_1^2 + g^2$$

mit positiven ungeraden Zahlen u, u_1. So nimmt die Formel (113) die Gestalt an:

$$(114) \qquad \sum_{s=2s'^2+d''\delta''} (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \cdot f(\delta'' - 2s') = \sum_{2s=u^2+u_1^2+g^2;\ u, u_1 > 0 \text{ unger.}} f(u).$$

Ein interessantes Ergebnis bietet die Wahl

$$f(y) = (-1)^{\frac{y-1}{2}} \cdot y,$$

was in der Tat eine gerade Funktion von y ist. Dann geht die linke Seite über in die Summe

$$\sum (-1)^{s'} \cdot (\delta'' - 2s') = \sum (-1)^{s'} \delta'' - 2 \cdot \sum (-1)^{s'} s',$$

deren zweiter Teil verschwindet, da s', wenn es nicht Null ist, je zwei gleiche aber entgegengesetzte Werte anzunehmen hat, und der erste Teil wird einfacher

$$\sum_{s'} (-1)^{s'} \cdot \zeta_1(s - 2s'^2).$$

Mithin erhält man die Gleichung

$$(115) \qquad \sum_{s'} (-1)^{s'} \cdot \zeta_1(s - 2s'^2) = \sum_{2s=u^2+u_1^2+g^2} (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u.$$

Nun bestimmt $8 \cdot \zeta_1(s - 2s'^2)$ die Anzahl der Auflösungen der Gleichung

$$s - 2s'^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

Nennt man daher N_1 die Anzahl der Auflösungen der Gleichung

$$(116) \qquad s = 2s'^2 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

bei denen s' gerade, und N_2 die Anzahl derjenigen, bei denen s' ungerade ist, so folgt aus der Formel (115) die einfache Beziehung

$$(117)\ N_1 - N_2 = 8 \sum_{u, u_1 > 0,\ \text{ungerade}} (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u = 8 N\left(2s = u^2 + u_1^2 + g^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}} \cdot u\right),$$

deren rechte Seite auch geschrieben werden kann, wie folgt:

$$8\,[1 \cdot \varrho(2s-1) - 3 \cdot \varrho(2s-9) + 5 \cdot \varrho(2s-25) - \cdots].$$

Noch wollen wir in (112') speziell

$$F(x, y, z) = f(x)$$

setzen, wo $f(x)$ eine ungerade Funktion sei. Dann erhalten wir die besondere Formel (s. *Stephen Smith*, report of the British Assoc. for. adv. of sc., London 1866, S. 367):

$$\sum_{s=2s'^2+d''\delta''} f(d'' + 2s') = \sum_{2s=s_1^2+d_2\delta_2,\ s_1>0} f\left(\frac{d_2+\delta_2}{2}\right). \tag{118}$$

Wenn wir nun hier, den Voraussetzungen entsprechend, $f(x) = +1$ wählen, sooft $x > 0$, dagegen $f(x) = -1$, sooft $x < 0$ ist, so lehrt die Formel, daß der Unterschied zwischen der Anzahl der Auflösungen der Gleichung

$$s = 2s'^2 + d''\delta'',$$

bei denen $d'' + 2s' > 0$ ist, und der Anzahl derjenigen, bei welchen $d'' + 2s' < 0$ ist, der Anzahl der Auflösungen der Gleichung

$$2s = s_1^2 + d_2\delta_2$$

mit positivem s_1 gleich ist.

19. Mit diesem Satze, von dem wir später Gebrauch machen werden, wollen wir die Mitteilung *Liouville*scher Formeln beenden und gehen nun daran, sie für die Untersuchung der quaternären quadratischen Formen nutzbar zu machen.

Die Bestimmung der Anzahl aller Darstellungen einer positiven ganzen Zahl s in der Form

$$s = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

gründete sich, wie im vorigen Kapitel gezeigt, auf einen Satz, den wir dahin aussprechen können, daß die Anzahl aller Darstellungen einer positiven ungeraden Zahl u in der Form

$$u = x^2 + y^2$$

gleich $4 \cdot \varrho(u)$ ist, wenn

$$\varrho(u) = \sum_{u=d\delta} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

oder, wie mit Anwendung des *Jacobi*schen Symbols gesagt werden kann,

$$\varrho(u) = \sum_{u=d\delta} \left(\frac{-1}{d}\right) \tag{119}$$

gesetzt wird. Die Theorie der binären quadratischen Formen liefert ganz ähnliche Sätze auch für die Darstellung einer Zahl durch andere quadratische Formen, z. B. durch die Formen

$$x^2 + 2y^2,\ x^2 + 3y^2.$$

So ist die Anzahl aller Darstellungen einer positiven ungeraden Zahl u durch die Form $x^2 + 2y^2$ gleich $2 \cdot \varrho'(u)$, wenn

$$\varrho'(u) = \sum_{u=d\delta} \left(\frac{-2}{d}\right) \tag{120}$$

gesetzt wird, und die Anzahl aller Darstellungen einer positiven, nicht durch 3 teilbaren ungeraden Zahl v durch die Form $x^2 + 3y^2$ gleich $2 \cdot \varrho''(v)$, wenn

$$\varrho''(v) = \sum_{v=d\delta} \left(\frac{-3}{d}\right) \tag{121}$$

gedacht wird. Während wir aber den erstgenannten Satz, wie in Nr. 3 und 4 des vorigen Kapitels gezeigt worden, mit den Methoden der additiven Zahlentheorie begründen konnten, müssen wir uns hier damit begnügen, diese anderen Sätze als Hilfssätze der Theorie der quadratischen Formen zu entnehmen, da für sie eine anderweitige Begründung nicht vorliegt. Übrigens können sie etwas allgemeiner ausgesprochen werden. Ist z. B. $v = 3^h \cdot w$ eine durch 3 teilbare Zahl, während w als nicht durch 3 teilbar gedacht wird, so ist aus jeder Darstellung

$$3^h \cdot w = x^2 + 3y^2$$

zu sehen, daß x durch 3 teilbar, $x = 3x'$ sein muß; da alsdann

$$3^{h-1} \cdot w = y^2 + 3x'^2$$

wird, ergibt sich auch y durch 3 teilbar usw., und man wird zu einer Darstellung von w in derselben Form:

$$w = X^2 + 3Y^2$$

geführt. Da aber auch umgekehrt aus einer solchen sich

$$3^h \cdot w = x^2 + 3y^2$$

ergibt, indem man, je nachdem $h = 2k$ oder $h = 2k + 1$ ist,

$$x = 3^k X,\ y = 3^k Y \text{ oder } x = 3^{k+1} Y,\ y = 3^k X$$

setzt, so leuchtet ein, daß die Anzahl der Darstellungen der Zahl $3^h \cdot w$ durch die Form $x^2 + 3y^2$ ebenso groß ist, wie die der Darstellungen von w, nämlich gleich

$$2 \cdot \sum_{w=d\delta} \left(\frac{-3}{d}\right),$$

wo die Summe sich auf alle Teiler von w d. i. auf diejenigen Teiler von $v = 3^h \cdot w$ bezieht, welche nicht durch 3 aufgehen. Kommt man aber überein, unter dem *Jacobi*schen Symbole $\left(\frac{-3}{n}\right)$ die Null zu verstehen, sooft n durch 3 teilbar ist, so darf man

offenbar die vorige Summe auf sämtliche Teiler d von v erstrecken, sie also durch

$$\sum_{v=d\delta}\left(\frac{-3}{d}\right)$$

ersetzen, da $\left(\frac{-3}{d}\right)$ verschwindet, wenn ein solcher Teiler durch 3 aufgeht. Man erkennt so, daß dann der zuletzt ausgesprochene Satz auch gültig bleibt, wenn die ungerade Zahl v durch 3 teilbar ist.

20. Dies voraufgeschickt, greifen wir nun auf die Formel (16d), in welcher die Summationen sich auf alle Zerfällungen einer geraden Zahl $s=2^h\cdot u$ in zwei ungerade Summanden $s'+s''=d'\delta'+d''\delta''$ bezw. auf alle Teiler t der ungeraden Zahl u erstrecken, wieder zurück, und wählen darin für den Parameter λ zunächst den Wert $\frac{\pi}{4}\cdot$ Dann gibt die Formel die Gleichung:

$$\sum_{s=2^h u=d'\delta'+d''\delta''}\sin\frac{d'\pi}{4}\cdot\sin\frac{d''\pi}{4}=2^{h-1}\cdot\sum_{u=dt}t\cdot\sin^2\left(2^{h-2}\cdot\frac{t\pi}{2}\right).$$

Da nun

$$\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{3\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}},\quad \sin\frac{5\pi}{4}=\sin\frac{7\pi}{4}=-\sqrt{\frac{1}{2}}$$

und somit allgemein für ein ungerades d

$$\sin\frac{d\pi}{4}=\left(\frac{-2}{d}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$$

ist, nimmt die Summe zur Linken die Form:

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{s=d'\delta'+d''\delta''}\left(\frac{-2}{d'}\right)\cdot\left(\frac{-2}{d''}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{s=s'+s''}\varrho'(s')\cdot\varrho'(s'')$$

an, während, je nachdem $h=1$, 2 oder >2 ist,

$$\sin 2^{h-2}\cdot\frac{t\pi}{2}=\left(\frac{-2}{t}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}},\ (-1)^{\frac{t-1}{2}}\ \text{oder Null},$$

demnach die Summe zur Rechten gleich

$$\frac{1}{2}\cdot\sum t,\quad 2\cdot\sum t\ \text{oder Null}$$

wird. Demnach ergeben sich die Formeln:

$$(122)\qquad\left\{\begin{aligned}&\sum_{2u=s'+s''}\varrho'(s')\varrho'(s'')=\zeta_1(u)\\&\sum_{4u=s'+s''}\varrho'(s')\varrho'(s'')=4\cdot\zeta_1(u)\\&\sum_{2^h u=s'+s'',\ h>2}\varrho'(s')\varrho'(s'')=0.\end{aligned}\right.$$

Multipliziert man diese Formeln mit 4, so liest man aus ihnen bei Beachtung der Bedeutung der Zeichen $2\varrho'(s')$, $2\varrho'(s'')$ für ungerade Argumente s', s'' sogleich den folgenden Satz ab: Die Anzahl der Darstellungen von $2^h \cdot u$ als Summe zweier ungeraden Zahlen s', s'' von der Form

$$s' = x^2 + 2z^2, \; s'' = y^2 + 2t^2,$$

wobei notwendig x, y ungerade sind, oder, was dasselbe sagt, die Anzahl der Darstellungen von $2^h \cdot u$ in der Form

$$2^h \cdot u = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 \tag{123}$$

mit ungeraden x, y, in Zeichen:

$$N(\underset{x,\, y \text{ unger.}}{2^h \cdot u = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2})$$

ist $4 \cdot \zeta_1(u)$ oder $16 \cdot \zeta_1(u)$ oder Null, je nachdem $h = 1$, 2 oder > 2 ist.

Für den Fall $h = 1$ ist eine Darstellung

$$2u = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

mit ungeraden x, y nur möglich, wenn z, t beide gerade oder beide ungerade sind, und diese Fälle ereignen sich resp., je nachdem u von der Form $4k + 1$ oder $4k + 3$ ist. Ersetzt man im ersteren Falle die Zeichen z, t durch $2z$, $2t$, so gelangt man zu dem neuen Satze: Die Anzahl der Darstellungen des Doppelten einer positiven Zahl u von der Form $4k + 1$ in der Form

$$2u = x^2 + y^2 + 8(z^2 + t^2) \tag{124}$$

beträgt $4 \cdot \zeta_1(u)$. Daß x, y ungerade sein sollen, ist nicht weiter hinzuzufügen, da die Gleichung selbst diesen Umstand erfordert.

Nennen wir die Anzahl der obigen Darstellungen der geraden Zahl $2^h \cdot u$ kurz $N_1(2^h u)$, so ist, um die Anzahl $N(2^h u)$ der Darstellungen

$$2^h u = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$$

ohne Einschränkung der Zahlen x, y zu erhalten, noch die Bestimmung der Anzahl $N_2(2^h u)$ derjenigen Darstellungen erforderlich, bei welchen x, y gerade sind. Setzt man aber $x = 2x'$, $y = 2y'$, so liefert die vorige Gleichung diese andere:

$$2^{h-1} \cdot u = z^2 + t^2 + 2(x'^2 + u'^2)$$

d. i. eine Darstellung von $2^{h-1} \cdot u$ in der Form

$$X^2 + Y^2 + 2Z^2 + 2T^2,$$

und umgekehrt folgt aus jeder solchen Darstellung von $2^{h-1} \cdot u$ wieder eine Darstellung von $2^h \cdot u$, deren x, y gerade sind, wenn man

$$x = 2Z,\ y = 2T,\ z = X,\ t = Y$$

setzt. Demnach muß

$$N_2(2^h u) = N(2^{h-1}u)$$

und folglich

$$N(2^h u) = N_1(2^h u) + N_2(2^h u) = N_1(2^h u) + N(2^{h-1}u)$$

sein. Diese für jeden Wert $h > 0$ geltende Beziehung gibt durch Fortsetzung der gleichen Betrachtung die Formel

$$N(2^h u) = N_1(2^h u) + N_1(2^{h-1}u) + \cdots + N_1(2u) + N(u).$$

Dem ersten der obigen Sätze zufolge verschwindet aber jede der Anzahlen $N_1(2^h u)$, $N_1(2^{h-1}u)$, ... außer $N_1(4u)$ und $N_1(2u)$, und man erhält, falls $h \geqq 2$ ist,

$$N(2^h u) = N_1(4u) + N_1(2u) + N(u),$$

dagegen für $h = 1$

$$N(2u) = N_1(2u) + N(u)$$

oder kürzer:

$$(125)\qquad \begin{cases} \text{für } h \geqq 2: & N(2^h u) = 20 \cdot \zeta_1(u) + N(u) \\ \text{für } h = 1: & N(2u) \ = \ \ 4 \cdot \zeta_1(u) + N(u). \end{cases}$$

Zur vollständigen Bestimmung von $N(2^h u)$ in jedem Falle bedarf es hiernach noch der Bestimmung von $N(u)$ d. i. der Anzahl der Darstellungen der ungeraden Zahl u in der Form

$$u = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2.$$

Hierzu erinnern wir uns der Formel (40), nach welcher für eine ungerade Zahl u

$$(126)\qquad \varrho(u) + 4 \cdot \sum_{u = s_1 + 2^i s_2} \varrho(s_1)\varrho(s_2) = \zeta_1(u)$$

ist, wenn die Summe auf alle Zerfällungen von u in eine positive ungerade Zahl s_1 und eine positive gerade Zahl $2^i \cdot s_2$ erstreckt wird. Wenn man beachtet, daß

$$\varrho(s) = \sum_{s = d\delta} (-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

wie aus Nr. 2 des vorigen Kapitels leicht hervorgeht, für eine Zahl s von der Form $4k+3$ immer verschwindet, so braucht man die Summation in der voraufgehenden Formel offenbar nur auf diejenigen Zerfällungen

$$u = s_1 + 2^i \cdot s_2$$

auszudehnen, bei welchen die Summanden s_1, s_2 von der Form $4k+1$ sind. Da alsdann $4\varrho(s_1)$, $4\varrho(s_2)$ die Anzahl der Darstellungen von s_1

resp. s_2 als Summe zweier Quadratzahlen bezeichnen, deren letztere bekanntlich gleich der Anzahl derjenigen von $2^{i-1} \cdot s_2$ in derselben Form ist, so ist

$$16 \cdot \sum_{u=s_1+2^i \cdot s_2} \varrho(s_1)\ \varrho(s_2)$$

ersichtlich die Anzahl der Darstellungen von u in der Form

$$u = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2),$$

bei denen $z^2 + t^2$ von Null verschieden ist, und $4\varrho(u)$ die Anzahl der übrigen, nämlich der Darstellungen von u in der Form

$$u = x^2 + y^2.$$

Daher liest man aus der Gleichung (126), wenn man sie mit 4 multipliziert, den Satz ab: Die Anzahl aller Darstellungen einer positiven ungeraden Zahl u in der Form

$$u = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$$

ist gleich $4 \cdot \zeta_1(u)$, in Zeichen:

$$N(u = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2) = 4 \cdot \zeta_1(u). \tag{127}$$

Verbindet man dies Ergebnis endlich mit den Gleichungen (125), so kann man über die Anzahl der Darstellungen einer Zahl durch die Form $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$ überhaupt folgendes aussagen:

Die Anzahl der Darstellungen einer positiven ganzen Zahl $s = 2^h \cdot u$ durch die Form

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 \tag{128}$$

beträgt, je nachdem $h = 0$, 1 oder > 1 ist, resp.

$$4 \cdot \zeta_1(u),\ 8 \cdot \zeta_1(u) \text{ oder } 24 \cdot \zeta_1(u).$$

Übrigens erhält man diese Sätze unmittelbar aus denjenigen über die Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe von vier Quadraten, wie auch umgekehrt die letzteren aus den ersteren folgen. In der Tat, handelt es sich zunächst um eine ungerade Zahl u, so folgt aus jeder Darstellung

$$u = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

durch die Substitution

$$2z = p + q,\ 2t = p - q$$

die Darstellung

$$u = x^2 + y^2 + p^2 + q^2,$$

worin $p^2 + q^2 \equiv p + q \equiv 0 \pmod{2}$. Da aber umgekehrt bei ungeradem u in jeder Darstellung

$$u = x^2 + y^2 + p^2 + q^2 \tag{129}$$

eine der beiden Summen x^2+y^2, p^2+q^2 gerade, die andere ungerade sein muß, wird etwa $p^2+q^2\equiv 0$ d. h. $p\equiv q$ (mod. 2), daher werden

$$z=\frac{p+q}{2},\quad t=\frac{p-q}{2}$$

ganze Zahlen und

$$u=x^2+y^2+2(z^2+t^2)$$

sein und dieselbe Darstellung von u nicht nur der Darstellung (129), sondern auch der zweiten

$$u=p^2+q^2+x^2+y^2$$

zugehören. Daraus folgt ersichtlich

$$N(u=x^2+y^2+z^2+t^2)=2\cdot N(u=x^2+y^2+2z^2+2t^2). \tag{130}$$

Ist andererseits $2^h u$ eine gerade Zahl, also $h>0$, so müssen in der Darstellung

$$2^h u=x^2+y^2+2(z^2+t^2)$$

x, y einander kongruent (mod. 2), mithin

$$p=\frac{x+y}{2},\quad q=\frac{x-y}{2}$$

ganze Zahlen sein, und somit ergibt sich die Darstellung

$$2^{h-1}\cdot u=p^2+q^2+z^2+t^2,$$

wie denn auch umgekehrt aus jeder solchen Darstellung durch die Substitution

$$2p=x+y,\ 2q=x-y$$

die Darstellung

$$2^h\cdot u=x^2+y^2+2(z^2+t^2)$$

hervorgeht. Demnach besteht die Beziehung

$$N(2^{h-1}\cdot u=x^2+y^2+z^2+t^2)=N(2^h\cdot u=x^2+y^2+2z^2+2t^2). \tag{131}$$

Da nun die linken Seiten in (130) und (131) durch den *Jacobi*schen Satz bekannt sind, erhält man unmittelbar die obigen Sätze über die Anzahl der Darstellungen einer Zahl in der Form $x^2+y^2+2z^2+2t^2$; aus der gegebenen direkten Herleitung dieser letzteren folgt so aber auch der *Jacobi*sche Satz.

21. Ist u von der Form $4k+1$, so müssen in der Gleichung

$$u=x^2+y^2+2(z^2+t^2),$$

da x^2+y^2 notwendig ungerade d. i. $\equiv 1$ (mod. 4) ist, z, t beide ungerade oder beide gerade sein. Setzt man daher

$$z+t=2p,\quad z-t=2q, \tag{132}$$

so sind p, q ganze Zahlen, und die Gleichung erhält die Form

$$u = x^2 + y^2 + 4p^2 + 4q^2,$$

und umgekehrt folgt aus jeder Darstellung von u in dieser Form eine Darstellung in der früheren, wenn man durch die Gleichungen (132) zwei ganze Zahlen z, t einführt. Somit folgt

$$N(4k+1 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2) = N(4k+1 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2)$$

also

$$(133) \qquad N(4k+1 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 4 \cdot \zeta_1(4k+1),$$

während offenbar

$$(133\text{a}) \qquad N(4k+3 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 0$$

ist.

Wenn dagegen u von der Form $4k+3$ ist, so muß in der Gleichung

$$u = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

von den Zahlen z, t ebenso wie von den Zahlen x, y eine gerade, die andere ungerade sein. Je vier Darstellungen von u in dieser Form, die sich nur durch Vertauschung von x mit y oder von z mit t unterscheiden, entspricht daher eine einzige Darstellung von u in der Form

$$u = X^2 + 2Y^2 + 4Z^2 + 8T^2$$

und umgekehrt; demnach findet man die Gleichung

$$N(4k+3 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2) = 4 \cdot N(4k+3 = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2)$$

oder

$$(134) \qquad N(4k+3 = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2) = \zeta_1(4k+3).$$

Nach (133) und (133a) ist die Anzahl der Darstellungen einer ungeraden Zahl in der Form

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

bestimmt; die Formel (18) gab sie bereits für eine Zahl $2u$. Ist nun in $2^h \cdot u$ der Exponent $h \geqq 2$, so folgt aus jeder Darstellung

$$2^h \cdot u = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

daß x, y beide gerade, $x = 2x'$, $y = 2y'$ sein müssen, und alsdann findet sich

$$2^{h-2} \cdot u = x'^2 + y'^2 + z^2 + t^2,$$

wie denn auch umgekehrt aus jeder solchen Darstellung von $2^{h-2} \cdot u$ als Summe von vier Quadraten eine Darstellung von $2^h \cdot u$ der gedachten Art hervorgeht. Daher ist

$$N(2^h \cdot u = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2) = N(2^{h-2} \cdot u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2),$$

mithin durch den *Jacobi*schen Satz bestimmt. Im ganzen gelangt man hiernach zu dem folgenden Satze:

Die Anzahl der Darstellungen einer positiven ganzen Zahl $2^h \cdot u$ in der Form

$$x^2+y^2+4z^2+4t^2$$

ist Null, wenn $h=0$ und $u\equiv 3 \pmod{4}$,

$4\cdot\zeta_1(u)$, wenn $h=0$ und $u\equiv 1 \pmod{4}$, oder wenn $h=1$ ist,

$8\cdot\zeta_1(u)$, wenn $h=2$,

$24\cdot\zeta_1(u)$, wenn $h>2$ ist.

22. Zur allgemeinen Formel (39b) zurückgreifend, in welcher s eine ungerade Zahl u bedeutet, setzen wir darin $f(x)=\cos\lambda x$ und erhalten

$$4\cdot\sum_{u=d_1\delta_1+2^i d_2\delta_2}\sin\lambda\delta_1\cdot\sin\lambda\delta_2$$

$$=\zeta_1(u)-\sum_{u=d\delta}\big(1+2\cos 2\lambda+2\cos 4\lambda+\cdots+2\cos(\delta-1)\lambda\big),$$

wo nach bekannter trigonometrischer Formel

$$1+2\cos 2\lambda+2\cos 4\lambda+\cdots+2\cos(\delta-1)\lambda=\frac{\sin\delta\lambda}{\sin\lambda}$$

gesetzt werden darf. Hiernach ist einfacher

$$4\cdot\sum\sin\lambda\delta_1\cdot\sin\lambda\delta_2=\zeta_1(u)-\frac{\sum\sin\delta\lambda}{\sin\lambda}.$$

Wählt man nun den Parameter $\lambda=\frac{\pi}{4}$, so geht die linke Seite in

$$2\cdot\sum_{u=d_1\delta_1+2^i d_2\delta_2}\left(\frac{-2}{\delta_1}\right)\cdot\left(\frac{-2}{\delta_2}\right)=2\cdot\sum_{u=s_1+2^i s_2}\varrho'(s_1)\varrho'(s_2)$$

über, und das zweite Glied zur Rechten in

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sum_{u=d\delta}\left(\frac{-2}{\delta}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\varrho'(u).$$

So erhält man die Beziehung

$$\varrho'(u)+2\cdot\sum_{u=s_1+2^i s_2}\varrho'(s_1)\varrho'(s_2)=\zeta_1(u). \tag{135}$$

Nun bezeichnen $2\varrho'(s_1)$, $2\varrho'(s_2)$ die Anzahl der Darstellungen von s_1 resp. von s_2 oder, was dasselbe sagt, von $2^{i-1}\cdot s_2$ in der Form x^2+2y^2; mithin ist die vierfache Summe die Anzahl derjenigen Darstellungen von u in der Form

$$u=x^2+2y^2+2(z^2+2t^2), \tag{136}$$

bei denen z^2+2t^2 einen von Null verschiedenen Wert $2^{i-1}\cdot s_2$ vorstellt, zudem aber $2\varrho'(u)$ die Anzahl der Darstellungen von u in der Form

$$u = x^2 + 2y^2$$

d. i. derjenigen Darstellungen in der Form (136), bei denen $z^2 + 2t^2 = 0$ ist. Demnach liest man aus obiger Beziehung den Satz ab: die Anzahl der Darstellungen einer ungeraden Zahl u in der Form

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 \tag{136a}$$

ist gleich $2 \cdot \zeta_1(u)$, in Zeichen:

$$N(u = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2) = 2 \cdot \zeta_1(u). \tag{137}$$

Ist aber $2^h \cdot u$ eine gerade Zahl, also $h > 0$, so muß in jeder Gleichung

$$2^h \cdot u = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2$$

x gerade, $x = 2x'$ sein, und es ergibt sich dann

$$2^{h-1} \cdot u = y^2 + z^2 + 2x'^2 + 2t^2,$$

und umgekehrt folgt aus jeder derartigen Darstellung von $2^{h-1} \cdot u$ eine Darstellung von $2^h \cdot u$ in der Form (136a). Also ist, wenn $h > 0$ ist,

$$N(2^h \cdot u = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2) = N(2^{h-1} \cdot u = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2), \tag{138}$$

wodurch man für diesen Fall auf den Satz der Nummer (20) zurückgeführt wird. Demnach läßt sich auf Grund von (137) und (138) der neue Satz aussprechen:

Die Anzahl der Darstellungen einer positiven ganzen Zahl $2^h \cdot u$ in der Form

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2$$

beträgt, wenn $h = 0$ ist, $2 \cdot \zeta_1(u)$, für $h = 1$ ist sie $4 \cdot \zeta_1(u)$, für $h = 2$ gleich $8 \cdot \zeta_1(u)$ und für $h > 2$ gleich $24 \cdot \zeta_1(u)$.

Was ferner die Form

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2 \tag{139}$$

anlangt, so folgt aus jeder Darstellung einer geraden Zahl

$$2^h \cdot u = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2,$$

d. h. wenn $h > 0$ ist, daß x gerade sein muß und, wenn demgemäß $x = 2x'$ gesetzt wird, die Gleichung

$$2^{h-1} \cdot u = y^2 + 2x'^2 + 2z^2 + 4t^2,$$

und umgekehrt aus jeder derartigen Darstellung von $2^{h-1} \cdot u$ auch eine Darstellung von $2^h \cdot u$ in der Form (139). Demnach ist für $h > 0$

$$N(2^h \cdot u = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2) = N(2^{h-1} \cdot u = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2)$$

also dem letzten Satze zufolge für $h = 1$ gleich $2 \cdot \zeta_1(u)$, für $h = 2$ gleich $4 \cdot \zeta_1(u)$, für $h = 3$ gleich $8 \cdot \zeta_1(u)$ und für $h > 3$ gleich $24 \cdot \zeta_1(u)$. Andererseits wissen wir bereits aus (134), daß die Anzahl

der Darstellungen für eine Zahl u von der Form $4k+3$ gleich $\zeta_1(u)$ ist. Der einzige noch übrige Fall einer Zahl u von der Form $4k+1$ ist nicht aus gleichen Quellen zu schöpfen, sondern bedarf einer Hilfsformel, welche die Theorie der elliptischen Funktionen liefert. Sie lautet:

$$\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} \cdot i q^{i^2+4s^2} = \sum(-1)^z \cdot q^{i^2+4x^2+4y^2+4z^2},$$

wo i positiv und ungerade, s, x, y, z beliebige ganze Zahlen sind. Ihr zufolge wird (s. Zusätze), falls $u \equiv 1 \pmod{4}$,

$$N(u = x^2+2y^2+4z^2+8t^2) = \zeta_1(u) + (-1)^{\frac{u^2-1}{8}} \cdot \sum_{u=i^2+4s^2,\ i>0} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \cdot i.$$

Im ganzen also gilt der Satz:

Die Anzahl der Darstellungen einer positiven ganzen Zahl $2^h \cdot u$ in der Form

$$x^2+2y^2+4z^2+8t^2$$

beträgt, wenn $h=0$ ist,

$$\zeta_1(u) \quad \text{oder} \quad \zeta_1(u) + (-1)^{\frac{u^2-1}{8}} \cdot \sum_{u=i^2+4s^2,\ s>0} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \cdot i,$$

je nachdem $u \equiv 3$ oder $\equiv 1 \pmod{4}$; sie beträgt für positives h

$$2 \cdot \zeta_1(u), \quad 4 \cdot \zeta_1(u), \quad 8 \cdot \zeta_1(u), \quad 24 \cdot \zeta_1(u),$$

je nachdem $h = 1, 2, 3$ oder > 3 ist.

23. Zur Behandlung der Form

$$x^2+y^2+3z^2+3t^2 \tag{140}$$

ist wieder eine neue Bahn einzuschlagen. Der Ausgangspunkt zwar bleibt die Formel (16 d), aber wir haben jetzt darin $\lambda = \frac{2\pi}{3}$ zu setzen. Man bemerke, daß

$$\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = \varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

eine kubische Einheitswurzel und ϱ^2 ihre Konjugierte ist. Daraus folgt

$$\cos\frac{2^h t\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2^h t\pi}{3} = \varrho^{2^{h-1} \cdot t}$$

gleich 1, wenn $2^{h-1} \cdot t$, d. i. wenn die ungerade Zahl t durch 3 aufgeht, andernfalls gleich ϱ oder ϱ^2, je nachdem $2^{h-1} \cdot t$ kongruent $+1$ oder $-1 \pmod{3}$, oder, wie dafür gesagt werden darf, je nachdem $2^{h-1} \cdot t$ quadratischer Rest oder Nichtrest von 3, in Zeichen:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{h-1} \cdot \left(\frac{t}{3}\right) = (-1)^{h-1} \cdot \left(\frac{-3}{t}\right) \text{ gleich } +1 \text{ oder } -1$$

ist. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich aus dem Ausdrucke für ϱ die Beziehung:

$$\sin\frac{2^h t\pi}{3} = 0, \text{ wenn } t \text{ teilbar durch } 3,$$

$$\sin\frac{2^h t\pi}{3} = (-1)^{h-1}\cdot\left(\frac{-3}{t}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ wenn } t \text{ nicht teilbar durch } 3.$$

Die zweite dieser Formeln umfaßt auch die erste und gilt demnach allgemein für jeden Wert von t, wenn man wieder übereinkommt, unter dem *Jacobi*schen Zeichen die Null zu verstehen, sooft Zähler und Nenner desselben nicht teilerfremd sind. Daher geht alsdann durch die gedachte Substitution $\lambda = \frac{2\pi}{3}$ die Formel (16 d) über in die folgende:

$$\sum_{2^h\cdot u = d'\delta' + d''\delta''}\left(\frac{-3}{d'}\right)\cdot\left(\frac{-3}{d''}\right) = 2^{h-1}\cdot\sum_{u = dt}\left(\frac{-3}{t}\right)^2\cdot t.$$

Mit Anwendung des durch (121) definierten Zeichens und, wenn man beachtet, daß unter dem Summenzeichen rechts nur diejenigen Teiler t von u verbleiben, welche nicht durch 3 aufgehen, nimmt diese Gleichung die Gestalt an:

$$(141)\qquad \sum_{2^h\cdot u = s' + s''}\varrho''(s')\cdot\varrho''(s'') = 2^{h-1}\cdot\zeta_1^0(u),$$

wenn $\zeta_1^0(u)$ die Summe der durch 3 nicht aufgehenden Teiler t von u bezeichnet und links über alle Zerfällungen von $2^h\cdot u$ in zwei ungerade Summanden summiert wird. Der Bedeutung des Zeichens $2\cdot\varrho''(v)$ für die Darstellung einer ungeraden Zahl v in der Form $x^2 + 3z^2$ gedenkend, kann man der erhaltenen Beziehung den Ausdruck geben: die Anzahl der Zerfällungen einer positiven geraden Zahl $2^h\cdot u$ in die Summe zweier ungeraden Zahlen s', s'' von den Formen

$$s' = x^2 + 3z^2,\quad s'' = y^2 + 3t^2$$

oder, was dasselbe sagt, die Anzahl der Darstellungen von $2^h\cdot u$ in der Form (140) unter der Bedingung, daß $x + z$ und $y + t$ ungerade sind (das zweite ist ersichtlich zugleich mit dem ersten der Fall), beträgt $2^{h+1}\cdot\zeta_1^0(u)$, in Zeichen:

$$(142)\qquad \underset{x+z\equiv 1 \pmod 2}{N(2^h\cdot u = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2)} = 2^{h+1}\cdot\zeta_1^0(u).$$

Ist $h > 1$, so muß hierbei zugleich auch $x + y \equiv 1 \pmod 2$ sein. Denn sonst wären $x + y$ und $z + t$ gleichzeitig gerade; setzte man alsdann

$$x = x_1 + y_1,\ y = x_1 - y_1,\ z = z_1 + t_1,\ t = z_1 - t_1,$$

so wären x_1, y_1, z_1, t_1 ganze Zahlen, und die Gleichung

$$2^h \cdot u = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2$$

nähme die Gestalt an:

$$2^{h-1} \cdot u = x_1^2 + y_1^2 + 3z_1^2 + 3t_1^2,$$

während doch die linke Seite gerade, die rechte Seite aber ungerade ist, weil nach der Annahme $x + z \equiv 1$ d. h.

$$x_1 + y_1 + z_1 + t_1 \equiv 1 \pmod{2}$$

ist.

Nun sei

$$2^h \cdot u = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2$$

eine Darstellung, bei welcher $x + y \equiv 1$ also auch $z + t \equiv 1 \pmod{2}$ ist. Stellen wir ihr die andere Darstellung

$$2^h \cdot u = x^2 + y^2 + 3t^2 + 3z^2$$

an die Seite, so ist entweder $x + z \equiv 1$ oder $x + t \equiv 1$. Je zwei Darstellungen von $2^h \cdot u$ in der Form (140), bei denen $x + y \equiv 1 \pmod{2}$, entspricht also immer eine der Darstellungen, die in (142) gezählt sind, und da in jeder der letzteren, wie gezeigt, $x + y \equiv 1$ sein muß, so verhält sich's auch umgekehrt. Daraus ergibt sich die weitere Tatsache:

Ist $h > 1$, so ist

$$N(2^h \cdot u = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) = 2^{h+2} \cdot \zeta_1^0(u). \tag{143}$$
$$x+y\equiv 1 \pmod{2}.$$

Bezeichnet man diese Anzahl kurz durch $N_1(2^h u)$ und durch $N_2(2^h u)$ die Anzahl der Darstellungen, bei denen im Gegenteil $x + y \equiv 0$, also auch $z + t = 0 \pmod{2}$ ist, mit $N(2^h u)$ aber die gesamte Anzahl der Darstellungen ohne Beschränkung für x, y, so ist zunächst

$$N(2^h u) = N_1(2^h u) + N_2(2^h u). \tag{144}$$

Wenn aber

$$2^h \cdot u = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2$$

und zugleich $x + y \equiv 0$, $z + t \equiv 0 \pmod{2}$ ist, so folgt daraus, wie vorher gezeigt, eine Darstellung von $2^{h-1} \cdot u$, nämlich

$$2^{h-1} \cdot u = x_1^2 + y_1^2 + 3z_1^2 + 3t_1^2$$

ohne Beschränkung der Unbestimmten, sowie offenbar auch umgekehrt. Daher ist

$$N_2(2^h u) = N(2^{h-1} \cdot u)$$

also nach (144)

$$N(2^h \cdot u) - N(2^{h-1} \cdot u) = N_1(2^h \cdot u)$$

d. h., solange $h > 1$ ist,

$$N(2^h \cdot u) - N(2^{h-1} \cdot u) = 2^{h+2} \cdot \zeta_1^0(u).$$

Setzt man hierin der Reihe nach $h-1$, $h-2$, ..., 2 für h und addiert die entstehenden Gleichungen, so kommt

$$(145) \qquad N(2^h \cdot u) - N(2u) = (2^{h+2} + 2^{h+1} + \cdots + 2^4) \cdot \zeta_1^0(u).$$

Nun ist nach Formel (142)

$$N(2u = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) = 4 \cdot \zeta_1^0(u),$$
$$x + z \equiv 1 \pmod{2}$$

die hinzugefügte Bedingung $x + z \equiv 1 \pmod{2}$ aber von selbst erfüllt, denn, wäre $x + z \equiv 0$, so müßte auch $y + t \equiv 0$ sein, und es ergäbe sich die Kongruenz

$$2 \equiv 2u \equiv (x^2 - z^2) + (y^2 - t^2) \pmod{4},$$

wo nun

$$x^2 - z^2 = (x + z)(x - z), \quad y^2 - t^2 = (y + t)(y - t)$$

durch 4 teilbar, also $2 \equiv 0 \pmod{4}$ sein würde. Man darf also einfacher schreiben

$$(146) \qquad N(2u) = 4 \cdot \zeta_1^0(u)$$

und erhält aus (145) die Gleichung

$$N(2^h u) = [2^4(2^{h-1} - 1) + 4] \cdot \zeta_1^0(u)$$

d. i.

$$(147) \qquad N(2^h u) = 4(2^{h+1} - 3) \cdot \zeta_1^0(u).$$

Diese zunächst für $h > 1$ erwiesene Formel gilt auch für $h = 1$, da sie alsdann mit der Gleichung (146) identisch wird.

Um endlich noch $N(u)$ zu bestimmen, bedenke man, daß in jeder Darstellung

$$2u = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2$$

$x + y \equiv 0$ also auch $z + t \equiv 0 \pmod{2}$ sein muß, denn sonst ergäbe sich

$$x^2 + y^2 \equiv 1, \ 3z^2 + 3t^2 \equiv 3 \pmod{4}$$

also

$$2 \equiv 2u = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2 \equiv 0 \pmod{4}.$$

Setzt man demgemäß

$$x = x_1 + y_1, \ y = x_1 - y_1, \quad z = z_1 + t_1, \ t = z_1 - t_1,$$

so findet man eine Darstellung

$$u = x_1^2 + y_1^2 + 3z_1^2 + 3t_1^2$$

ohne Beschränkung der Unbestimmten, umgekehrt aber auch aus einer jeden derartigen Darstellung eine Darstellung von $2u$. Mithin ist $N(u) = N(2u)$ d. h.

$$(148) \qquad N(u) = 4 \cdot \zeta_1^0(u).$$

Die beiden Formeln (147) und (148) lassen sich endlich in eine einzige zusammenfassen und folgender Satz sich aussprechen:

Die Anzahl der Darstellungen einer positiven ganzen Zahl $2^h \cdot u$ in der Form

$$x^2+y^2+3z^2+3t^2$$

beträgt

$$(149)\quad N(2^h u = x^2+y^2+3z^2+3t^2) = 4(2^{h+1}-2-\cos 2^h\pi)\cdot \zeta_1^0(u).$$

Was zuletzt die fünfte der Formen in Nr. 8 des vorigen Kapitels betrifft, so ist es *Liouville* nicht gelungen, die Anzahl der Darstellungen

$$(150)\qquad s = x^2+2y^2+3z^2+6t^2$$

allgemein zu bestimmen. Nur für gerade Zahlen s hat er, ohne ihn zu beweisen, den folgenden Satz ausgesprochen (J. des Math. (2), 9, S. 299):

Setzt man $s = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot n$, n durch 2 und durch 3 nicht teilbar voraus, so ist, falls $\alpha = 1$:

$$(151\text{a})\qquad N(s = x^2+2y^2+3z^2+6t^2) = 2\cdot(3^{\beta+1}-2)\cdot\zeta_1(n),$$

dagegen ist für $\alpha > 1$

$$(151\text{b})\qquad N(s = x^2+2y^2+3z^2+6t^2) = 6\cdot(3^{\beta+1}-2)\cdot\zeta_1(n).$$

Ein Beweis dafür sowie die Ergänzung für den Fall eines ungeraden s steht auch heute noch aus. Dagegen findet man noch eine Menge von Sätzen über andere quaternäre quadratische Formen von *Liouville* ausgesprochen und für eine größere Reihe derselben in einer Arbeit von *Pepin* (J. des Math. (4) 6, S. 5) mittels der *Liouville*schen Formeln die Anzahl der Darstellungen bestimmt, deren eine gegebene Zahl durch sie fähig ist.

24. Zum Schluß dieses Abschnitts soll nun noch gezeigt werden, wie die *Liouville*schen Formeln auch dazu dienen können, die schon erwähnten *Kronecker*schen Rekursionsformeln für die Klassenanzahl binärer quadratischer Formen zu begründen. Zu solchem Zwecke müssen wir zuvor der Theorie dieser Formen einige grundlegende Bemerkungen entlehnen.

Ist

$$(152)\qquad ax^2+2bxy+cy^2$$

oder, wie abkürzend gesagt werden soll, ist (a, b, c) eine quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten, so heißt der aus ihnen gebildete Ausdruck

$$b^2-ac$$

die Determinante der Form. Letztere setzen wir als eine negative Zahl $-n$ voraus, so daß

$$(153)\qquad n = ac-b^2;$$

wir betrachten zudem nur solche Formen, deren äußere Koeffizienten a, c positiv und nicht beide gerade sind, und setzen $n \equiv 1 \pmod{4}$ voraus. Alle derartigen Formen lassen sich in Klassen äquivalenter Formen verteilen, indem man in ein und dieselbe Klasse diejenigen als äquivalent zusammenfaßt, die ineinander durch unimodulare Substitutionen d. i. durch Gleichungen von der Form

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

in denen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügende ganze Zahlen sind, übergeführt werden können. In jeder Klasse befindet sich eine einzige reduzierte Form, so daß die Anzahl der Klassen der endlichen Anzahl der reduzierten Formen gleich ist. Diese lassen sich in drei Kategorien unterscheiden:

1) in Formen (A, B, C), bei denen $|2B| < A < C$,
2) in Formen (A, B, A), bei denen $0 \overline{\gtrless} 2B \overline{\gtrless} A$,
3) in Formen $(2B, B, C)$, bei denen $0 < 2B < C$ ist.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir nun zunächst die reduzierten Formen der ersten Kategorie. Sie können in solche unterschieden werden — ihre Anzahl heiße Z_1 —, deren mittlerer Koeffizient B Null oder eine gerade Zahl ist, und in die übrigen, bei denen er ungerade ist, und diese wieder in Paare von entgegengesetzten d. h. solchen Formen, deren äußere Koeffizienten dieselben, deren mittlere Koeffizienten entgegengesetzt sind. Wird die Anzahl dieser Paare oder, was dasselbe sagt, derjenigen dieser Formen, deren mittlerer Koeffizient positiv ist, Z_2 genannt, so ist

$$H_1 = Z_1 + 2Z_2 \tag{154}$$

die Anzahl der reduzierten Formen der ersten Kategorie.

Denke man sich nun alle ganzzahligen Auflösungen der unbestimmten Gleichung

$$u(u + 4d) - 4z^2 = n, \tag{155}$$

bei welchen d eine positive, u eine ungerade positive Zahl ist, während

$$u > |2z| \tag{155a}$$

sei. Man kann sie in zwei Arten unterscheiden, in solche, bei denen

$$|4z| < u$$

ist, ihre Anzahl heiße Z_1', und in die übrigen, bei denen

$$|4z| > u$$

ist, und diese teilen wir wieder in eine Anzahl Z_2' von Paaren, nämlich in solche, bei welchen z positiv, also

$$4z > u$$

ist, und solche, bei denen z je den gleichen aber entgegengesetzten Wert hat. Die gesamte Anzahl der gedachten Auflösungen beträgt also

(156) $$\mathsf{A} = Z_1' + 2Z_2'.$$

Nun ist $Z_1' = Z_1$. Denn einerseits liefert jede Auflösung von (155), für welche $|4z| < u$ ist, eine Form

$$(u,\ 2z,\ u + 4d)$$

mit der Determinante

$$4z^2 - u(u + 4d) = -n,$$

welche eine reduzierte Form der ersten Kategorie mit geradem mittleren Koeffizienten ist, denn die Bedingungen

$$|4z| < u < u + 4d$$

sind erfüllt. Andererseits gibt jede reduzierte Form der ersten Kategorie, deren mittlerer Koeffizient B gerade, $B = 2z$ ist, zufolge der Gleichung

$$n = AC - B^2 = AC - 4z^2$$

und der Voraussetzung $n \equiv 1 \pmod{4}$ die Kongruenz $A \cdot C \equiv 1$ d. h. $C \equiv A \pmod{4}$, also $C = A + 4d$, worin d wegen $A < C$ eine positive ganze Zahl ist; mithin ist, da A, C nicht beide gerade sind, A eine ungerade Zahl u und es entspricht umgekehrt auch jeder von jenen Z_1 reduzierten Formen eine der gedachten Auflösungen der Gleichung (185). Daher ist $Z_1' = Z_1$.

Ebenso ist $Z_2' = Z_2$. Denn einerseits liefert jede Lösung von (155), bei welcher $4z > u$ ist, in

$$(u,\ u - 2z,\ 2u - 4z + 4d)$$

eine Form (A, B, C) mit der Determinante

$$(u - 2z)^2 - u(2u - 4z + 4d) = -n$$

und mit ungeradem mittleren Koeffizienten, der zugleich nach der den Lösungen der Gleichung (155) aufliegenden Bedingung (155a) positiv ist; der Koeffizient $A = u$ ist positiv und ungerade, und der Koeffizient

$$C = 2(u - 2z) + 4d$$

ist positiv und gerade, also verschieden von A; entweder ist daher (A, B, C) oder (C, B, A) eine jener Lösung zugeordnete reduzierte Form der ersten Kategorie mit positivem ungeraden mittleren Koeffizienten. Wenn andererseits (A, B, C) eine solche Form ist, so ist wegen

$$n = AC - B^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

eine der Zahlen A, C ungerade, die andere das Doppelte einer ungeraden Zahl; sind u', $v' = 2u'' = 2(u' + 2\delta)$ zwei solche Zahlen und

$w' = u' - 2z$, so stellt sich jede der Z_2 reduzierten Formen der gedachten Art entweder in der Gestalt

$$(u', w', v') = (u', u' - 2z, 2u' + 4\delta)$$

dar, worin

$$u' - 2z > 0,\ 2u' - 4z < u',\ \text{also}\ 4z > u'\ \text{und}\ z > 0,$$

ferner

$$u' < 2u' + 4\delta\ \text{also}\ \big(u' + 4(\delta + z)\big) - 2z > 0$$

ist, oder in der Gestalt

$$(v', w', u') = (2u' + 4\delta, u' - 2z, u'),$$

worin $u' - 2z > 0$ und $2u' - 4z < 2u' + 4\delta$ also $4(z + \delta) > 0$ und

$$2z < u' < u' + 4(z + \delta),$$

ferner

$$2u' + 4\delta < u'\ \text{also}\ u' + 4\delta < 0\ \text{und}$$

$$u' < -4\delta < 4z\ \text{also}\ z > 0$$

ist. Man findet zudem

$$u'(2u' + 4\delta) - (u' - 2z)^2 = n$$

d. i.

$$u'\big(u' + 4(\delta + z)\big) - 4z^2 = n.$$

Bedeutet nun u die kleinere der beiden Zahlen u', $u' + 4(\delta + z)$, so ist die andere von der Form $u + 4d$, wo $d > 0$, und jeder der Z_2 reduzierten Formen der gedachten Art entspricht den vorstehenden Ungleichheiten zufolge eine Auflösung der Gleichung

$$u(u + 4d) - 4z^2 = n$$

mit positivem z und den Bedingungen $u > 2z$ und $4z > u$. Also ist in der Tat $Z_2' = Z_2$.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (154) und (156) folgt daher die Gleichheit

$$H_1 = \mathsf{A}, \tag{157}$$

d. h. die Anzahl der reduzierten Formen der ersten Kategorie ist gleich der Anzahl aller gedachten Auflösungen der Gleichung (155) unter Voraussetzung von (155a).

Ist ferner (A, B, C) eine reduzierte Form der zweiten Kategorie, also

$$A^2 - B^2 = n,$$

so bestimmen die Gleichungen

$$A + B = d,\ A - B = \delta$$

positive Zahlen, deren Produkt

$$d\delta = n \tag{158}$$

ist; aus

$$2A = d + \delta,\ 2B = d - \delta$$

und der Bedingung $2B \gtreqless A$ folgen für diese Teiler d, δ von n die Ungleichheiten

$$\delta \gtreqless d \gtreqless 3\delta,$$

welche genauer

$$\delta \gtreqless d < 3\delta \tag{159}$$

zu schreiben sind, da wegen $n \equiv 1 \pmod{4}$ nicht $d = 3\delta$ also $n = 3\delta^2$ sein kann.

Für die reduzierten Formen der dritten Kategorie ist

$$2BC - B^2 = n,$$

woraus mittels der Gleichungen

$$B = \delta,\ 2C - B = d$$

wieder eine Zerlegung (158) der Zahl n in zwei positive Faktoren hervorgeht, welche wegen der Bedingung $2B < C$ der Ungleichheit

$$3\delta < d \tag{160}$$

unterworfen sind.

Denken wir nun alle $\zeta(n)$ Zerlegungen (158) von n in zwei positive Faktoren, und sehen ab von denjenigen, bei welchen $d < \delta$ d. i. $d < \sqrt{n}$ ist, deren Anzahl gleich $\frac{1}{2}\zeta(n)$ resp. $\frac{1}{2}\big(\zeta(n) - 1\big)$ ist, je nachdem n kein Quadrat oder eine Quadratzahl ist, und welche also bei Anwendung eines früheren Zeichens allgemein gleich

$$\tfrac{1}{2}\big(\zeta(n) - \omega(n)\big)$$

gesetzt werden kann, so genügt jede andere Zerlegung entweder den Ungleichheiten (159) oder der Ungleichheit (160), d. h. jeder von ihnen ist entweder eine reduzierte Form der zweiten oder der dritten Kategorie zugeordnet, und umgekehrt. Die gesamte Anzahl H_2 der reduzierten Formen dieser beiden Kategorien ist demnach gleich der Anzahl dieser Zerlegungen von n und beträgt also

$$H_2 = \zeta(n) - \tfrac{1}{2}\big(\zeta(n) - \omega(n)\big) = \tfrac{1}{2}\big(\zeta(n) + \omega(n)\big).$$

Alles in allem sind wir so zu folgendem Ergebnisse geführt: Die Anzahl sämtlicher reduzierten Formen d. h. die Anzahl $H(n)$ der Klassen quadratischer Formen (a, b, c) mit der Determinante $-n \equiv 3 \pmod{4}$, deren äußere Koeffizienten positiv und nicht beide gerade sind, ist

$$H(n) = \mathsf{A} + \tfrac{1}{2}\big(\zeta(n) + \omega(n)\big), \tag{161}$$

wenn A die Anzahl aller ganzzahligen Lösungen der Gleichung (155) bezeichnet, in denen $d > 0$, $u > 0$ und ungerade, und die Bedingung (155a) erfüllt ist.

25. Nachdem wir diesen Hilfssatz abgeleitet haben, gehen wir nun aus von der Formel (118):

$$\sum_{s=2s'^2+d''\delta''} f(d''+2s') = \sum_{2s=s_1^2+d_2\delta_2,\, s_1>0} f\left(\frac{d_2+\delta_2}{2}\right),$$

in welcher s eine positive ungerade Zahl und $f(x)$ eine ungerade Funktion bezeichnet. Eine solche ist

$$f(x) = \varphi(x-t) - \varphi(x+t),$$

wenn darin $\varphi(x)$ eine gerade Funktion vorstellt. Setzt man sie ein, so nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$(162)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=2s'^2+d''\delta''} \big(\varphi(d''+2s'-t) - \varphi(d''+2s'+t)\big) \\ \displaystyle= \sum_{2s=s_1^2+d_2\delta_2,\, s_1>0} \left(\varphi\left(\frac{d_2+\delta_2}{2}-t\right) - \varphi\left(\frac{d_2+\delta_2}{2}+t\right)\right). \end{cases}$$

Nun sei m eine gegebene positive ungerade Zahl, die auf alle Weise nach der Formel

$$(163)\quad m = s + 2^h u = s + 2^h t\tau$$

in einen ungeraden und einen geraden positiven Bestandteil zerfällt werde, wo dann $t\tau$ jede Zerlegung der ungeraden Zahl u in zwei Faktoren vorstellt; man bilde für jede solche Zerfällung die Formel (162) und addiere alle so entstehenden Gleichungen, dann erhält man

$$(164)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum\Big(\sum_{s=2s'^2+d''\delta''} \big(\varphi(d''+2s'-t) - \varphi(d''+2s'+t)\big)\Big) \\ \displaystyle= \sum\left(\sum_{2s=s_1^2+d_2\delta_2,\, s_1>0} \left(\varphi\left(\frac{d_2+\delta_2}{2}-t\right) - \varphi\left(\frac{d_2+\delta_2}{2}+t\right)\right)\right), \end{cases}$$

das äußere Summenzeichen auf alle Zerfällungen (163) bezogen. Die gesamte Summation links erstreckt sich also auf sämtliche Zerfällungen von der Form

$$(165)\quad m = 2s'^2 + d''\delta'' + 2^h t\tau$$

und die Summation rechts auf alle Zerfällungen von der Form

$$(166)\quad 2m = s_1^2 + d_2\delta_2 + 2^{h+1} t\tau.$$

Hier läßt die linke Seite eine Umformung zu, wenn man sich einer anderen der *Liouville*schen Formeln erinnert. Für eine gerade Funktion $f(x)$ bestand die Formel (39b):

$$(167)\quad \begin{cases} 2\cdot \sum\limits_{s=d_1\delta_1+2^i d_2\delta_2} [f(\delta_1-\delta_2)-f(\delta_1+\delta_2)] \\ = \sum\limits_{s=d\delta} d\cdot f(0) - \sum\limits_{s=d\delta}[f(0)+2f(2)+2f(4)+\cdots+2f(\delta-1)]. \end{cases}$$

Nun erhält die Zahl s', wenn sie nicht Null ist, stets je zwei gleiche und entgegengesetzte Werte. Ist $s'=0$, so ist nach (165)

$$m = d''\delta'' + 2^h\cdot t\tau;$$

faßt man also in (164) alle dieser Annahme entsprechenden Glieder der Summe zur Linken zusammen, so erhält man die Summe

$$\sum_{m=d''\delta''+2^h\cdot t\tau}\big(\varphi(d''-t)-\varphi(d''+t)\big),$$

die, weil $\varphi(x)$ eine gerade Funktion, der Formel (167) entsprechend gleich

$$(168)\quad \tfrac{1}{2}\cdot\sum_{m=d''\delta''} d''\varphi(0) - \tfrac{1}{2}\cdot\sum_{m=d''\delta''}[\varphi(0)+2\varphi(2)+\cdots+2\varphi(\delta''-1)]$$

ist. Hat dagegen s' einen von Null verschiedenen Wert, so fasse man in (164) in der Summe zur Linken diejenigen Glieder zusammen, welche dem Werte s' und dem entgegengesetzten Werte $-s'$ entsprechen. So erhält man die Summe

$$\sum_{m-2s'^2=d''\delta''+2^h t\tau}\Big[\big(\varphi(d''-t+2s')+\varphi(d''-t-2s')\big)-\big(\varphi(d''+t+2s')+\varphi(d''+t-2s')\big)\Big].$$

Da nun

$$f(x)=\varphi(x+2s')+\varphi(x-2s')$$

sich leicht als eine gerade Funktion von x erweist, auf welche die Formel (167) anwendbar ist, so kann diese Summe durch den Ausdruck

$$(169)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}\sum d''\cdot\varphi(2s') - \tfrac{1}{2}\cdot\sum[\varphi(2s')+2\varphi(2+2s')+\cdots+2\varphi(\delta''-1+2s')] \\ +\tfrac{1}{2}\sum d''\cdot\varphi(-2s') - \tfrac{1}{2}\cdot\sum[\varphi(-2s')+2\varphi(2-2s')+\cdots+2\varphi(\delta''-1-2s')] \end{cases}$$

ersetzt werden. Die gesamte in (164) linksstehende Summe erhält man, wenn man den Ausdruck (168) und die für alle von Null verschiedenen s' gebildeten Ausdrücke (169) addiert. Somit wird die linke Seite von (164) gleich dem Ausdrucke

$$(170)\quad \tfrac{1}{2}\cdot\sum_{s'}\Big[\sum_{m-2s'^2=d''\delta''} d''\cdot\varphi(2s') - \sum_{m-2s'^2=d''\delta''}\big(\varphi(2s')+2\varphi(2+2s')+\cdots+2\varphi(\delta''-1+2s')\big)\Big],$$

in welchem die äußere Summation auf alle ganzen Zahlen $s' \gtreqless 0$ auszudehnen ist, für welche $m-2s'^2$ positiv bleibt.

26. Galt das Bisherige für jede gerade Funktion $\varphi(x)$, so spezialisieren wir diese nun so, daß für jedes von Null verschiedene x der Wert $\varphi(x)$ gleich Null, dagegen $\varphi(0) = 1$ sei. Um zu sehen, was bei dieser Annahme aus (164) wird, betrachten wir zuvörderst die rechte Seite dieser Gleichung. Hier wird alles verschwinden bis auf die Glieder

$$\varphi\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2} - t\right),$$

in denen $\frac{d_2 + \delta_2}{2} - t = 0$ d. h. $2t = d_2 + \delta_2$ ist. Für diese Glieder nimmt die Zerfällung (166) die Gestalt an

$$2m = s_1^2 + d_2\delta_2 + 2^h\tau(d_2 + \delta_2), \tag{171}$$

demnach geht die ganze rechte Seite von (164) über in die auf die sämtlichen Zerfällungen dieser Art erstreckte Summe

$$\sum \varphi(0)$$

oder, da $\varphi(0) = 1$ ist, in die Anzahl aller eben bezeichneten Zerfällungen. Da aber $2m - s_1^2 \equiv 1 \pmod{4}$, und d_2, δ_2 zwei positive ungerade Zahlen sind, so ergibt sich aus (171) die Kongruenz $d_2\delta_2 \equiv 1$ d. h. $d_2 \equiv \delta_2 \pmod{4}$, mithin sind die durch die Gleichungen

$$d_2 + \delta_2 = 2u, \ d_2 - \delta_2 = 4z$$

bestimmten Zahlen u, z ganze Zahlen, deren erstere positiv und ungerade ist, und da hieraus

$$d_2 = u + 2z, \ \delta_2 = u - 2z$$

hervorgeht, muß

$$u > |2z|$$

sein. Die Gleichung (171) nimmt hierdurch die Gestalt an

$$2m - s_1^2 = u^2 - 4z^2 + 2^{h+1}\tau u$$

oder, wenn $2^{h-1} \cdot \tau = d$ gesetzt wird,

$$2m - s_1^2 = u(u + 4d) - 4z^2, \tag{172}$$

und ersichtlich ist die Anzahl der Zerfällungen (171) gleich derjenigen der Zerfällungen der letzteren Art unter der Bedingung $u > |2z|$. Diese jedoch ist in Nr. 24 bereits ermittelt, und für jedes bestimmte s_1 gleich der Anzahl $H(2m - s_1^2)$ der Klassen quadratischer Formen mit der Determinante $s_1^2 - 2m$ vermindert um den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\left(\zeta(2m - s_1^2) + \omega(2m - s_1^2)\right).$$

Im ganzen also findet man die rechte Seite von (164) gleich der Summe

$$(173)\qquad \sum_{s_1} H(2m - s_1^2) - \frac{1}{2}\sum_{s_1}\zeta(2m - s_1^2) - \frac{1}{2}\sum_{s_1}\omega(2m - s_1^2)$$

ausgedehnt über alle positive s_1, für welche $2m - s_1^2$ positiv bleibt. Nun gibt die Summe

$$\sum_{s_1}\omega(2m - s_1^2)$$

an, wie oft $2m - s_1^2$ das Quadrat einer positiven Zahl, d. h. wie oft $2m$ die Summe zweier Quadrate positiver ganzer Zahlen ist, eine Anzahl, die wir gleich $\varrho(m)$ fanden. Der Ausdruck (173) für die rechte Seite von (164) läßt sich also auch schreiben wie folgt:

$$(174)\qquad \sum_{s_1} H(2m - s_1^2) - \frac{1}{2}\sum_{s_1}\zeta(2m - s_1^2) - \frac{1}{2}\varrho(m).$$

Jetzt betrachten wir die linke Seite von (164) in der Form (170). In dieser reduziert sich die erste Summe in der Klammer offenbar auf

$$\sum_{m=d''\delta''} d'' = \zeta_1(m);$$

ferner wird das substraktive Glied der Klammer zunächst gleich

$$\sum_{m-2s'^2=d''\delta''}\varphi(2s') + 2\cdot\sum_{m-2s'^2=d''\delta''}\big(\varphi(2s'+2) + \varphi(2s'+4) + \cdots + \varphi(2s'+\delta''-1)\big).$$

Die erste dieser Summen reduziert sich auf $\sum_{m=d''\delta''}\cdot\varphi(0) = \zeta(m)$. Die Argumente

$$(175)\qquad 2s'+2,\quad 2s'+4,\quad \cdots,\quad 2s'+\delta''-1$$

aber sind sämtlich von Null verschieden, wenn $s' \geqq 0$, ebenso, wenn bei negativem s'

$$2s' + \delta'' < 0$$

ist, in diesen Fällen verschwindet also das zugehörige Glied der zweiten Summe. Wenn dagegen

$$s' < 0, \quad 2s' + \delta'' > 0$$

ist, so ist gewiß eins und nur eins der Argumente (175) gleich Null, demnach nimmt dann das zugehörige Glied der Summe den Wert 1 an. Somit wird die ganze Summe gleich der A n z a h l derartiger Glieder d. h. gleich der Anzahl derjenigen Zerfällungen

$$(176)\qquad m = 2s'^2 + d''\delta'',$$

für welche

$$s' < 0, \quad 2s' + \delta'' > 0$$

ist, eine Anzahl, die wir bezeichnen wollen durch

$$A\binom{2s'+\delta''>0}{s'<0}.$$

Hiernach erhält man für die linke Seite der Gleichung (164) den Wert

(177) $$\frac{1}{2}\xi_1(m) - \frac{1}{2}\xi(m) - A\begin{pmatrix}2s'+\delta''>0\\ s'<0\end{pmatrix}.$$

Doch läßt er sich noch weiter vereinfachen, wenn man sich des Satzes bedient, der am Ende von Nr. 18 gegeben worden ist. Bedeutet $A(2s'+\delta''>0)$ bzw. $A(2s'+\delta''<0)$ die Anzahl der Zerfällungen (176), bei denen $2s'+\delta''>0$ resp. $2s'+\delta''<0$ ist, so ist jenem Satze zufolge

(178) $$\mathfrak{A} = A(2s'+\delta''>0) - A(2s'+\delta''<0)$$

die Anzahl der Zerfällungen

$$2m = s_1^2 + d_2\delta_2$$

mit positivem s_1, die offenbar für jedes bestimmte s_1 durch $\xi(2m-s_1^2)$, also insgesamt durch die über alle positive s_1, für welche $2m-s_1^2$ positiv bleibt, zu erstreckende Summe

(179) $$\mathfrak{A} = \sum_{s_1}\xi(2m-s_1^2)$$

bestimmt wird. Andererseits ist offenbar

$$A(2s'+\delta''>0) = A\begin{pmatrix}2s'+\delta''>0\\ s'>0\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}2s'+\delta''>0\\ s'<0\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}2s'+\delta''>0\\ s'=0\end{pmatrix}$$

oder, da $A\begin{pmatrix}2s'+\delta''>0\\ s'=0\end{pmatrix}$ gleich der Anzahl der Zerfällungen $m = d''\delta''$ d. i. gleich $\xi(m)$ ist,

(180) $$A(2s'+\delta''>0) = A\begin{pmatrix}2s'+\delta''>0\\ s'>0\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}2s'+\delta''>0\\ s'<0\end{pmatrix} + \xi(m).$$

Man bemerke, daß ersichtlich

$$A(2s'+\delta''<0) = A\begin{pmatrix}2s'+\delta''<0\\ s'<0\end{pmatrix}$$

und

$$A\begin{pmatrix}2s'+\delta''>0\\ s'>0\end{pmatrix} = A(s'>0)$$

ist d. h. gleich der Anzahl der Zerfällungen (176) mit positivem s' welche übrigens der Anzahl derjenigen mit negativem s', also $A(s'<0)$, gleich ist. Für die letztere gilt aber offenbar die Gleichung

(181) $$A(s'<0) = A\begin{pmatrix}2s'+\delta''>0\\ s'<0\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}2s'+\delta''<0\\ s'<0\end{pmatrix}.$$

Mit Beachtung dieser Bemerkungen folgt nun durch Addition der Gleichungen (178), (180) und (181) die andere:

$$\mathfrak{A} = 2A\begin{pmatrix}2s'+\delta''>0\\ s'<0\end{pmatrix} + \xi(m)$$

also der Wert

$$A\begin{pmatrix}2s'+\delta''>0\\ s'<0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathfrak{A} - \frac{1}{2}\xi(m).$$

Wird er eingesetzt in den Ausdruck (177), so ergibt sich für die linke Seite der Gleichung (164) der Wert

$$\frac{1}{2}\zeta_1(m) - \frac{1}{2}\sum_{s_1}\zeta(2m - s_1^2),$$

und nun findet man durch Vergleichung dieser Seite mit dem in (174) gegebenen Werte der rechten Seite die Formel:

$$\sum_{s_1} H(2m - s_1^2) = \frac{1}{2}\left(\zeta_1(m) + \varrho(m)\right)$$

oder ausgeführt geschrieben:

$$(182)\quad H(2m-1) + H(2m-4) + H(2m-9) + \cdots = \frac{1}{2}\left(\zeta_1(m) + \varrho(m)\right)$$

d. i. eine der von *Kronecker* angegebenen Rekursionsformeln.

Eine zweite findet man aus denselben *Liouville*schen Formeln hergeleitet von *Stephen Smith* im report of the British Assoc. for adv. of sciences, London 1866, S. 368/9.

Indem wir mit diesem Ergebnisse die Betrachtung der *Liouville*schen Formeln beschließen, können wir nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß *Kronecker* selbst später seine auf analytischem Wege gefundenen Sätze rein arithmetisch, und zwar von einer Grundlage aus hergeleitet hat (Abh. der Acad. zu Berlin 1882), welche im wesentlichen dieselbe ist, wie die für *Dirichlet*s Beweis des *Jacobi*schen Satzes: die Transformation bilinearer Formen mit vier Veränderlichen. Da das eigentümliche Prinzip dieses Beweises auch für *Liouville*s Formeln den eigentlichen Ausgangspunkt bildet, erkennt man, daß beide Forscher bei der Ableitung der gedachten Rekursionsformeln im Grunde aus gleicher Quelle geschöpft haben.

Neuntes Kapitel.

Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$.

1. Ein letztes Kapitel dieses Werkes soll einer Frage gewidmet sein, zu welcher die Zerfällungen einer Zahl von der im 7. Kapitel betrachteten besonderen Art leicht hinführen, nämlich der Frage, ob eine Summe von Potenzen desselben Grades wieder eine solche Potenz sein könne. Bei Beschränkung auf eine Summe von zwei Potenzen fragt es sich also nach der Auflösbarkeit der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

in ganzen Zahlen x, y, z. Diese Frage hat schon seit geraumer Zeit die Mathematiker beschäftigt und doch bisher noch nicht in

allgemeiner Weise beantwortet werden können. Für den kleinsten Grad $n = 2$ ist sie bereits von den Pythagoräern gestellt und teilweise erledigt worden. Die Aufgabe, die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2, \tag{1}$$

welche, wenn x, y, z als Seitenzahlen gedacht werden, der Ausdruck des Pythagoräischen Satzes vom rechtwinkligen Dreiecke ist, in ganzen Zahlen x, y, z zu lösen, verlangt, geometrisch gefaßt, die Bestimmung eines rechtwinkligen Dreiecks mit rationalen, genauer ganzzahligen Seiten. In diesem Sinne haben die Pythagoräer sie betrachtet. Daß sie lösbar sei, ergab sich ihnen schon aus dem besonders einfachen und charakteristischen Falle

$$x = 3,\ y = 4,\ z = 5,$$

und man hat die Vermutung geäußert, daß diese arithmetische Bemerkung der eigentliche Quell für die Entdeckung des geometrischen Satzes des *Pythagoras* gewesen sei. Es gelang aber nach dem Zeugnisse des *Proclus Diadochus* den Pythagoräern sogar, eine allgemeine Regel aufzustellen, nach welcher noch unendlich viel andere Dreiecke der gedachten Art, die wir kurz Pythagoräische Dreiecke nennen wollen, gefunden werden können. Diese Regel des Pythagoras sagt aus, daß man, unter n eine positive ganze Zahl verstehend,

$$x = 2n + 1,\ y = \frac{(2n+1)^2 - 1}{2},\ z = \frac{(2n+1)^2 + 1}{2} \tag{2}$$

zu setzen habe; in der Tat ist

$$(2n+1)^2 + \left(\frac{(2n+1)^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{(2n+1)^2 + 1}{2}\right)^2$$

oder

$$(2n+1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2.$$

Man hat also, einfacher gesagt, als die eine Kathete eine beliebige ungerade Zahl und das halbe Produkt der sie umgebenden geraden Zahlen als die zweite Kathete zu nehmen. Später aber gab nach desselben Schriftstellers Aussage *Plato* eine andere Regel, die in den Formeln

$$x = 2n,\ y = n^2 - 1,\ z = n^2 + 1 \tag{3}$$

ihren Ausdruck findet und derzufolge in der Tat

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$$

ist. Nach ihr ist also als die eine Kathete die Summe, als die andere das Produkt zweier aufeinander folgender ungerader Zahlen zu nehmen, wenn anders die Seiten in kleinsten Maßzahlen gedacht werden sollen.

Schon die Verschiedenheit dieser zwei Regeln läßt erkennen, daß weder die eine noch die andere die sämtlichen gesuchten Dreiecke

oder sämtliche ganzzahligen Auflösungen der Gleichung (1) liefert. Es ist erst das Verdienst der indischen Mathematiker, Formeln gegeben zu haben, welche dies leisten. Wir leiten zunächst diese von *Brahmagupta* (um 598 n. Chr.) überlieferten Formeln in Kürze hier ab.

2. Da man die Seiten in kleinsten Zahlen gemessen denken kann, dürfen x, y, z als positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler gedacht werden. Dann sind auch je zwei von ihnen teilerfremd, denn jeder Primteiler, welcher zwei beliebigen von ihnen gemeinsam wäre, müßte der vorausgesetzten Gleichung

$$x^2+y^2=z^2$$

zufolge auch in der dritten aufgehen. Deshalb müssen dann die Zahlen x, y ungleichartig, die eine gerade, die andere ungerade sein, da sie sonst, weil sie nicht beide durch 2 teilbar sein dürfen, beide ungerade, z also gerade sein müßten, was die unmögliche Kongruenz

$$2 \equiv x^2+y^2=z^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

nach sich zöge. Setzen wir also etwa x als ungerade, y als gerade voraus. Infolge davon sind $z+x$, $z-x$ positive gerade Zahlen, welche aber nur den Teiler 2 gemeinsam haben, da dies von ihrer Summe und Differenz offenbar ist. Der Bedingung

$$y^2=(z+x)(z-x)$$

zufolge wird man also Gleichungen erhalten von der Form

$$z+x=2\cdot m^2,\ z-x=2\cdot n^2,$$

wo m, n teilerfremde ganze Zahlen sind, die positiv gedacht werden dürfen, und von denen m die größere ist; man findet also, da auch y positiv zu denken ist,

$$x=m^2-n^2,\ y=2mn,\ z=m^2+n^2, \tag{4}$$

denen zufolge m, n, damit x, z ungerade werden, noch der weiteren Bestimmung unterliegen, ungleichartige Zahlen zu sein.

Alle positiven ganzzahligen Auflösungen der Gleichung (1), die ohne gemeinsamen Teiler sind, werden also gegeben durch die Gleichungen (4), wenn m, n den genannten Bestimmungen entsprechen. Da aber ersichtlich auch jedes so gelieferte System von Zahlen x, y, z eine solche Auflösung bildet, so stellen die Formeln (4) unter den sie begleitenden Bedingungen die vollständige Lösung der gestellten Aufgabe dar. Dies sind die indischen Formeln *Brahmaguptas*.[1])

---

1) Im wesentlichen gab dieselben schon *Diophant*, doch stellt sich bei ihm die Lösung nur unter rationaler Form dar. Indem er die Hypotenuse mit a bezeichnet, setzt er

$$x=\frac{(m^2-n^2)a}{m^2+n^2},\quad y=\frac{2mna}{m^2+n^2},\quad z=a.$$

Setzt man z. B. $m = 2$, $n = 1$, so findet man die schon erwähnte Auflösung

$$x = 3,\ y = 4,\ z = 5. \tag{5}$$

Daß dies die einzige Auflösung in drei aufeinander folgenden Zahlen ist, ersieht man einfach daraus, daß die Gleichheit

$$(u-1)^2 + u^2 = (u+1)^2$$

nur besteht, wenn $u^2 = 4u$ d. h., da $u = 0$ für x einen negativen Wert ergäbe, wenn $u = 4$ ist, was zur Auflösung (5) zurückführt. Aber es gibt unendlich viel Auflösungen, bei denen wenigstens x, y zwei aufeinander folgende Zahlen sind. Der Verfasser hat in seiner „Zahlentheorie", Bd. I S. 195/6 einen Satz gegeben, nach welchem sie sämtlich angebbar sind. Man hat dazu nur in der Formel

$$x + y + z\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1) \cdot (3 + 2\sqrt{2})^h \tag{6}$$

für jeden nicht negativen ganzzahligen Exponenten h das Rationale und das Irrationale beiderseits gleichzusetzen und die so gewonnenen zwei Gleichungen mit der dritten:

$$x - y = (-1)^h \tag{6a}$$

zu verknüpfen. Z. B. findet man so für $h = 1$ die Lösung (5); für $h = 2$ die Gleichungen

$$x + y = 41,\ z = 29,\ x - y = 1$$

also die Auflösung

$$x = 21,\ y = 20,\ z = 29; \tag{7}$$

für $h = 3$ kommt

$$x + y = 239,\ z = 169,\ x - y = -1$$

also die Auflösung

$$x = 119,\ y = 120,\ z = 169. \tag{8}$$

Man bemerke, daß

$$\alpha_1 = 3 + 2\sqrt{2},\ \alpha_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 = 6x - 1 \tag{9}$$

und daher die Größen

$$R_h = \frac{\alpha_1^h - \alpha_2^h}{\alpha_1 - \alpha_2},\quad S_h = \alpha_1^h + \alpha_2^h$$

(nach Kap. 2 Nr. 7) die allgemeinen Glieder je einer rekurrenten Zahlenreihe mit der Skala (9) sind. Schreibt man nun die Gleichung (6) bestimmter in der Form

$$x_h + y_h + z_h \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1) \cdot (3 + 2\sqrt{2})^h,$$

so findet man durch Verbindung mit der konjugierten Gleichung

$$x_h + y_h - z_h \cdot \sqrt{2} = (-\sqrt{2} + 1) \cdot (3 - 2\sqrt{2})^h$$

die Beziehung

$$z_h = 2 \cdot R_h + \frac{1}{2} \cdot S_h,$$

und folglich ist auch z_h das allgemeine Glied einer rekurrenten Zahlenreihe mit derselben Skala, und somit besteht zwischen drei aufeinander folgenden Zahlen z_{h-1}, z_h, z_{h+1} die Beziehung

(10) $$z_{h+1} = 6 \cdot z_h - z_{h-1}.$$

In der Tat ist für die drei Lösungen (5), (7), (8)

$$z_{h-1} = 5,\ z_h = 29,\ z_{h+1} = 169$$

und

$$169 = 6 \cdot 29 - 5.$$

3. Man gewinnt eine deutlichere Übersicht über die Gesamtheit der Auflösungen oder der ihnen entsprechenden Pythagoräischen Dreiecke, wenn man mit *H. Rath* (Archiv f. Math. u. Phys. 56, S. 188) in die Formeln (4) die Differenz

(11) $$d = m - n$$

einführt. Sie nehmen dann die Form an

(12) $$x = d(2n + d),\ y = 2n(d + n),\ z = x + 2n^2 = y + d^2,$$

in denen n jede nicht negative ganze, d jede zu n teilerfremde positive ungerade Zahl bezeichnet. Nach den Werten dieser zwei Elemente oder ganzzahligen Parameter d, n lassen sich die sämtlichen Dreiecke in eine Tafel mit doppeltem Eingange ordnen, deren Reihen den verschiedenen Werten von d, deren Spalten den verschiedenen Werten von n entsprechen. Die erste $d = 1$ entsprechende Reihe, für welche

$$x = 2n + 1,\ y = 2n(n + 1),\ z = 2n(n + 1) + 1$$

wird, enthält die nach der Regel des Pythagoras gebildeten, die erste, $n = 1$ entsprechende Spalte, für welche

$$x = (d + 1)^2 - 1,\ y = 2(d + 1),\ z = (d + 1)^2 + 1$$

wird, enthält offenbar die nach der Regel des Plato gebildeten Pythagoräischen Dreiecke.

Jedes Dreieck tritt in der Tafel nur einmal auf. Denn, um seine Stelle in derselben d. h. die Werte von d und n zu finden, welche ihm entsprechen, muß man aus den als gegeben gedachten Werten von x, y, z nach den Formeln (4) die Werte von n, d suchen und findet

$$\frac{z - x}{2} = n^2,\ z - y = d^2,$$

also eindeutig bestimmt

(13) $$n = +\sqrt{\frac{z-x}{2}},\ d = +\sqrt{z-y}.$$

Zugleich mit den Seiten eines Pythagoräischen Dreiecks ist auch die Maßzahl J seines Inhalts eine ganze Zahl, wie aus der Formel

(14) $$J = \frac{xy}{2} = (m^2 - n^2)mn$$

ohne weiteres erhellt.

Die Zahlen 3, 4, 5, welche das einfachste Dreieck ergaben, haben auch für alle übrigen eine besondere Bedeutung. In jedem Pythagoräischen Dreiecke ist nämlich eine der beiden Kathetenzahlen durch 3, desgleichen eine derselben durch 4, endlich eine der drei Seitenzahlen durch 5 teilbar. In der Tat: ist eine der Zahlen m, n durch 3 teilbar, so geht $y = 2mn$ durch 3 auf, entgegengesetztenfalls ist $x = m^2 - n^2 \equiv 1 - 1 \equiv 0$ (mod. 3); ist eine der Zahlen m, n gerade, so geht $y = 2mn$ durch 4 auf, andernfalls ist $x = m^2 - n^2 \equiv 0$ (mod. 4); ist endlich eine der beiden Zahlen m, n durch 5 teilbar, so ist's auch y; im entgegengesetzten Falle geben entweder m^2, n^2 denselben Rest 1 oder 4 (mod. 5) und man findet $x = m^2 - n^2 \equiv 0$, oder das eine Quadrat gibt den Rest 1, das andere den Rest 4, und dann ist $z = m^2 + n^2 \equiv 0$ (mod. 5). Der Inhalt eines Pythagoräischen Dreiecks ist dem eben Bewiesenen zufolge stets ein Vielfaches von 6.

Nebenher bemerke man die Gleichheit

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

4. Man kann nun allgemeiner auch nach den schiefwinkligen Dreiecken fragen, deren Seiten durch rationale oder einfacher — da man sie in kleinsten Zahlen gemessen denken darf — durch ganze Zahlen ohne einen gemeinsamen Teiler ausdrückbar sind. Im allgemeinen wird damit nicht, wie bei den rechtwinkligen Dreiecken, auch der Inhalt rational werden. Unter einem rationalen Dreiecke soll aber in der Folge stets ein solches verstanden werden, bei welchem sowohl die drei Seiten als auch der Inhalt rational ist. Bezeichnet man wieder mit x, y, z die drei Seiten und bestimmt drei Größen a, b, c durch die Gleichungen

(15) $$x = b + c,\ y = c + a,\ z = a + b,$$

woraus

(16) $$\begin{cases} \frac{x+y+z}{2} = a + b + c \\ a = \frac{-x+y+z}{2} \\ b = \frac{x-y+z}{2} \\ c = \frac{x+y-z}{2} \end{cases}$$

hervorgeht, so bedeuten bekanntlich a, b, c die Abschnitte, welche durch die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises, dessen Radius r heiße, auf den Seiten bestimmt werden, und für den Inhalt J besteht die Formel

$$J = \sqrt{(a+b+c)abc}. \tag{17}$$

Alle rationalen Dreiecke zu finden, kommt also zahlentheoretisch darauf hinaus, alle positiven Werte a, b, c zu finden, für welche die Ausdrücke (15) und (17) rational, die ersteren ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler werden.

Da x, y, z keinen gemeinsamen Teiler haben sollen, sind nur drei Fälle denkbar:

1) alle drei Zahlen x, y, z sind ungerade;

2) zwei von ihnen, etwa x, y sind ungerade, die dritte z gerade;

3) eine, etwa x ist ungerade, die beiden anderen y, z gerade.

Im ersten und dritten Falle erhalten a, b, c Werte von der Form

$$a = \frac{2\alpha+1}{2}, \quad b = \frac{2\beta+1}{2}, \quad c = \frac{2\gamma+1}{2},$$

worin α, β, γ ganzzahlig, und (17) nimmt die Gestalt an:

$$J = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\big(2(\alpha+\beta+\gamma)+3\big)(2\alpha+1)(2\beta+1)(2\gamma+1)},$$

wo das unter dem Wurzelzeichen stehende Produkt eine ganze Zahl, die sich leicht $\equiv 3 \pmod{4}$ ergibt. Da aber eine Zahl von der Form $4k+3$ keine Quadratzahl sein kann, so lassen diese beiden Fälle kein rationales Dreieck entstehen. Im zweiten Falle werden den Formeln (16) zufolge a, b, c ganze Zahlen, die nicht alle ungerade sein dürfen, da sonst x, y, z gegen die Annahme den gemeinsamen Teiler 2 erhielten. Da mithin eine von ihnen gerade ist, so muß, falls J rational wird, auch J eine gerade Zahl sein. Man darf nach allem diesem den Satz aussprechen:

In jedem rationalen Dreiecke ist eine und nur eine der Seitenzahlen und auch die Flächenzahl gerade, und alle Seitenteile haben ganze Maßzahlen, unter denen ebenfalls sich eine gerade befindet. Da

$$r = \frac{2J}{x+y+z} = \frac{J}{a+b+c}$$

und die auf x stehende Höhe $h = \frac{2J}{x}$ ist, auch für die auf x durch sie bestimmten Abschnitte s und $t = x \mp s$ leicht

$$s = \frac{x^2+y^2-z^2}{\pm 2x}$$

gefunden wird, so sind in jedem rationalen Dreiecke auch der Radius r des einbeschriebenen Kreises, die Höhen, sowie die durch sie auf den Seiten bestimmten Abschnitte in rationalen Zahlen ausdrückbar.

5. Um nun sämtliche rationalen Dreiecke zu ermitteln, wollen wir mit *H. Rath* zwei Fälle unterscheiden.

Setzen wir erstens den besonderen Fall, daß a, b, c Quadratzahlen sind:

$$a = \alpha^2, \quad b = \beta^2, \quad c = \gamma^2.$$

Dann wird

$$J = \alpha\beta\gamma \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

und es kommt darauf an, drei ganze Zahlen α, β, γ zu bestimmen, für welche

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2$$

eine Quadratzahl wird. Nun dürfen α, β, γ weder sämtlich gerade, noch sämtlich ungerade sein, da sonst x, y, z einen gemeinsamen Teiler 2 erhielten. Sei also etwa α ungerade, β gerade. Setzt man dann

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\delta + \gamma)(\delta - \gamma) = \varphi \cdot \psi,$$

woraus

$$\delta = \frac{\varphi + \psi}{2}, \quad \gamma = \frac{\varphi - \psi}{2}$$

wird, so muß, da $\alpha^2 + \beta^2 \equiv 1 \pmod{4}$, $\varphi \equiv \psi$ sein, und damit werden γ und δ ganzzahlig, γ sogar genauer eine gerade Zahl. Hiernach wird man sämtliche rationalen Dreiecke mit quadratischen Seitenteilen (und nur solche) erhalten, wenn man alle ungeraden Quadrate α^2 mit allen geraden Quadraten β^2 durch Addition verbindet, die Summe $\alpha^2 + \beta^2$ jedesmal in zwei positive Faktoren $\varphi \cdot \psi$ zerlegt, deren größerer φ sei, und $\gamma = \frac{\varphi - \psi}{2}$ setzt; aus den Seitenteilen

$$a = \alpha^2, \quad b = \beta^2, \quad c = \gamma^2$$

ergibt sich dann nach den Formeln (15) das jedesmal zugehörige Dreieck.

Sieht man aber zweitens von der Voraussetzung ab, daß a, b, c Quadratzahlen seien, so gestaltet sich allgemein die Auflösung der Aufgabe folgendermaßen. Damit J rational werde, muß nach (17) das Produkt

$$(a + b + c)abc = a \cdot bc(a + b + c)$$

eine Quadratzahl sein. Nennen wir also d den größten gemeinsamen Teiler der angedeuteten beiden Faktoren, so müssen Gleichungen bestehen von der Form

$$a = d \cdot i^2, \quad bc(a + b + c) = d \cdot h^2, \tag{18}$$

worin i, h relative Primzahlen sind. Daraus folgt

$$bc \cdot (b + c) = d(h^2 - bci^2). \tag{19}$$

Nun sei δ größter gemeinsamer Teiler von b, c, so daß

$$b = \delta\beta, \quad c = \delta\gamma$$

gesetzt werden kann, wo nun β, γ relativ prim und δ zu d teilerfremd ist, da a, b, c keinen gemeinsamen Teiler haben können, ohne daß ihn auch x, y, z hätten. Dann muß der zweiten der Gleichungen (18) zufolge h durch δ teilbar, $h = \delta k$ sein, und die Gleichung (19) nimmt die Form an

$$\frac{\beta\gamma(\beta+\gamma)}{k^2 - \beta\gamma i^2} = \frac{d}{\delta}, \tag{20}$$

d. h. der reduzierte Wert des Bruchs zur Linken ist $\frac{d}{\delta}$. Hiernach stellt sich folgende Regel heraus:

Um sämtliche rationalen Dreiecke zu finden, bilde man für zwei beliebige positive teilerfremde Zahlen β, γ einerseits und für zwei beliebige positive teilerfremde Zahlen k, i andererseits den reduzierten Wert des Bruchs

$$\frac{\beta\gamma(\beta+\gamma)}{k^2 - \beta\gamma i^2};$$

ist $\frac{d}{\delta}$ dieser Wert, so erhält man durch die Formeln

$$a = di^2, \quad b = \delta\beta, \quad c = \delta\gamma$$

die Seitenteile eines jeden der gesuchten Dreiecke.

Z. B. für $\beta = 2$, $\gamma = 1$; $k = 2$, $i = 1$ findet man

$$\frac{\beta\gamma(\beta+\gamma)}{k^2 - \beta\gamma i^2} = \frac{3 \cdot 2}{4 - 2} = \frac{3}{1}$$

also $d = 3$, $\delta = 1$, $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, mithin

$$x = 3, \; y = 4, \; z = 5.$$

Für $\beta = 4$, $\gamma = 3$; $k = 6$, $i = 1$ wird

$$\frac{\beta\gamma(\beta+\gamma)}{k^2 - \beta\gamma i^2} = \frac{7 \cdot 12}{36 - 12} = \frac{7}{2}$$

also $d = 7$, $\delta = 2$, $a = 7$, $b = 8$, $c = 6$ und daher

$$x = 14, \; y = 13, \; z = 15.$$

Beide Fälle sind dadurch ausgezeichnet, daß die Seitenzahlen des im ersten Falle recht-, im zweiten schiefwinkligen Dreieckes drei aufeinander folgende ganze Zahlen sind.

Übrigens kann man bemerken, daß die Aufgabe, alle möglichen rationalen Dreiecke zu finden, auf die Bestimmung der Pythagoräischen Dreiecke zurückkommt. Legt man nämlich zwei solche, allgemeiner gesagt: zwei rationale rechtwinklige Dreiecke, die eine gemeinsame Kathete haben, mit dieser aneinander, was auf zwei Arten geschehen kann, indem die Dreiecke von dieser Kathete aus entweder nach derselben oder nach verschiedenen Seiten fallen, so entstehen zwei schiefwinklige Dreiecke, die wir mit Bezug auf jene als Differenz- und als Summendreieck benennen wollen; offenbar sind sie rationale Dreiecke, da ihre Seiten sowohl, als ihr Inhalt in ganzen

resp. rationalen Zahlen ausdrückbar sind. Auf solche Weise entstehen aber auch sämtliche rationalen Dreiecke. Denn, wenn man in einem solchen irgendeine der drei Höhen zieht, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke mit einer gemeinsamen Kathete; sowohl diese letztere, die Höhe, als die durch sie bestimmten Seitenabschnitte, d. h. die zweiten Katheten der rechtwinkligen Dreiecke, sind aber, wie wir bemerkt haben, rational, ebenso wie ihre Hypotenusen, die zwei anderen Seiten des gegebenen Dreiecks. Also ist das gegebene schiefwinklige Dreieck, je nachdem die Höhe die Gegenseite innerlich oder äußerlich trifft, Summen- oder Differenzdreieck zweier rationalen rechtwinkligen Dreiecke. Die voraufgehenden Betrachtungen haben daher mehr zahlentheoretisches als geometrisches Interesse.

6. Man hat diese Betrachtungen verallgemeinert, indem man statt rationaler Dreiecke auch alle Vierecke zu bestimmen gesucht hat, deren Seiten und Diagonalen, sowie auch deren Inhalt durch rationale Zahlen ausdrückbar sind. Diese Aufgabe ist bereits in des Inders *Brahmagupta* Algebra (Algebra with Arithmetic and Mensuration, herausg. von *Colebrooke*) in Angriff genommen und insoweit nicht ohne Erfolg, als dort eine Reihe von Sätzen gegeben werden, nach denen in der Tat rationale Vierecke gebildet werden können. Nachdem *Chasles* in der 12. Note zu seiner Geschichte der Geometrie den dunklen Sinn dieser Sätze gedeutet, hat *Kummer* (Journ. f. Math. 37, S. 1) nachgewiesen, daß alle von *Brahmagupta* verwendeten Methoden darauf hinauskommen, rationale Vierecke durch Zusammensetzung aus Pythagoräischen Dreiecken zu gewinnen. *Kummer* hat aber zugleich dann einen Weg gezeigt, auf welchem sämtliche möglichen Vierecke der gedachten Art gefunden werden können. In Kürze wollen wir die Hauptresultate seiner Untersuchung hier entwickeln.

Sie gründet sich auf den folgenden Satz:

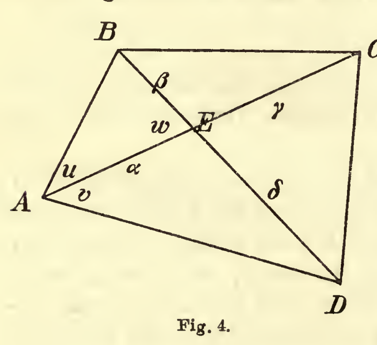


Fig. 4.

In jedem Vierecke, welches rationale Seiten und Diagonalen hat, sind auch die Abschnitte, in welche die letzteren gegenseitig sich teilen, rational.

In der Tat, sei $ABCD$ ein solches Viereck (s. Fig. 4), E der Schnittpunkt der Diagonalen, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Abschnitte auf denselben, und u, v, w die Winkel BAE, DAE und AEB. Da die Seiten der Dreiecke

$$ABC, \; ACD, \; ABD$$

nach Voraussetzung rational sind, so sind es einer bekannten trigonometrischen Formel zufolge auch die Kosinus:

$$\cos u,\ \cos v,\ \cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

also auch $\sin u \cdot \sin v$, desgleichen $\sin^2 v = 1 - \cos^2 v$, also auch $\frac{\sin u}{\sin v}$. Nun erhält man mittels des Sinussatzes die Beziehungen

$$\frac{AB}{BE} = \frac{\sin w}{\sin u},\quad \frac{AD}{DE} = \frac{\sin w}{\sin v}$$

also

$$\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{\sin u}{\sin v},$$

mithin ist $\frac{BE}{DE}$ also auch $\frac{BE}{DE} + 1 = \frac{BD}{DE}$ und daher auch DE, ebenso BE rational. In gleicher Weise finden sich AE und CE durch rationale Zahlen bestimmt.

Hieraus folgt dann weiter, daß in dem Dreiecke AEB mit rationalen Seiten auch $\cos w$ ein rationaler Wert sein muß.

7. Auf Grund dieses Satzes sehen wir, daß die gestellte Aufgabe zunächst zu der anderen führt, ein Dreieck AEB mit rationalen Seiten zu bestimmen, für welches der Kosinus eines seiner Winkel einen gegebenen rationalen Wert

$$\cos w = c = \frac{m}{n}$$

hat. Zu ihrer Lösung dient die Beziehung

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\frac{m}{n}\alpha\beta, \tag{21}$$

in welcher a die Seite AB mißt. Hier darf man den Bruch $\frac{m}{n}$, der als ein beliebiger, doch echter Bruch gegeben gedacht ist, als in kleinsten Zahlen ausgedrückt und, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, die Zahlen a, α, β als ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler voraussetzen. Dann muß $\frac{2m}{n}\alpha\beta$ einer ganzen Zahl gleich sein. Nun bieten sich zwei Fälle dar, je nachdem n gerade oder ungerade ist; da jedoch in beiden die Betrachtung wesentlich dieselbe und auch das Resultat das gleiche ist, genüge es, einen dieser Fälle hier durchzuführen; wir denken n als eine ungerade Zahl. Dann muß n, weil relativ prim zu $2m$, in $\alpha\beta$ aufgehen. Setzen wir also $n = r \cdot s$, so muß etwa

$$\alpha = r\alpha',\ \beta = s\beta'$$

also

$$a^2 = r^2\alpha'^2 + s^2\beta'^2 - 2m\alpha'\beta' \tag{22}$$

sein. Da a, α, β keinen gemeinsamen Teiler haben, können es auch α', β' nicht, und demnach wird wenigstens eine von ihnen, etwa β' ungerade sein. Durch Multiplikation der Gleichung (22) mit r^2 erhält man die andere:

$$a^2r^2 = (r^2\alpha' - m\beta')^2 + (n^2 - m^2)\beta'^2,$$

der wir die Form geben:

$$(23) \qquad (ar - r^2\alpha' + m\beta') \cdot (ar + r^2\alpha' - m\beta') = (n^2 - m^2)\beta'^2.$$

Ist nun ϖ irgendein Primfaktor von β', so kann nur einer der Faktoren zur Linken durch ihn teilbar sein, denn sonst gingen zugleich

$$ar - r^2\alpha', \; ar + r^2\alpha'$$

also auch ar und $r^2\alpha'$ durch ihn auf, jedenfalls also auch α und β und wegen (22) auch a, gegen die Voraussetzung. Hiernach kann die Gleichung (23) nicht anders stattfinden, als indem

$$ar + r^2\alpha' - m\beta' = py^2, \; ar - r^2\alpha' + m\beta' = qz^2$$

ist, worin

$$pq = n^2 - m^2, \; yz = \beta'.$$

Man findet demgemäß

$$\frac{2r^2\alpha'}{\beta'} = \frac{2n\alpha}{\beta} = 2m + \frac{py}{z} - \frac{qz}{y}.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$\frac{py}{z} = n\xi \text{ also } \frac{qz}{y} = \frac{n^2 - m^2}{n\xi},$$

wo nun ξ eine rationale Zahl bedeutet, so läßt sie sich schreiben, wie folgt:

$$\frac{2\alpha}{\beta} = \xi + 2c - \frac{1 - c^2}{\xi}$$

oder

$$(24) \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\xi + c)^2 - 1}{2\xi}.$$

Damit also das Dreieck AEB den gestellten Forderungen genüge, ist notwendig, daß ein rationaler Wert ξ angebbar sei, für welchen das Verhältnis der beiden den Winkel w einschließenden Seiten in der Form (24) dargestellt werden kann. Diese notwendige Bedingung reicht aber zugleich auch aus, d. h., wenn für irgendeinen gegebenen rationalen Wert ξ die beiden den Winkel w einschließenden Seiten als rationale Zahlen in dem durch die Formel (24) bestimmten Verhältnisse gewählt werden, so ist das Dreieck AEB eins der gesuchten, denn nach (21) findet sich leicht

$$(25) \qquad a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2c\alpha\beta} = \beta \cdot \frac{\xi^2 + 1 - c^2}{2\xi},$$

also a ebenfalls rational. —

8. Wird dies nun angewandt zur Bildung eines rationalen Vierecks (Fig. 4), so findet man, da der Winkel bei E im Dreiecke CED gleich w, in den beiden Dreiecken BEC und AED gleich $\pi - w$, der Kosinus jenes also gleich c, die Kosinus dieser gleich $-c$ sind, daß Gleichungen bestehen müssen von der Form

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{(\xi+c)^2-1}{2\xi}, & \dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{(\eta-c)^2-1}{2\eta} \\ \dfrac{\delta}{\alpha}=\dfrac{(x-c)^2-1}{2x}, & \dfrac{\delta}{\gamma}=\dfrac{(y+c)^2-1}{2y}, \end{cases}$$

in denen ξ, η, x, y rationale Werte bedeuten. Da es übrigens nur auf die Längenverhältnisse der Linien ankommt, darf man für eine derselben einen beliebigen rationalen Wert, etwa $\beta=1$ wählen, womit dann die beiden ersten der vorigen Gleichungen die Form annehmen

$$(27)\quad \alpha=\frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi},\quad \gamma=\frac{(\eta-c)^2-1}{2\eta}.$$

Hier treten also fünf Größen x, y, ξ, η, c auf, die aber nicht unabhängig voneinander sind, da durch Elimination von α, γ, δ aus den vier Gleichungen sich eine Bedingungsgleichung, nämlich:

$$(28)\quad \frac{(\eta-c)^2-1}{2\eta}\cdot\frac{(y+c)^2-1}{2y}=\frac{(\xi+c)^2-1}{2\xi}\cdot\frac{(x-c)^2-1}{2x}$$

herausstellt. Demzufolge darf man für drei jener Größen, etwa für ξ, η, c beliebige rationale Werte, den letzteren kleiner als 1, annehmen und hat dann das rationale x so zu wählen, daß y der Gleichung (28) gemäß ebenfalls rational werde. Ist dies auf irgendeine Weise geschehen, so ergibt sich ein Viereck mit rationalen Seiten und Diagonalen, wenn seine Seiten der Formel (25) entsprechend durch die Gleichungen

$$(29)\quad \begin{cases} AB=\dfrac{\xi^2+k^2}{2\xi}, & BC=\dfrac{\eta^2+k^2}{2\eta} \\ CD=\gamma\cdot\dfrac{y^2+k^2}{2y}, & DA=\alpha\cdot\dfrac{x^2+k^2}{2x}, \end{cases}$$

in denen zur Abkürzung k^2 für $1-c^2$ gesetzt ist und unter α, γ die Werte (27) zu verstehen sind, bestimmt werden. Diese Formeln stellen also die vollständige Lösung der Vierecksaufgabe dar.

Will man zudem, daß auch der Inhalt des Vierecks rational werde, so hat man nur zu bemerken, daß sich dieser Inhalt J aus den Inhalten der vier Dreiecke der Figur nach der Formel

$$J=\frac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha)\cdot\sin w$$

berechnet, also zugleich mit $\sin w$ rational wird. Nun ist

$$1=\cos^2 w+\sin^2 w,$$

und aus den indischen Formeln für die Pythagoräischen Dreiecke findet sich ohne weiteres, was *Diophant* schon wußte, daß die allgemeinste Lösung der Gleichung

$$1 = c^2 + d^2$$

in rationalen Zahlen c, d durch die Formeln

$$c = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}, \quad d = \frac{2r}{r^2 + 1}$$

geliefert wird, wenn r rational gewählt wird. Zu dem angegebenen Zwecke hätte man also einfach nur den sonst beliebigen echten Bruch c für $\cos w$ durch einen Wert von der Form $\frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$ zu ersetzen, womit dann auch $\sin w = \frac{2r}{r^2 + 1}$ rational wird.

Nun ist die Gleichung (28) in bezug auf jede der Größen x, y vom zweiten Grade und läßt sich schreiben in jeder der beiden folgenden Formen:

$$\gamma x \cdot y^2 - \left(\alpha x^2 - 2c(\alpha + \gamma)x - \alpha k^2\right) \cdot y - k^2 \gamma x = 0$$

$$\alpha y \cdot x^2 - \left(\gamma y^2 - 2c(\alpha + \gamma)y - \gamma k^2\right) \cdot x - k^2 \alpha y = 0.$$

Löst man die erstere dieser Gleichungen nach y auf, so findet man

$$y = \frac{\alpha x^2 - 2c(\alpha + \gamma)x - \alpha k^2 \pm \sqrt{(\alpha x^2 - 2c(\alpha + \gamma)x - \alpha k^2)^2 + 4k^2\gamma^2 x^2}}{2\gamma x}.$$

Nachdem man also ξ, η, c in der angegebenen Weise als rationale Werte beliebig gewählt hat, wird man, damit auch y rational werde, den rationalen Wert von x so wählen müssen, daß der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck eine rationale Quadratzahl werde. Die sämtlichen jeder Wahl von ξ, η, c so zugehörigen rationalen x liefern auf solche Weise alle zulässigen entsprechenden y und damit die Gesamtheit der gesuchten rationalen Vierecke in Systeme geordnet, wie sie den einzelnen Wertsystemen ξ, η, c entsprechen. So kommt diese Vierecksaufgabe schließlich auf die zahlentheoretische hinaus, alle rationalen Werte von x, z zu finden, für welche

$$(30) \qquad \left(\alpha x^2 - 2c(\alpha + \gamma)x - \alpha k^2\right)^2 + 4k^2\gamma^2 x^2 = z^2$$

wird. Schon *Fermat* und *Euler* haben die Aufgabe, von welcher die genannte nur ein spezieller Fall ist: eine rationalzahlige ganze Funktion von x vom vierten Grade zu einem rationalen Quadrate zu machen, in Angriff genommen und Methoden angegeben, um aus einer bekannten Lösung immer neue zu entwickeln. Mit Hilfe dieser Methoden hat *Kummer* noch gezeigt, wie man, von besonders einfachen Lösungen der Gleichung (30) ausgehend, verschiedene Regeln zur Bildung rationaler Vierecke aufstellen kann. Doch würde uns die weitere Verfolgung seiner Untersuchung zu weit vom eigentlichen Gegenstande dieses Kapitels entfernen.

Wir erwähnen daher auch nur kurz, daß *K. Schwering* (Journ. f. Math. 115, S. 301) eine Methode entwickelt hat, um die noch allgemeinere Aufgabe zu lösen, welche die Bestimmung eines Tetraeders mit rationalen (oder ganzzahligen) Kanten und Inhalt verlangt, und daß auch diese Methode schließlich zu der erwähnten zahlentheoretischen Aufgabe *Fermat*s und *Euler*s wieder zurückführt.

9. Dieser Aufgabe seien daher noch kurz einige Betrachtungen gewidmet.

Es handelt sich darum, den Ausdruck

$$X = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4, \tag{31}$$

in welchem die Koeffizienten als ganze Zahlen gedacht werden dürfen, durch passende Wahl der rationalen Zahl x zu einer rationalen Quadratzahl zu machen.

In dem Falle, wo wenigstens einer der beiden Koeffizienten a, e eine Quadratzahl ist, läßt sich diese Aufgabe, wie *Fermat* (oeuvres de *P. Fermat*, Paris 1896, III, S. 377) gezeigt hat, sehr einfach lösen. Sei etwa $a = \alpha^2$. Dann findet sich

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\alpha + \frac{b}{2\alpha}x + \frac{c - \frac{b^2}{4\alpha^2}}{2\alpha}x^2\right)^2 \\ &= a + bx + cx^2 + \frac{b(4\alpha^2c - b^2)}{8\alpha^4}x^3 + \frac{(4\alpha^2c - b^2)^2}{64\alpha^6}x^4 \end{aligned}\right. \tag{32}$$

und folglich ist das Quadrat dem Ausdrucke X gleich, wenn x so gewählt wird, daß

$$dx^3 + ex^4 = \frac{b(4\alpha^2c - b^2)}{8\alpha^4}x^3 + \frac{(4\alpha^2c - b^2)^2}{64\alpha^6}x^4$$

wird. Vom Werte $x = 0$ abgesehen, der vernachlässigt werden kann, geschieht das für den Wert

$$x = \frac{8\alpha^2(b(4\alpha^2c - b^2) - 8\alpha^4d)}{64\alpha^6e - (4\alpha^2c - b^2)^2}.$$

Eine ganz entsprechende Rechnung liefert ein der Aufgabe genügendes x, falls $e = \varepsilon^2$ ist, und, wenn etwa beide Koeffizienten a, e Quadratzahlen sind, lassen sich noch andere Wege einschlagen (s. bei *Fermat* a. a. O.), was hier nicht weiter verfolgt werden soll.

Ist aber keiner der Koeffizienten a, e eine Quadratzahl, so läßt sich doch dieselbe Methode in Anwendung bringen, um aus einer schon bekannten Auflösung der Aufgabe noch eine neue herzuleiten. Kennt man nämlich einen Wert ξ von x, für welchen der Ausdruck X zu einem Quadrate wird, so daß etwa

$$a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 + e\xi^4 = \alpha^2 \tag{33}$$

ist, so setze man $x = \xi + x'$ in X ein. Dadurch geht X über in

einen aus x' gebildeten Ausdruck von gleicher Art, dessen erstes Glied der Ausdruck (33) also gleich α^2 ist:

$$X = \alpha^2 + b'x' + c'x'^2 + d'x'^3 + e'x'^4, \tag{34}$$

und nun kann auf dem zuvor angegebenen Wege ein Wert von x', also auch ein neuer Wert $x = \xi + x'$ von x ermittelt werden, durch welchen der Ausdruck X einer Quadratzahl gleich wird. Auf solche Weise kann man also nach gleichbleibender Regel eine unbegrenzte Anzahl von Werten x der verlangten Art finden, falls nicht etwa einmal die Anwendung der Regel auf einen bereits zuvor schon erhaltenen Wert von x zurückführt.

Etwas anders verfährt *Euler*, der dieselbe Aufgabe zu wiederholten Malen behandelt hat.[1]) Er sucht zunächst den Ausdruck X in die Form zu bringen:

$$X = P^2 + QR, \tag{35}$$

worin

$$\begin{cases} P = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \\ Q = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 \\ R = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 \end{cases} \tag{36}$$

Funktionen zweiten Grades von x sind. Falls in X der Koeffizient a eine Quadratzahl α^2 ist, oder dadurch, daß bereits ein der Aufgabe genügender Wert ξ von x bekannt ist, dem Ausdrucke X, wie soeben gezeigt, die Form (34) gegeben werden kann, in welcher jene Voraussetzung erfüllt ist, wird für X in der *Fermat*schen Weise die gewünschte Form (35) durch die Gleichung (32) erreicht, derzufolge

$$P = \alpha + \frac{b}{2\alpha}x + \frac{c - \frac{b^2}{4\alpha^2}}{2\alpha}x^2$$
$$Q = x^2$$
$$R = \left[d - \frac{b(4\alpha^2 c - b^2)}{8\alpha^4}\right]x + \left[e - \frac{(4\alpha^2 c - b^2)^2}{64\alpha^6}\right]x^2$$

gesetzt werden kann. Noch einfacher erreicht man das Ziel in diesem Falle, wenn man setzt

$$P = \alpha + \frac{b}{2\alpha}x,$$
$$Q = x^2$$
$$R = c - \frac{b^2}{4\alpha^2} + dx + ex^2.$$

---

1) S. Mém. Acad. St. Pétersb. 11 (1830) oder in den Commentat. arithm. collectae II, S. 418, 467, 474 die Abhandlungen

de insigni promotione Analysis Diophanteae; de resolutione hujus aequationis

$$0 = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + ix^2y^2$$

per numeros integros;

methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi.

Nehmen wir irgendwie die Form (35) für X gefunden an, und setzen dann

(37) $$X=(P+Qy)^2,$$

so muß y der Gleichung genügen

(38) $$Qy^2+2Py-R=0,$$

welche sowohl in y als auch in x vom zweiten Grade ist und, nach Potenzen von x geordnet,

(39) $$Sx^2+Tx+U=0$$

heißen möge, wobei jetzt S, T, U ganze Funktionen von y vom zweiten Grade bedeuten.

Gesetzt nun, man kenne einen Wert $x=\xi$, welcher den Ausdruck X zu einem Quadrat macht, so wird y wegen (37) einen entsprechenden rationalen Wert η erhalten, der für $x=\xi$ der Gleichung (38) genügt. Als quadratische Gleichung hat letztere aber noch eine zweite ebenfalls rationale Wurzel η', so daß die Gleichung (38) oder die ihr gleichbedeutende Gleichung (39) durch das System $x=\xi$, $y=\eta'$ rationaler Werte befriedigt wird d. h. entsprechend dem Werte $y=\eta'$ die rationale Wurzel $x=\xi$ hat. Sie muß daher als quadratische Gleichung noch eine zweite dem Werte $y=\eta'$ entsprechende ebenfalls rationale Wurzel $x=\xi'$ haben, so daß (39) also auch (38) durch das rationale Wertsystem $x=\xi'$, $y=\eta'$ erfüllt d. h. ξ' ein neuer der Aufgabe genügender Wert von x wird; dann muß aber die Gleichung (38) für $x=\xi'$ wieder außer $y=\eta'$ noch eine zweite ebenfalls rationale Wurzel $y=\eta''$ haben, der entsprechend wieder ein neuer der Aufgabe genügender Wert $x=\xi''$ gefunden wird, usw. fort. Man sieht also auch auf diesem Wege *Euler*s aus einer einzigen als bekannt vorausgesetzten Lösung $x=\xi$ eine unbegrenzte Menge neuer Lösungen entstehen, wenn man nicht etwa beim Fortgange des Verfahrens einmal auf einen schon dagewesenen Wert von x zurückgeführt wird.

Wenngleich nun diese Methoden ausreichen, um aus einer Lösung der Aufgabe noch andere zu finden, so leuchtet doch ein, daß damit die Aufgabe bei weitem nicht erledigt ist. Hierzu fehlt es einerseits an dem Nachweise, wie jederzeit eine Lösung gefunden werden könne, andererseits an einer Methode, um aus dieser oder anderen fundamentalen Lösungen sämtliche übrigen zu erhalten, und bis zur Zeit sind diese Teile der Aufgabe noch völlig ungelöst geblieben.

10. Wir kehren nun zur Gleichung

(40) $$x^n+y^n=z^n$$

wieder zurück. Es ist gezeigt worden, daß sie, falls $n=2$ ist, unendlich viel Auflösungen in ganzen Zahlen x, y, z besitzt. Um so merkwürdiger ist eine berühmt gewordene Aussage von *Pierre Fermat*, derzufolge der Wert 2 des Exponenten n der einzige ist, für welchen

überhaupt der Gleichung (40) ganzzahlige Auflösungen zukommen, daß sie also für $n > 2$ in ganzen Zahlen x, y, z unlösbar sei. Dieser Ausspruch *Fermat*s findet sich in seinen Observationes zu des Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus, cum commentariis C. G. Bacheti 1670, und lautet in der zweiten Randbemerkung folgendermaßen:

Cubum autem in duos cubos aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere; cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Höchst bedauerlicherweise hat *Fermat* auch sonst diesen „wunderbaren Beweis" seines Satzes, der zum Unterschiede von dem gewöhnlich als *Fermat*scher Satz bezeichneten Satze aus der Theorie der Potenzreste der „große *Fermat*sche Satz" genannt wird, weder veröffentlicht noch hinterlassen, und seit *Euler* mühen sich die Mathematiker vergeblich, diesen oder einen anderen Beweis zu finden, durch welchen die gedachte Tatsache als allgemeingültig erwiesen würde, eine Tatsache, die, falls sie richtig ist, die Zahl 2 in ganz entsprechender Weise allen übrigen Primzahlen gegenübersetzen würde, wie es durch ihre Eigenschaft als einzige gerade Primzahl geschieht. Die Mittel, welche *Fermat* für seinen Beweis zu Gebote gestanden haben, können nur unseren Begriffen nach elementare gewesen sein, und doch haben selbst sehr hochgehende neuere Methoden den Satz noch nicht allgemein festzustellen vermocht, wennschon sie und einfachere Betrachtungen seine Gültigkeit in weitem Umfange haben erkennen lassen. An der Wahrhaftigkeit von *Fermat*s Aussage ist bei der großen Aufrichtigkeit, mit welcher er überall sich über Dinge äußert, die ihm noch nicht nach Wunsch gelungen, nicht zu zweifeln; spricht er doch mehrfach ganz bestimmt aus, daß, wie er unfähig sei, sich mehr zuzuschreiben, als er wisse, er ebenso freimütig bekenne, was er nicht wisse. Wenn man demnach die Frage aufwirft, ob er tatsächlich einen Beweis für seine Behauptung besessen, so kann man damit nur die Richtigkeit seiner Aussage bezweifeln, nämlich annehmen, daß er möglicherweise sich über die Beweiskraft seiner Schlüsse getäuscht habe.

Vermögen wir nun auch unsererseits leider nicht, einen allgemeinen Beweis des großen *Fermat*schen Satzes mitzuteilen, so dürfte doch eine gedrängte Darstellung dessen, was zu diesem Zwecke hauptsächlich bisher versucht und geleistet worden ist, namentlich insoweit es nur elementare Gebiete der Zahlentheorie in Anspruch nimmt, nicht unwillkommen und vielleicht auch für weitere Bemühungen um den Beweis des Satzes von Nutzen sein, und so wollen wir das vorliegende Werk mit einer solchen Skizze beschließen.

11. Das einzige, was wir von *Fermats* Beweis seines großen Satzes wissen, ist ein allgemeiner Fingerzeig über die Methode desselben. In seiner 33sten Randbemerkung zum Diophant verweist er auf eine Beweisart, welche er in der 45sten Randbemerkung zur Begründung eines anderen Satzes von ähnlichem Charakter verwendet hat. Dieser Satz hat bei ihm eine geometrische Fassung und lautet folgendermaßen:

Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreieckes mit ganzzahligen Seiten ist niemals einer Quadratzahl gleich.

Wir lassen zunächst den *Fermat*schen Beweis hierfür, wie er von *Legendre* (théorie des nombres 2. éd. 1808, S. 340) in die moderne mathematische Zeichensprache übertragen worden ist, hier folgen.

Man darf die Seitenzahlen x, y, z ohne gemeinsamen Teiler voraussetzen, da mit Unterdrückung eines solchen der Maßzahl des Inhaltes nur ein quadratischer Faktor entzogen wird, sie mithin, wenn sie ursprünglich eiue Quadratzahl war, auch nachher eine bleibt. Dann treten die indischen Formeln in Kraft und man darf setzen

$$x = 2ab,\ y = a^2 - b^2,$$

wo a, b ungleichartig und teilerfremd sind. Wenn also der Inhalt des Dreiecks eine Quadratzahl wäre, so müßte

$$ab \cdot (a^2 - b^2)$$

eine solche sein. Die Zahlen a, b sind aber auch teilerfremd zu $a^2 - b^2$, folglich müßten die drei Faktoren einzeln Quadratzahlen, etwa

$$a = \alpha^2,\ b = \beta^2 \tag{41}$$

und

$$a^2 - b^2 = \alpha^4 - \beta^4 = \gamma^2 \tag{42}$$

sein. Schreibt man nun hierfür

$$(\alpha^2 + \beta^2) \cdot (\alpha^2 - \beta^2) = \gamma^2,$$

so müssen wieder die Faktoren $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^2 - \beta^2$, da α^2, β^2 relativ prim und ungleichartig sind, einander teilerfremd und selbst Quadratzahlen, etwa

$$\alpha^2 + \beta^2 = \xi^2,\ \alpha^2 - \beta^2 = \eta^2 \tag{43}$$

also

$$\eta^2 + 2\beta^2 = \xi^2 \tag{44}$$

sein.

Hier bedarf man nun zum weiteren Fortgange des Beweises eines Satzes aus der Theorie der quadratischen Formen mit der Determinante -2 oder, wie wir lieber sagen wollen, aus der Theorie des aus $\sqrt{-2}$ gebildeten quadratischen Zahlenkörpers. Unter diesem Zahlenkörper versteht man die Gesamtheit aller Zahlen, welche aus $\sqrt{-2}$ und ganzen Zahlen durch die vier

rationalen Operationen gebildet werden können. Die ganzen algebraischen Zahlen desselben sind die Zahlen von der Form $u + v\sqrt{-2}$ mit ganzzahligen u, v, und es herrschen für diese Zahlen die gleichen Teilbarkeitsgesetze, wie für die ganzen rationalen Zahlen, insbesondere ihre eindeutige Zerlegbarkeit in einfachste, sogenannte Primfaktoren von derselben Form, derart, daß aus der Gleichung (44), der die Form

$$(\eta + \beta\sqrt{-2}) \cdot (\eta - \beta\sqrt{-2}) = \xi^2$$

gegeben werden kann, während $\eta + \beta\sqrt{-2}$, $\eta - \beta\sqrt{-2}$ keinen gemeinsamen Teiler zulassen, zu schließen ist, daß $\eta + \beta\sqrt{-2}$ selbst das Quadrat einer ganzen Zahl des Körpers, etwa

$$\eta + \beta\sqrt{-2} = (\lambda + \mu\sqrt{-2})^2$$

d. h.

$$\eta = \lambda^2 - 2\mu^2, \; \beta = 2\lambda\mu$$

ist. Aus diesen Gleichungen, in welchen, da η eine ungerade Zahl ist, λ ebenfalls ungerade ist, und, weil η, β ebenso wie α, β teilerfremd sind, auch λ, μ teilerfremd sein müssen, folgt mit Rücksicht auf (43)

$$\alpha^2 = \eta^2 + \beta^2 = \lambda^4 + 4\mu^4.$$

Gäbe es also ein Pythagoräisches Dreieck, dessen Inhalt eine Quadratzahl ist, so gäbe es auch ein zweites solches Dreieck mit den Katheten λ^2, $2\mu^2$ und der Hypotenuse α^2, welche, wie man leicht übersieht, wesentlich kleiner sind, als die entsprechenden Seiten des ersteren, und dessen Inhalt gleich $\lambda^2\mu^2$, also ebenfalls eine Quadratzahl wäre. Da für dies neue Dreieck die gleichen Betrachtungen wiederholt werden dürften, erhielte man aus der Voraussetzung eine unbegrenzte Reihe von Dreiecken mit immer kleineren ganzzahligen Seiten, was ein Unding ist.

Man sieht, das Prinzip des *Fermat*schen Beweisverfahrens ist, wie er selbst es nennt, une descente infinie d. h. ein unbegrenzter Fortgang von dem vorausgesetzten Dreiecke zu immer neuen von gleicher Beschaffenheit aber mit abnehmenden Seitenzahlen und führt, da ein solcher Fortgang widersinnig ist, per absurdum zum Beweise des Satzes.

12. Aus ihm folgt nun sehr einfach, daß die Gleichung

$$x^4 - y^4 = z^2 \tag{45}$$

in ganzen Zahlen x, y, z unlösbar ist. Denn, gäbe es eine Lösung, so dürften, wie sogleich einzusehen, x, y, z zu je zweien als teilerfremd gedacht werden, und demnach müßten x, y entweder beide ungerade, oder eine von ihnen gerade, die andere ungerade sein. Die letztere Annahme führte zu einer Gleichung wie die Gleichung (42)

und damit zu der ganzen Reihe der aus ihr gezogenen Folgerungen, erweist sich also als unzulässig. Wären dagegen beide x, y ungerade, so würde z gerade sein. Schreibt man dann die Gleichung (45) in der Form

$$z^2 + y^4 = x^4,$$

so ergäbe sich nach den indischen Formeln

$$z = 2ab,\ y^2 = a^2 - b^2,\ x^2 = a^2 + b^2$$

demnach

$$a^4 - b^4 = (xy)^2,$$

wo nun a, b ungleichartige Zahlen sind, und man käme auf die vorige, als unzulässig erkannte Annahme zurück.

Die gleiche Beweismethode ist aber, wie *Fermat* schon ausgesagt und *Legendre* (a. a. O.) gezeigt hat, anwendbar, um auch die Unmöglichkeit der Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{45a}$$

zu erweisen. Da auch in ihr wieder x, y, z als zu je zweien teilerfremd gedacht werden dürfen, x, y aber nicht gleichzeitig ungerade sein können, da sich sonst die unmögliche Kongruenz $2 \equiv 0 \pmod{4}$ ergäbe, können x, y nur ungleichartige Zahlen sein, mit Rücksicht auf die indischen Formeln erhielte man also die Beziehungen

$$x^2 = 2ab,\ y^2 = a^2 - b^2,\ z = a^2 + b^2,$$

in denen a, b teilerfremd und ungleichartig sind. Zudem muß a ungerade, b gerade sein, da bei umgekehrter Annahme sich $y^2 \equiv -1 \pmod{4}$ ergäbe, was unmöglich ist. Setzt man demnach $b = 2b'$, so folgt aus $x^2 = 4b'a$, daß sowohl a wie b' Quadratzahlen sein müssen, etwa $a = \alpha^2$, $b' = \beta^2$, $b = 2\beta^2$, mithin

$$\alpha^4 - 4\beta^4 = y^2. \tag{46}$$

Man kann nun entweder auf den früheren *Fermat*schen Satz zurückführen, indem man diese Gleichung in die Form setzt

$$(\alpha^2 + 2\beta^2) \cdot (\alpha^2 - 2\beta^2) = y^2,$$

woraus die Faktoren, da sie offenbar teilerfremd sind, sich einzeln als Quadratzahlen ergeben, mithin eine Gleichung

$$\alpha^2 + 2\beta^2 = \xi^2$$

von der Art (44) hervorgeht, deren Unmöglichkeit gezeigt worden ist.

Oder aber man kann einfacher, ohne hier des Satzes aus der Körpertheorie zu benötigen, folgendermaßen fortschließen: Aus (46) folgt

$$\alpha^4 = 4\beta^4 + y^2$$

rationalen Operationen gebildet werden können. Die ganzen algebraischen Zahlen desselben sind die Zahlen von der Form $u + v\sqrt{-2}$ mit ganzzahligen u, v, und es herrschen für diese Zahlen die gleichen Teilbarkeitsgesetze, wie für die ganzen rationalen Zahlen, insbesondere ihre eindeutige Zerlegbarkeit in einfachste, sogenannte Primfaktoren von derselben Form, derart, daß aus der Gleichung (44), der die Form

$$(\eta + \beta\sqrt{-2}) \cdot (\eta - \beta\sqrt{-2}) = \xi^2$$

gegeben werden kann, während $\eta + \beta\sqrt{-2}$, $\eta - \beta\sqrt{-2}$ keinen gemeinsamen Teiler zulassen, zu schließen ist, daß $\eta + \beta\sqrt{-2}$ selbst das Quadrat einer ganzen Zahl des Körpers, etwa

$$\eta + \beta\sqrt{-2} = (\lambda + \mu\sqrt{-2})^2$$

d. h.

$$\eta = \lambda^2 - 2\mu^2,\ \beta = 2\lambda\mu$$

ist. Aus diesen Gleichungen, in welchen, da η eine ungerade Zahl ist, λ ebenfalls ungerade ist, und, weil η, β ebenso wie α, β teilerfremd sind, auch λ, μ teilerfremd sein müssen, folgt mit Rücksicht auf (43)

$$\alpha^2 = \eta^2 + \beta^2 = \lambda^4 + 4\mu^4.$$

Gäbe es also ein Pythagoräisches Dreieck, dessen Inhalt eine Quadratzahl ist, so gäbe es auch ein zweites solches Dreieck mit den Katheten λ^2, $2\mu^2$ und der Hypotenuse α^2, welche, wie man leicht übersieht, wesentlich kleiner sind, als die entsprechenden Seiten des ersteren, und dessen Inhalt gleich $\lambda^2\mu^2$, also ebenfalls eine Quadratzahl wäre. Da für dies neue Dreieck die gleichen Betrachtungen wiederholt werden dürften, erhielte man aus der Voraussetzung eine unbegrenzte Reihe von Dreiecken mit immer kleineren ganzzahligen Seiten, was ein Unding ist.

Man sieht, das Prinzip des *Fermat*schen Beweisverfahrens ist, wie er selbst es nennt, une descente infinie d. h. ein unbegrenzter Fortgang von dem vorausgesetzten Dreiecke zu immer neuen von gleicher Beschaffenheit aber mit abnehmenden Seitenzahlen und führt, da ein solcher Fortgang widersinnig ist, per absurdum zum Beweise des Satzes.

12. Aus ihm folgt nun sehr einfach, daß die Gleichung

$$x^4 - y^4 = z^2 \tag{45}$$

in ganzen Zahlen x, y, z unlösbar ist. Denn, gäbe es eine Lösung, so dürften, wie sogleich einzusehen, x, y, z zu je zweien als teilerfremd gedacht werden, und demnach müßten x, y entweder beide ungerade, oder eine von ihnen gerade, die andere ungerade sein. Die letztere Annahme führte zu einer Gleichung wie die Gleichung (42)

und damit zu der ganzen Reihe der aus ihr gezogenen Folgerungen, erweist sich also als unzulässig. Wären dagegen beide x, y ungerade, so würde z gerade sein. Schreibt man dann die Gleichung (45) in der Form

$$z^2 + y^4 = x^4,$$

so ergäbe sich nach den indischen Formeln

$$z = 2ab, \quad y^2 = a^2 - b^2, \quad x^2 = a^2 + b^2$$

demnach

$$a^4 - b^4 = (xy)^2,$$

wo nun a, b ungleichartige Zahlen sind, und man käme auf die vorige, als unzulässig erkannte Annahme zurück.

Die gleiche Beweismethode ist aber, wie *Fermat* schon ausgesagt und *Legendre* (a. a. O.) gezeigt hat, anwendbar, um auch die Unmöglichkeit der Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{45a}$$

zu erweisen. Da auch in ihr wieder x, y, z als zu je zweien teilerfremd gedacht werden dürfen, x, y aber nicht gleichzeitig ungerade sein können, da sich sonst die unmögliche Kongruenz $2 \equiv 0 \pmod{4}$ ergäbe, können x, y nur ungleichartige Zahlen sein, mit Rücksicht auf die indischen Formeln erhielte man also die Beziehungen

$$x^2 = 2ab, \quad y^2 = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2,$$

in denen a, b teilerfremd und ungleichartig sind. Zudem muß a ungerade, b gerade sein, da bei umgekehrter Annahme sich $y^2 \equiv -1 \pmod{4}$ ergäbe, was unmöglich ist. Setzt man demnach $b = 2b'$, so folgt aus $x^2 = 4b'a$, daß sowohl a wie b' Quadratzahlen sein müssen, etwa $a = \alpha^2$, $b' = \beta^2$, $b = 2\beta^2$, mithin

$$\alpha^4 - 4\beta^4 = y^2. \tag{46}$$

Man kann nun entweder auf den früheren *Fermat*schen Satz zurückführen, indem man diese Gleichung in die Form setzt

$$(\alpha^2 + 2\beta^2) \cdot (\alpha^2 - 2\beta^2) = y^2,$$

woraus die Faktoren, da sie offenbar teilerfremd sind, sich einzeln als Quadratzahlen ergeben, mithin eine Gleichung

$$\alpha^2 + 2\beta^2 = \xi^2$$

von der Art (44) hervorgeht, deren Unmöglichkeit gezeigt worden ist.

Oder aber man kann einfacher, ohne hier des Satzes aus der Körpertheorie zu benötigen, folgendermaßen fortschließen: Aus (46) folgt

$$\alpha^4 = 4\beta^4 + y^2$$

in denen a, b zwei teilerfremde, nicht durch 3 teilbare Zahlen sind, die erste gerade, die zweite ungerade.

Nun bedarf man zum Fortgange des Beweises wieder eines Satzes aus der Theorie der quadratischen Formen mit der Determinante -3 oder aus der Theorie des aus $\sqrt{-3}$ gebildeten Zahlenkörpers. Die ganzen algebraischen Zahlen des letzteren sind die Zahlen von der Form $\frac{u+v\sqrt{-3}}{2}$ mit ganzen, einander (mod. 2) kongruenten u, v, und sind auch hier wieder eindeutig in Primfaktoren von derselben Form zerlegbar, so daß aus der zweiten der Gleichungen (51), d. i. aus

$$(p + q\sqrt{-3}) \cdot (p - q\sqrt{-3}) = b^3,$$

wo die Faktoren ohne gemeinsamen Teiler sind, sich $p + q\sqrt{-3}$, von einer dem Körper angehörigen Einheit als Faktor abgesehen, selbst als eine dritte Potenz ergibt und man, wie unschwer zu sehen,

$$p + q\sqrt{-3} = \left(\frac{u+v\sqrt{-3}}{2}\right)^3$$

setzen kann, wobei u, v als gerade zu denken sind. Setzt man also $u = 2r$, $v = 2s$, so kommt

$$p + q\sqrt{-3} = r^3 - 9rs^2 + 3s(r^2 - s^2)\sqrt{-3}$$

d. h.

$$p = r(r^2 - 9s^2), \quad q = 3s(r^2 - s^2) \tag{52}$$

also

$$2p = 2r \cdot (r + 3s)(r - 3s) = a^3. \tag{53}$$

Da wegen (52) jeder gemeinsame Teiler von r und s auch ein solcher der teilerfremden Zahlen p, q wäre, müssen auch r, s teilerfremd sein, auch müssen sie, wie p, q, die erste gerade, die zweite ungerade sein, endlich r durch 3 nicht teilbar; daher sind die drei Faktoren in (53) ebenfalls zu je zweien ohne gemeinsamen Teiler und man erschließt Gleichungen von der Form

$$2r = \zeta^3, \quad r + 3s = \xi^3, \quad r - 3s = \eta^3$$

also

$$\xi^3 + \eta^3 = \zeta^3,$$

während keine der Zahlen ξ, η, ζ durch 3 teilbar ist. Dies ist aber, wie anfangs gezeigt worden, eine Unmöglichkeit.

Ist zweitens z die durch 3 teilbare der drei Zahlen x, y, z, also p durch 3 teilbar, so läßt sich ein ganz ähnliches Schlußverfahren durchführen, und man erhielte eine neue Gleichung von der Form (49), aber in wesentlich kleineren ganzen Zahlen, von der aus man dieselbe Betrachtung wiederholen könnte. So käme man

entweder endlich einmal auf eine Gleichung, wie der erste Fall sie bietet, die mithin unmöglich ist, oder es fände ein unbegrenztes Herabsteigen zu immer kleineren ganzen Zahlen statt, also ein Widerspruch. Die Gleichung (49) ist also unlösbar.

Man sieht, auch hier führt eine descente zum Beweise ganz ähnlich derjenigen, deren sich *Fermat* bei dem anfangs in Nr. 11 behandelten Falle bedient hat. Jedoch bemerkt *Fermat* in einem an *Carcavi* gerichteten Briefe (oeuvres II S. 431): J'ai ensuite considéré certaines questions — und unter ihnen wird die Gleichung (49) erwähnt — qui ne restent pas de recevoir très grande difficulté, la méthode pour y pratiquer la descente étant tout a fait diverse des précédentes, comme il sera aisé d'éprouver. Es ist nicht gut möglich zu sagen, was *Fermat* hiermit gemeint hat. Aber in der Tat findet zwischen der descente des *Euler*schen Beweises und der früheren ein Unterschied statt, den es lohnt klarzustellen. Im Grunde wird nämlich der zweite der unterschiedenen beiden Fälle auf den ersten zurückgeführt durch eine neue Art der descente, deren eigentümliches Prinzip zuerst von *Legendre* (Zahlentheorie, deutsch von *Maser*, Bd. 2, S. 348) und später von *Kummer* in seinen allgemeinen Untersuchungen über den *Fermat*schen Satz eingehalten worden ist.

Man setze

$$z = 2^k 3^h \cdot z_1,$$

wo z_1 ungerade und nicht durch 3 teilbar ist; dadurch geht (50) in die Gestalt über:

$$2p \cdot (p^2 + 3q^2) = 2^{3k} \cdot 3^{3h} \cdot z_1^3.$$

Da $p^2 + 3q^2$ ungerade, jetzt aber einmal durch 3 teilbar ist, ergibt sich hieraus das Bestehen zweier Gleichungen

$$2p = 2^{3k} \cdot 3^{3h-1} \cdot a^3, \; p^2 + 3q^2 = 3b^3,$$

in denen a, b als Faktoren von z_1 nicht durch 3 teilbar sind, und deren letzte auch geschrieben werden kann, wie folgt:

$$(p + q\sqrt{-3}) \cdot (p - q\sqrt{-3}) = (\sqrt{-3})^2 \cdot (-b)^3.$$

Mit Hilfe des Satzes aus der Körpertheorie, den wir oben benutzt, erschließt man hieraus, da die Faktoren $p + q\sqrt{-3}$, $p - q\sqrt{-3}$ die Zahl $\sqrt{-3}$ des Körpers zum größten gemeinsamen Teiler haben, daß

$$p + q\sqrt{-3} = \sqrt{-3} \cdot (r + s\sqrt{-3})^3$$

also

$$p = 9s(s + r)(s - r), \; q = r(r^2 - 9s^2)$$

sein muß. Folglich ergibt sich

$$2s(s + r)(s - r) = 2^{3k} \cdot 3^{3h-3} \cdot a^3.$$

Die Zahlen r, s müssen ohne gemeinsamen Teiler, und da q ungerade ist, s gerade, r ungerade sein; mithin sind die drei Faktoren zur Rechten zu je zweien teilerfremd, und hieraus erschließt man entweder Gleichungen von der Form

$$2s = 2^{3k}\zeta^3,\ s \pm r = 3^{3h-3}\xi^3,\ s \mp r = \eta^3$$

also

$$(3^{h-1}\xi)^3 + \eta^3 = (2^k\zeta)^3, \tag{54}$$

oder Gleichungen von dieser anderen Form:

$$2s = 2^{3k}\cdot 3^{3h-3}\cdot\zeta^3,\ s \pm r = \xi^3,\ s \mp r = \eta^3$$

also

$$\xi^3 + \eta^3 = (2^k\cdot 3^{h-1}\cdot\zeta)^3, \tag{55}$$

wobei ζ als Faktor von a nicht mehr durch 3 teilbar ist. Die Gleichung (54) ist eine Gleichung von der Form (49) des ersten Falles, kann also nicht statthaben; die Gleichung (55) hat die Gestalt der Gleichung (49) des zweiten Falles, in welcher jedoch die höchste in z aufgehende Potenz von 3 erniedrigt ist. Somit gelangt man durch Wiederholung des gleichen Verfahrens endlich zu einer Gleichung von der Gestalt (49), in welcher z überhaupt nicht mehr durch 3 aufgeht d. i. zu einer Gleichung des ersten Falles, aus deren Unzulässigkeit auch jede Gleichung des zweiten Falles als unmöglich erhellt.

14. Auch für die nun folgenden Fälle der Gleichungen

$$x^5 + y^5 = z^5 \tag{56}$$

$$x^7 + y^7 = z^7 \tag{57}$$

ist auf elementarem Wege die *Fermat*sche Behauptung ihrer Unlösbarkeit in ganzen Zahlen bewiesen. Zunächst kann festgestellt werden — wir kommen später darauf zurück —, daß immer eine der Zahlen x, y, z durch den Exponenten 5 resp. 7 teilbar sein muß, und man darf voraussetzen, daß z diese Zahl sei. Die Unlösbarkeit der Gleichung (56) unter dieser Voraussetzung wurde zuerst von *Dirichlet* in einer der Pariser Akademie am 11. 7. 1825 vorgelesenen Arbeit, die in *Crelle*s Journal für Mathematik 3, S. 354/68 veröffentlicht ist, für den Fall bewiesen, daß z zugleich die gerade der Zahlen x, y, z ist. Darauf bewies *Legendre* im 2. Supplément seiner théorie des nombres den ganzen Satz und zwar den *Dirichlet*schen Fall in gleicher Weise wie dieser, den andern, wo z ungerade ist, durch eine besondere Analyse. In der Addition zu seiner genannten Arbeit (a. a. O. S. 368 ff.) gab dann *Dirichlet* den Beweis auch für den letztern Fall auf völlig analoge Weise wie für den erstern. Ohne auf diesen Beweis hier eingehen zu können, sei nur hervorgehoben, daß seine Methode, wie bei *Fermat*, ein unbegrenztes Herabsteigen von einer gewissen, in der

Form schon komplizierteren Gleichung in ganzen Zahlen zu einer anderen von der gleichen Beschaffenheit, aber in stets kleineren ganzen Zahlen ist, und daß die Grundlage des Beweises wieder zwei Hilfssätze bilden, welche der Theorie des aus $\sqrt{+5}$ gebildeten Zahlenkörpers angehören. Um nämlich auf die allgemeinste Weise den Ausdruck p^2-5q^2 mittels teilerfremder und ungleichartiger Zahlen p, q, deren letztere durch 5 teilbar sein soll, zu einer durch 5 nicht teilbaren fünften Potenz zu machen, genügt es

$$p+q\sqrt{5}=(r+s\sqrt{5})^5$$

zu setzen, während die Zahlen r, s teilerfremd und ungleichartig und r durch 5 nicht teilbar gedacht werden. Soll ebenso allgemein p^2-5q^2 zum Vierfachen einer solchen Potenz gemacht werden, während p, q teilerfremde ungerade Zahlen, deren letztere durch 5 teilbar ist, bedeuten, so ist zu setzen

$$\frac{p+q\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{r+s\sqrt{5}}{2}\right)^5$$

und r, s als ungerade teilerfremde Zahlen zu denken, deren erstere durch 5 nicht teilbar ist. *Dirichlet* stellt diese Sätze durch eine längere Reihe von Schlüssen fest. Sie ergeben sich als eine einfache Folge aus der Theorie des genannten Zahlenkörpers durch die Bemerkung, daß seine algebraisch ganzen Zahlen die Zahlen von der Form $\frac{u+v\sqrt{5}}{2}$ sind, wo u, v einander (mod. 2) kongruente Zahlen bedeuten, und daß wieder für diese seine ganzen Zahlen eindeutige Zerlegbarkeit in Primfaktoren von derselben Form herrscht. Soll also

$$\frac{P+Q\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{P-Q\sqrt{5}}{2}=\frac{P^2-5Q^2}{4},$$

wo P, Q teilerfremde und ungerade Zahlen bezeichnen, eine nicht durch 5 teilbare fünfte Potenz sein, während Q aufgeht durch 5, so muß, da ein gemeinsamer Teiler beider Faktoren auch P und $Q\sqrt{5}$ gemeinsam sein müßte, also nicht vorhanden ist, $\frac{P+Q\sqrt{5}}{2}$ selbst bis auf einen Faktor, der eine dem Körper angehörige Einheit wäre, sich jedoch durch die Bedingung, daß Q durch 5 teilbar sein soll, auf Eins reduziert, eine fünfte Potenz, also

$$\frac{P+Q\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{u+v\sqrt{5}}{2}\right)^5$$

sein. Weil P, Q ungerade gedacht sind, so werden es auch u, v und man erhält den zweiten Hilfssatz. Ebenso findet man den ersten, wenn $P=2p$, $Q=2q$ und p, q als teilerfremd und ungleichartig vorausgesetzt werden.

15. In ganz analoger Weise hat zuerst *Lamé* (Journ. des Math. 5 (1840), S. 195) die *Fermat*sche Behauptung auch für die Gleichung (57) bestätigt und darauf *Lebesgue* (an dems. Orte S. 276 und 348) eine Vereinfachung seines Beweises geliefert; auch in jener Arbeit zeigt sich die Notwendigkeit, Sätze aus der Theorie des entsprechenden Zahlenkörpers zu Hilfe zu nehmen. Das Eingreifen eines solchen Zahlenkörpers in das *Fermat*sche Problem begreift sich sogleich aus dem Umstande, daß nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Kreisteilung für jeden Wert der ungeraden Primzahl p

$$\frac{x^p + y^p}{x + y} = \frac{1}{4}\left(X^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p\, Y^2\right) \tag{58}$$

gesetzt werden kann, wo X, Y ganze ganzzahlige Funktionen von x, y also mit diesen Größen zugleich ganze Zahlen sind. Die beiden Faktoren

$$\frac{X + Y\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p}}{2}, \quad \frac{X - Y\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p}}{2}, \tag{59}$$

in welche die rechte Seite der Gleichung (58) zerfällt, sind ganze algebraische Zahlen des aus der Größe $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p}$ gebildeten Zahlenkörpers. Aber in diesem gelten im allgemeinen nicht mehr die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze, und eine eindeutige Zerlegbarkeit seiner ganzen Zahlen in sogenannte Primfaktoren ist nicht mehr vorhanden, wenn diese von derselben Form sein sollen. Um zu einer solchen zurückzukehren, müssen gewisse Zahlengebilde eingeführt werden, die man Ideale nennt und welche nach einem bestimmten Prinzipe der Äquivalenz in eine endliche Anzahl von Klassen verteilt werden können. Jede der ganzen Zahlen des Körpers aber ist dann auf eindeutige Weise in ein Produkt einfacher, sogenannter Primideale zerlegbar. Nun wird später gezeigt werden, daß, wenn die Gleichung

$$x^p + y^p = z^p \tag{60}$$

in ganzen Zahlen x, y, z bestehen soll, die linke Seite der Gleichung (58) eine p^{te} Potenz oder das p-fache einer solchen sein muß. Fassen wir nur den ersteren dieser Fälle ins Auge, so müßten also die Faktoren (59) ihrer rechten Seite, sobald sie ohne einen dem Körper angehörigen gemeinsamen Teiler sind, selbst p^{te} Potenzen eines gewissen Ideals sein. Falls dann p in der Anzahl der Idealklassen nicht aufgeht, würde aus der allgemeinen Theorie der Zahlenkörper folgen, daß jene Faktoren bis auf Einheitsfaktoren gleich p^{ten} Potenzen anderer ganzer Zahlen

$$\frac{u + v\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p}}{2}, \quad \frac{u - v\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p}}{2}$$

des Körpers wären, und es würde sich so ein Beweisgang anschicken ähnlich den bisher schon beobachteten. Entsprechendes gälte in dem zweiten der vorher unterschiedenen Fälle. Doch abgesehen davon, daß es nur für die Primzahlen p der erwähnten Art zum Ziele führen könnte, zeigen schon die Arbeiten von *Lamé* und *Lebesgue*, wie ungemein die Betrachtungen mit wachsendem Werte des Exponenten p sich verwickeln und vermutlich bald undurchführbar werden würden.

Mit Zuhilfenahme des Kreisteilungskörpers, d. i. der aus p^{ten} Wurzeln der Einheit gebildeten Zahlen, auf welchen die voraufgehende Erörterung schon hinweist, ist es *Kummer* gelungen, den großen *Fermat*schen Lehrsatz für alle Primzahlexponenten p, die einer gewissen Bedingung genügen, sogar in viel allgemeinerem Sinne, als *Fermat* ihn gemeint hat, zu beweisen, nämlich den Nachweis zu führen, daß die Gleichung (60) nicht nur nicht in ganzen rationalen, sondern auch nicht einmal in ganzen algebraischen dem Kreisteilungskörper angehörigen Zahlen auflösbar ist. Es ist noch unbekannt, ob es solcher Primzahlen p eine nur endliche oder eine unendliche Anzahl gibt; da aber zu ihnen alle Primzahlen des ersten Hunderts gehören, so steht der *Fermat*sche Ausspruch für alle Primzahlen $p < 100$ bereits fest. Aber diese *Kummer*schen Betrachtungen entziehen sich wie dem Rahmen dieses Werks, so auch unserm Vorhaben, das vielmehr darauf ausgeht, die hauptsächlichsten elementaren Beweisversuche zu besprechen, die bisher angestellt wurden, in Anbetracht dessen, daß, wenn *Fermat* wirklich einen Beweis seiner Behauptung besessen, auch dieser nur ein elementarer gewesen sein kann.

16. Indem wir dazu übergehen, zu entwickeln, was in solcher Weise für den allgemeinen Fall der Gleichung (60) bisher geleistet worden ist, schicken wir eine Reihe von Bemerkungen vorauf, welche, an sich interessant, dabei zur Verwendung gelangen.

Zunächst kann man der Gleichung (60), indem man z^p auf die linke Seite bringt und dann $-z$ statt z schreibt, die symmetrische Gestalt

$$x^p + y^p + z^p = 0 \tag{61}$$

geben, in welcher nun zwei der Zahlen x, y, z positiv, eine negativ gedacht werden können. Auch dürfen wir sie zu je zweien teilerfremd annehmen; daher müssen dann zwei der Zahlen x, y, z ungerade, die dritte gerade sein.

1) Setzen wir nun

$$L = x + y + z,\ M = xy + yz + zx,\ N = xyz,$$

so können x, y, z als Wurzeln der kubischen Gleichung

$$U^3 - LU^2 + MU - N = 0$$

aufgefaßt werden, und wenn für jeden Index i

$$S_i = x^i + y^i + z^i$$

gesetzt wird, so bestehen nach den *Newton*schen Formeln die Beziehungen:

$$(62)\quad \begin{cases} L - S_1 = 0 \\ L^2 - S_2 = 2M \\ L^3 - S_3 = 3(LM - N) \\ L^5 - S_5 = 5(LM - N)(L^2 - M) \\ L^7 - S_7 = 7(LM - N)([L^2 - M]^2 + LN). \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die leicht zu bestätigenden Formeln

$$LM - N = (x + y)(y + z)(z + x)$$

$$L^2 - M = \frac{L^2 + x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

nehmen die drei zuletzt geschriebenen Gleichungen die Gestalt an:

$$(63)\quad \begin{cases} L^3 - S_3 = 3(x + y)(y + z)(z + x) \\ L^5 - S_5 = 5(x + y)(y + z)(z + x) \cdot \dfrac{L^2 + x^2 + y^2 + z^2}{2} \\ L^7 - S_7 = 7(x + y)(y + z)(z + x) \cdot \left[\left(\dfrac{L^2 + x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)^2 - Lxyz\right], \end{cases}$$

auf deren letzte *Lebesgue* (am oben angeführten Orte) seinen Beweis für die Unlösbarkeit der Gleichung (57) in ganzen Zahlen gegründet hat.

Nun besteht für jeden Primzahlexponenten p nach dem *Fermat*schen Lehrsatze die Kongruenz

$$(64)\quad S_p = x^p + y^p + z^p \equiv x + y + z \pmod{p}.$$

Damit also die Gleichung (61) erfüllt sei, muß

$$(65)\quad L = x + y + z \equiv 0 \pmod{p}$$

sein. Demnach zieht man aus den Gleichungen (63) den Schluß, daß zum Bestehen der Gleichungen

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

$$x^5 + y^5 + z^5 = 0$$

$$x^7 + y^7 + z^7 = 0$$

in ganzen Zahlen resp. nachstehende Kongruenzen notwendig sind:

$$3(x + y)(y + z)(z + x) \equiv 0 \pmod{3^3}$$

$$5(x + y)(y + z)(z + x) \cdot \frac{L^2 + x^2 + y^2 + z^2}{2} \equiv 0 \pmod{5^5}$$

$$7(x + y)(y + z)(z + x) \cdot \left[\left(\frac{L^2 + x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)^2 - Lxyz\right] \equiv 0 \pmod{7^7}.$$

Aus der ersten von ihnen folgt, daß mindestens einer der Faktoren $x + y$, $y + z$, $z + x$ und daher zufolge der nach (65) bestehenden Kongruenz $x + y + z \equiv 0 \pmod{3}$ auch eine der Zahlen x, y, z durch 3 aufgehen muß. Aus der zweiten ergibt sich entweder die Teilbarkeit eines der drei Faktoren $x + y$, $y + z$, $z + x$ oder die des Ausdrucks $L^2 + x^2 + y^2 + z^2$, d. i., weil nach (65) $L \equiv 0 \pmod{5}$ ist, des Ausdrucks $x^2 + y^2 + z^2$ durch 5; in beiden Fällen muß aber auch eine der Zahlen x, y, z durch 5 teilbar sein. So bestätigt sich in den Fällen $p = 3$ und $p = 5$ ein früher schon bemerktes Resultat. Doch läßt die gleiche Schlußweise schon beim nächsten Falle im Stich; denn zwar schließt man aus der letzten der obigen Kongruenzen, daß entweder einer der Faktoren $x + y$, $y + z$, $z + x$ und dann also auch eine der Zahlen x, y, z, oder aber, wenn dies nicht der Fall ist, der letzte Faktor d. h., weil nach (65) $L \equiv 0 \pmod{7}$ ist, der Ausdruck $x^2 + y^2 + z^2$ durch 7 aufgehen muß, doch überzeugt man sich leicht, daß letzteres geschehen kann, ohne daß eine der Zahlen x, y, z durch 7 teilbar ist. So muß man sich in diesem Falle und noch mehr für den allgemeinen Fall irgendeines Primzahlexponenten p zum Beweise des entsprechenden Umstandes nach anderen Mitteln umsehen.

2) Allgemein ist die Differenz $L^p - S_p$ d. i. der Ausdruck

$$(x + y + z)^p - x^p - y^p - z^p$$

eine homogene ganze und ganzzahlige Funktion p^{ter} Dimension von x, y, z, deren Koeffizienten aufgehen durch p. Da aber der Ausdruck verschwindet, wenn $x + y$ oder $y + z$ oder $z + x$ gleich Null gesetzt wird, ist er durch jede dieser Summen algebraisch teilbar und somit besteht die allgemeine Formel:

$$(66)\quad (x + y + z)^p - x^p - y^p - z^p = p(x + y)(y + z)(z + x) \cdot F(x, y, z),$$

in welcher $F(x, y, z)$ eine ganze, ganzzahlige homogene Funktion $p - 3^{\text{ter}}$ Dimension von x, y, z bedeutet.

Ebenso findet sich die Differenz

$$(x + y)^p - x^p - y^p,$$

deren sämtliche Koeffizienten gleichfalls durch p teilbare ganze Zahlen sind, weil sie verschwindet, wenn x oder y gleich Null, desgleichen, wenn $x + y = 0$ gesetzt werden, teilbar durch x, y und $x + y$; es besteht demnach, wie auch aus (66) sogleich hervorgeht, wenn $z = 0$ gedacht wird, die allgemeine Beziehung

$$(66\text{a})\qquad (x + y)^p - x^p - y^p = p \cdot xy(x + y) f(x, y),$$

worin $f(x, y)$ eine ganze, ganzzahlige und homogene Funktion $p - 3^{\text{ter}}$ Dimension von x, y bedeutet. Diese ist nach einer, schon in Kap. 2 Nr. 12 angeführten Formel leicht angebbar. Nach ihr ist

$$(67) \quad \begin{cases} (x+y)^p \\ = x^p + y^p + \frac{p}{1} xy(x+y)^{p-2} - \frac{p}{2} \cdot \binom{p-3}{1} x^2y^2(x+y)^{p-4} + \cdots, \end{cases}$$

wo das allgemeine Glied der Entwicklung

$$(-1)^{h-1} \cdot \frac{p}{h} \binom{p-h-1}{h-1} \cdot x^h y^h (x+y)^{p-2h}$$

ist, die Entwicklung also mit dem Gliede

$$(-1)^{\frac{p-3}{2}} p \cdot x^{\frac{p-1}{2}} y^{\frac{p-1}{2}} (x+y)$$

schließt; die Koeffizienten sind ganze, durch p teilbare Zahlen. Daher ergibt sich

$$(68) \quad \begin{cases} f(x, y) \\ = (x+y)^{p-3} - \frac{1}{2}\binom{p-3}{1} xy(x+y)^{p-5} + \frac{1}{3}\binom{p-4}{2} x^2y^2(x+y)^{p-7} \\ \quad + \cdots + (-1)^{\frac{p-3}{2}} x^{\frac{p-3}{2}} y^{\frac{p-3}{2}}. \end{cases}$$

Man verdankt *Cauchy* (Journ. des Math. 5 (1840), S. 211) eine interessante nähere Bestimmung dieser Funktion. Setzt man

$$(z+1)^p - (z^p + 1) = \varphi(z)$$

also

$$p[(z+1)^{p-1} - z^{p-1}] = \varphi'(z),$$

und versteht man unter α eine imaginäre kubische Einheitswurzel, so daß $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, $\alpha + 1 = -\alpha^2$, $\alpha^2 + 1 = -\alpha$ ist, so folgt ersichtlich, sooft $p > 3$ ist,

$$\varphi(\alpha) = -(\alpha^{2p} + \alpha^p + 1) = -\frac{\alpha^{3p} - 1}{\alpha^p - 1} = 0$$

$$\varphi(\alpha^2) = -(\alpha^p + \alpha^{2p} + 1) = -\frac{\alpha^{3p} - 1}{\alpha^p - 1} = 0,$$

während

$$\varphi'(\alpha) = p(\alpha^{2(p-1)} - \alpha^{p-1}), \quad \varphi'(\alpha^2) = p(\alpha^{p-1} - \alpha^{2(p-1)})$$

wird; falls daher $p - 1$ durch 3 aufgeht d. i. p von der Form $6k + 1$ ist, werden auch $\varphi'(\alpha)$ und $\varphi'(\alpha^2)$ gleich Null sein. Das besagt aber, daß die Funktion $\varphi(z)$ für $p > 3$ stets teilbar ist durch $z^2 + z + 1$, falls aber $p = 6k + 1$ ist, sogar durch $(z^2 + z + 1)^2$. Man schließt also, daß für $p > 3$ die Funktion $f(x, y)$ stets den Faktor $x^2 + xy + y^2$, und in dem Falle, wo p die Form $6k + 1$ hat, sogar das Quadrat dieses Ausdrucks zum Faktor hat. So finden sich in der Tat die Gleichungen:

$$(66\text{b}) \quad \begin{cases} (x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x+y) \\ (x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2) \\ (x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)^2. \end{cases}$$

17. Nunmehr bedenke man, daß

$$(69) \qquad x^p + y^p = (x+y)\cdot\frac{x^p+y^p}{x+y}$$

gesetzt werden kann, wo

$$(70) \qquad \frac{x^p+y^p}{x+y} = x^{p-1} - x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 - \cdots - xy^{p-2} + y^{p-1}$$

also zugleich mit x, y eine ganze Zahl ist. Schreibt man

$$s = x + y,$$

so wird hieraus

$$(71) \quad \frac{x^p+y^p}{x+y} = \frac{x^p+(s-x)^p}{s} = s^{p-1} - ps^{p-2}x + \binom{p}{2}s^{p-3}x^2 - \cdots + px^{p-1}.$$

Wenn nun $\tilde{\omega}$ ein Primfaktor von $x+y$, so kann $\tilde{\omega}$ nicht aufgehen in x, da es sonst auch in y aufginge und x, y nicht, wie vorausgesetzt worden, teilerfremd wären. Die voraufgehende Gleichung lehrt also, daß $\tilde{\omega}$ nur dann auch ein Primfaktor von $\frac{x^p+y^p}{x+y}$ sein kann, wenn $\tilde{\omega}=p$ ist, daß dann aber wirklich auch $\tilde{\omega}=p$ in $\frac{x^p+y^p}{x+y}$, und zwar genau einmal als Faktor enthalten ist; auch kann $\frac{x^p+y^p}{x+y}$ nur dann den Faktor p haben, wenn $s=x+y$ ihn hat. Hieraus folgt, daß, wenn $x+y$ durch p nicht aufgeht, die beiden Faktoren des Ausdrucks (69) teilerfremd sind und auch der zweite von ihnen durch p nicht aufgeht, so daß, wenn

$$(72\text{a}) \qquad x + y = s, \quad \frac{x^p+y^p}{x+y} = t$$

gesetzt wird, s und t teilerfremde, durch p nicht aufgehende Zahlen bedeuten. Geht aber p in $x+y$ auf, so darf gesetzt werden

$$(72\text{b}) \qquad x + y = p^{m-1}\cdot s, \quad \frac{x^p+y^p}{x+y} = p\cdot t,$$

wo nun wieder s und t zwei teilerfremde, durch p nicht teilbare Zahlen bezeichnen.

Soll daher die Gleichung

$$(73) \qquad x^p + y^p + z^p = 0$$

in ganzen Zahlen bestehen, so muß im ersten Falle $s\cdot t$ und demnach auch jeder Faktor s und t eine durch p nicht teilbare p^{te} Potenz sein, etwa

$$s = u^p, \quad t = v^p,$$

im zweiten Falle muß $p^m st$ eine durch p teilbare p^{te} Potenz, also etwa

$$m = pn, \quad s = u^p, \quad t = v^p$$

und jedesmal u, v zwei teilerfremde, durch p nicht teilbare Zahlen sein. Entweder bestehen also Beziehungen, wie diese:

$$(74\text{a}) \qquad x + y = u^p, \quad \frac{x^p+y^p}{x+y} = v^p, \quad z = -uv,$$

oder diese anderen:

$$(74\text{b}) \qquad x + y = p^{pn-1} \cdot u^p,\ \frac{x^p + y^p}{x+y} = p \cdot v^p,\ z = -p^n uv.$$

Die Zahl v ist ungerade. Denn, wenn eine der Zahlen x, y gerade, also die andere ungerade ist, so sind alle Glieder des Ausdrucks (70) bis auf eins gerade, andernfalls besteht er aus einer ungeraden Anzahl ungerader Glieder. Sei nun $\tilde{\omega}$ eine in v aufgehende, also von p verschiedene Primzahl; wegen (70) kann sie in keiner der Zahlen x, y aufgehen, da diese sonst beide durch sie teilbar, also nicht teilerfremd wären. Da nun $x^p + y^p \equiv 0 \pmod{\tilde{\omega}}$, so wird, wenn $\eta y \equiv -1$, $\xi = \eta x$ gesetzt wird, $\xi^p \equiv 1 \pmod{\tilde{\omega}}$, während nicht $\xi \equiv 1$, d. h. $\eta x - 1 \equiv \eta(x + y) \equiv 0$ sein kann. Demnach gehört $\xi \pmod{\tilde{\omega}}$ zum Exponenten p, der also ein Teiler von $\tilde{\omega} - 1$ sein muß. Jeder Primteiler $\tilde{\omega}$ von v hat mit anderen Worten die Form $2hp + 1$, und folglich ist

$$v \equiv 1 \pmod{p}.$$

Aus der Symmetrie der Gleichung (73) in bezug auf x, y, z schließt man aber, daß in gleicher Weise wie eins der Gleichungssysteme (74a) oder (74b) auch entweder:

$$(75\text{a}) \qquad y + z = u'^p,\ \frac{y^p + z^p}{y+z} = v'^p,\ x = -u'v'$$

oder:

$$(75\text{b}) \qquad y + z = p^{n'p-1} \cdot u'^p,\ \frac{y^p + z^p}{y+z} = p \cdot v'^p,\ x = -p^{n'} u'v',$$

sowie auch, daß entweder:

$$(76\text{a}) \qquad z + x = u''^p,\ \frac{z^p + x^p}{z+x} = v''^p,\ y = -u''v''$$

oder:

$$(76\text{b}) \qquad z + x = p^{n''p-1} \cdot u''^p,\ \frac{z^p + x^p}{z+x} = p \cdot v''^p,\ y = -p^{n''} u''v''$$

bestehen muß, wobei bezüglich der Zahlen u', v' resp. u'', v'' Gleiches gilt, wie für die Zahlen u, v festgestellt worden ist.

Da nun nicht zwei der Zahlen x, y, z durch p aufgehen können, lassen sich diese Möglichkeiten nur auf folgende vier Weisen kombinieren:

(74a), (75a), (76a)
(74a), (75b), (76a)
(74a), (75a), (76b)
(74b), (75a) (76a),

von denen die drei letzten Kombinationen dem Falle zugehören, wo eine der Zahlen x, y, z durch p aufgeht. Wegen der Symmetrie der Gleichung (43) in bezug auf x, y z ist es gleichgültig, welche dieser Zahlen wir als die durch p teilbare ansehen wollen; wir wählen dafür die Zahl z und haben dann fernerhin nur zwei wesentlich verschiedene Fälle, die erste und letzte der vier Kombinationen zu untersuchen:

I. Entweder ist

$$(77\text{a})\quad \begin{cases} x+y=u^p, \quad \dfrac{x^p+y^p}{x+y}=v^p, \quad z=-uv \\ y+z=u'^p, \qquad\qquad x=-u'v' \\ z+x=u''^p, \qquad\qquad y=-u''v'', \end{cases}$$

woraus

$$(78\text{a})\quad \begin{cases} x=\dfrac{u^p-u'^p+u''^p}{2} \\ y=\dfrac{u^p+u'^p-u''^p}{2} \\ z=\dfrac{-u^p+u'^p+u''^p}{2} \end{cases}$$

hervorgeht;

II. Oder es ist

$$(77\text{b})\quad \begin{cases} x+y=p^{pn-1}\cdot u^p, \quad \dfrac{x^p+y^p}{x+y}=p\cdot v^p, \quad z=-p^n uv, \\ y+z=u'^p, \qquad\qquad x=-u'v', \\ z+x=u''^p, \qquad\qquad y=-u''v'', \end{cases}$$

woraus

$$(78\text{b})\quad \begin{cases} x=\dfrac{p^{np-1}\cdot u^p-u'^p+u''^p}{2} \\ y=\dfrac{p^{np-1}\cdot u^p+u'^p-u''^p}{2} \\ z=\dfrac{-p^{np-1}\cdot u^p+u'^p+u''^p}{2} \end{cases}$$

hervorgeht. Diese Formeln gab *Legendre* (Mém. de l'Acad. des sciences, Institut de France 1823 [1827], S. 1), auch findet man sie in einem Briefe *Abels* an *Holmboe* vom 24. 6. 1823; s. *Abel* oeuvres complètes 2. éd. II, S. 264/265.

Bevor wir diese Fälle einzeln näher untersuchen, fügen wir noch zwei Bemerkungen an, welche nach *Legendres* Aussage (a. a. O.) zuerst von *Sophie Germain* gemacht worden sind. Die eine besagt, daß in den Formeln (77b) $n>1$, d. h., daß die durch p teilbare der Zahlen x, y, z sogar durch p^2 teilbar ist. In der Tat folgt aus jenen Formeln

$$u'^p+u''^p=x+y+2z\equiv 0 \pmod{p};$$

dies erfordert, daß $u'+u''$ selbst durch p teilbar ist, mithin nach (67)

$$u'^p+u''^p\equiv(u'+u'')^p\equiv 0 \pmod{p^2},$$

weshalb nach der letzten der Formeln (78b) auch z durch p^2 teilbar hervorgeht.

Nach der zweiten jener Bemerkungen haben, gleichviel ob der erste oder der zweite der zu betrachtenden Fälle vorliegt, die Primteiler ϖ von v, von denen schon gezeigt ist, daß sie von der Form $2hp+1$

sind, genauer die Form $2kp^2 + 1$, d. h. h muß durch p teilbar sein. Denn es ergeben sich in beiden Fällen die Kongruenzen:

$$v \equiv 0,\ z \equiv 0,\ y \equiv u'^p,\ x \equiv u''^p,\ x^p + y^p \equiv u'^{p^2} + u''^{p^2} \equiv 0 \pmod{\tilde\omega},$$

deren letzte durch

$$(u' u_2)^{p^2} + 1 \equiv 0 \pmod{\tilde\omega} \tag{79}$$

ersetzt werden kann, wenn mit u_2 der Sozius von u'' (mod. $\tilde\omega$) bezeichnet wird. Sei nun g eine primitive Wurzel für die Primzahl $\tilde\omega = 2hp + 1$; dann ist $u' u_2 \equiv g^i$, wo i nicht durch h teilbar ist, da sonst $(u'u_2)^p \equiv g^{ip} \equiv \pm 1$, also entweder $(u'u_2)^{p^2} + 1 \equiv 2$ oder $u'^p + u''^p \equiv x + y \equiv 0$ sich ergäbe, was beides nicht sein kann. Aus (79) ergibt sich aber

$$g^{ip^2} + 1 \equiv 0,$$

also $g^{2ip^2} \equiv 1$ (mod. $\tilde\omega$), mithin $2ip^2$ teilbar durch $\tilde\omega - 1 = 2hp$, ip durch h, was nur sein kann, wenn h durch p aufgeht.

18. Wir behandeln nun zuvörderst den Fall I.

Gehen wir mit *E. Wendt* (Journ. f. Math. 113 [1894], S. 335) von einer Formel aus, die für das vorliegende Problem zuerst in *Lamé*s schon erwähnter Arbeit verwendet worden ist. Für irgend drei Größen a, b, c läßt sich der Ausdruck

$$S = (a + b + c)^p - (a + b - c)^p - (a - b + c)^p - (-a + b + c)^p \tag{80}$$

nach dem polynomischen Lehrsatze schreiben wie folgt:

$$S = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=p} \frac{p!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \cdot a^\alpha b^\beta c^\gamma \left(1 - (-1)^\alpha - (-1)^\beta - (-1)^\gamma\right),$$

worin die Summation über alle nicht negativen α, β, γ auszudehnen ist, die p zur Summe geben. Da p ungerade ist, mithin alle drei Größen α, β, γ ungerade oder nur eine von ihnen ungerade sein muß, im letzteren Falle aber die Klammergröße unter dem Summenzeichen verschwindet, so wird, indem man

$$\alpha = 2\lambda + 1, \quad \beta = 2\mu + 1, \quad \gamma = 2\nu + 1$$

schreibt,

$$S = 4pabc \cdot \sum_{\lambda+\mu+\nu=\frac{p-3}{2}} \frac{(p-1)!}{(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!\,(2\nu+1)!} \cdot a^{2\lambda} b^{2\mu} c^{2\nu}. \tag{81}$$

Setzt man also

$$a = u^p, \quad b = u'^p, \quad c = u''^p$$

voraus, so wird mit Rücksicht auf die Formeln (78a) und auf die vorausgesetzte Gleichung (73)

$$\begin{cases} (u^p + u'^p + u''^p)^p \\ = 4p \cdot (uu'u'')^p \cdot \sum\limits_{\lambda+\mu+\nu=\frac{p-3}{2}} \frac{(p-1)!}{(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!\,(2\nu+1)!} \cdot u^{2\lambda p} u'^{2\mu p} u''^{2\nu p}, \end{cases} \tag{82}$$

aus welcher Gleichung sich zwei andere ergeben von der Form

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned} &u^p + u'^p + u''^p = 2puu'u'' \cdot P \\ &\sum_{\lambda+\mu+\nu=\frac{p-3}{2}} \frac{(p-1)!}{(2\lambda+1)!(2\mu+1)!(2\nu+1)!} \cdot u^{2\lambda p} u'^{2\mu p} u''^{2\nu p} = 2^{p-2} p^{p-1} \cdot P^p. \end{aligned}\right.$$

Dies vorausgeschickt, sei nun $\tilde{\omega}$ eine Primzahl von der Form $2hp+1$. Aus der vorausgesetzten Gleichung (73) folgt die Kongruenz

$$(84)\qquad x^p + y^p + z^p \equiv 0 \pmod{\tilde{\omega}},$$

der man, wenn keine der Zahlen x, y, z durch $\tilde{\omega}$ aufginge, mit z' den Sozius von z (mod. $\tilde{\omega}$) bezeichnend, die Form

$$(xz')^p + 1 \equiv (-yz')^p$$

oder

$$(85)\qquad \xi^p + 1 \equiv \eta^p \pmod{\tilde{\omega}}$$

geben kann, wo ξ, η teilerfremd zu $\tilde{\omega}$ sind, so daß

$$(86)\qquad \xi^{2hp} \equiv 1, \quad \eta^{2hp} \equiv 1 \pmod{\tilde{\omega}}$$

ist. Mit Rücksicht auf die letzteren Kongruenzen gibt die voraufgehende zur $2h^{\text{ten}}$ Potenz erhoben die folgende:

$$\binom{2h}{1} \cdot \xi^{(2h-1)p} + \binom{2h}{2} \cdot \xi^{(2h-2)p} + \cdots + \binom{2h}{2h-1} \cdot \xi^p + 1 \equiv 0,$$

woraus durch wiederholte Multiplikation mit ξ^p unter steter Berücksichtigung von (86) die anderen:

$$\binom{2h}{2} \cdot \xi^{(2h-1)p} + \binom{2h}{3} \cdot \xi^{(2h-2)p} + \cdots + 1 \cdot \xi^p + \binom{2h}{1} \equiv 0$$

$$\binom{2h}{3} \cdot \xi^{(2h-1)p} + \binom{2h}{4} \cdot \xi^{(2h-2)p} + \cdots + \binom{2h}{1} \cdot \xi^p + \binom{2h}{2} \equiv 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1 \cdot \xi^{(2h-1)p} + \binom{2h}{1} \cdot \xi^{(2h-2)p} + \cdots + \binom{2h}{2h-2} \cdot \xi^p + \binom{2h}{2h-1} \equiv 0$$

hervorgehen. Soll also die Kongruenz (84) für nicht durch $\tilde{\omega}$ teilbare x, y, z möglich sein, so muß die Determinante der vorstehenden $2h$ Kongruenzen durch den Modulus $\tilde{\omega} = 2hp + 1$ teilbar, d. h., wenn gesetzt wird:

$$(87)\qquad D_{2h} = \begin{vmatrix} \binom{2h}{1}, & \binom{2h}{2}, & \ldots, & \binom{2h}{2h-1}, & 1 \\ \binom{2h}{2}, & \binom{2h}{3}, & \ldots, & 1, & \binom{2h}{1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \binom{2h}{1}, & \ldots, & \binom{2h}{2h-2}, & \binom{2h}{2h-1} \end{vmatrix},$$

so muß

$$D_{2h} \equiv 0 \pmod{\tilde{\omega}}$$

sein.

Gibt es also eine Primzahl $\tilde{\omega} = 2hp + 1$, welche nicht in der zugehörigen Determinante D_{2h} aufgeht, so kann eine Kongruenz (84) und daher auch die Gleichung (73) in nicht durch $\tilde{\omega}$ teilbaren Zahlen x, y, z nicht stattfinden. Mithin muß dann eine dieser Zahlen — welche von ihnen ist bei der Symmetrie in bezug auf sie gleichgültig, nehmen wir also etwa an, die Zahl z — durch $\tilde{\omega}$ teilbar sein. Dieser Primteiler $\tilde{\omega}$ geht dann entweder in u oder in v auf, und in letzterem Falle, da u, v, aber auch x, z und y, z, mithin auch u', v und u'', v teilerfremd sind, in keiner der Zahlen u, u', u''. Aus der dritten der Gleichungen (78a) ergäbe sich dann eine der Kongruenz (84) analoge Kongruenz

$$(-u)^p + u'^p + u''^p \equiv 0 \pmod{\tilde{\omega}}$$

in nicht durch $\tilde{\omega}$ teilbaren Zahlen $-u, u', u''$, was wegen der über $\tilde{\omega}$ gemachten Annahme unmöglich ist. Somit bleibt nur, daß u durch $\tilde{\omega}$ teilbar ist, und aus der dritten der Gleichungen (78a) folgt

mithin
$$\left.\begin{aligned} u'^p + u''^p &\equiv 0 \\ u'^{2p} &\equiv u''^{2p} \end{aligned}\right\} \pmod{\tilde{\omega}}.$$

Unter diesen Umständen darf man aber in der zweiten der Gleichungen (83), wenn sie als Kongruenz (mod. $\tilde{\omega}$) aufgefaßt wird, diejenigen Glieder, in denen $\lambda > 0$ ist, als durch $\tilde{\omega}$ teilbar weglassen und

$$u'^{2\mu p} \cdot u''^{2\nu p} \equiv u'^{2(\mu+\nu)p}$$

setzen, wodurch, da nun die Summation sich nur über alle μ, ν erstreckt, deren Summe $\mu + \nu = \frac{p-3}{2}$ ist, die folgende Kongruenz hervorgeht:

$$(88) \qquad u'^{(p-3)p} \cdot \sum_{\mu+\nu=\frac{p-3}{2}} \frac{(p-1)!}{(2\mu+1)!\,(2\nu+1)!} \equiv 2^{p-2} p^{p-1} \cdot P^p \pmod{\tilde{\omega}}.$$

Nun bestehen die Gleichungen

$$2^{p-1} = (1+1)^{p-1} = \sum_{\alpha+\beta=p-1} \frac{(p-1)!}{\alpha!\;\beta!} = \sum_{\mu+\nu=\frac{p-3}{2}} \frac{(p-1)!}{(2\mu+1)!\,(2\nu+1)!} + \sum_{\mu+\nu=\frac{p-1}{2}} \frac{(p-1)!}{(2\mu)!\,(2\nu)!}$$

$$0 = (1-1)^{p-1} = \sum_{\alpha+\beta=p-1} \frac{(p-1)!}{\alpha!\;\beta!}(-1)^\alpha = -\sum_{\mu+\nu=\frac{p-3}{2}} \frac{(p-1)!}{(2\mu+1)!\,(2\nu+1)!} + \sum_{\mu+\nu=\frac{p-1}{2}} \frac{(p-1)!}{(2\mu)!\,(2\nu)!}$$

und aus ihrer Subtraktion findet sich

$$\sum_{\mu+\nu=\frac{p-3}{2}} \frac{(p-1)!}{(2\mu+1)!\,(2\nu+1)!} = 2^{p-2}.$$

Dadurch geht die Kongruenz (88) über in die einfachere Gestalt

$$u'^{(p-3)p} \equiv p^{p-1} \cdot P^p \pmod{\tilde{\omega}}.$$

Diese Kongruenz lehrt zunächst, daß P durch $\tilde{\omega}$ nicht aufgeht, da u' es nicht tut, und führt durch Erhebung zur $2h^{\text{ten}}$ Potenz mit Rücksicht auf den *Fermat*schen Lehrsatz zur folgenden:

$$1 \equiv p^{2h(p-1)}$$

oder

$$p^{2h} \equiv 1 \pmod{\tilde{\omega}}. \tag{89}$$

Erfüllt daher die Primzahl $\tilde{\omega}$ noch die zweite Voraussetzung, daß diese Kongruenz für sie nicht stattfindet, so kann auch u und daher auch z durch $\tilde{\omega}$ nicht teilbar sein. Man ist solcherweise zu folgendem Ergebnisse gelangt:

Gibt es eine Primzahl $\tilde{\omega} = 2hp + 1$, die weder in der zugehörigen Determinante D_{2h} noch auch in $p^{2h} - 1$ aufgeht, so ist der Fall I für die Gleichung (73) d. h. diese Gleichung in ganzen durch p nicht teilbaren Zahlen x, y, z unmöglich.

19. Diesen Satz findet man in wesentlich gleicher Weise in *Wendt*s oben angeführter Arbeit hergeleitet. In anderer Weise ausgesprochen gab ihn schon *Legendre* (an zuletzt angemerkter Stelle) als ein Ergebnis *Sophie Germains*. Seine Aussage lautet: Ist eine Primzahl $\tilde{\omega} = 2hp + 1$ vorhanden, für welche zwischen keinen zwei p^{ten} Potenzresten r', r'' die Beziehung $1 + r' \equiv r''$ $\pmod{\tilde{\omega}}$ — d. h. keine Kongruenz (85) — bestehen kann, und für welche p kein p^{ter} Potenzrest — d. h. $p^{2h} \equiv 1 \pmod{\tilde{\omega}}$ nicht erfüllt — ist, so kann die Gleichung (73) in ganzen durch p nicht teilbaren Zahlen nicht bestehen. Diese Aussage ist aber mit der des *Wendt*schen Satzes gleichbedeutend, da die Kongruenz $D_{2h} \equiv 0 \pmod{\tilde{\omega}}$ nicht nur eine notwendige, sondern, wie jetzt gezeigt werden soll, auch hinreichende Bedingung für das Bestehen einer Kongruenz (85) ist.

Nach einem allgemeinen Determinantensatze, für welchen *Stern* (Journ. für Math. 73, S. 374) einen sehr einfachen Beweis gegeben hat, ist

$$D_{2h} = \prod_{i=1}^{2h} [(1 + \varrho^i)^{2h} - 1], \tag{90}$$

wenn unter ϱ eine primitive Wurzel der Gleichung

$$x^{2h} = 1$$

verstanden wird. Daraus folgt für jede primitive Wurzel γ der Kongruenz

$$x^{2h} \equiv 1 \pmod{\tilde{\omega}} \tag{91}$$

die Kongruenz

$$D_{2h} \equiv \prod_{i=1}^{2h} [(1+\gamma^i)^{2h} - 1] \pmod{\tilde{\omega}},$$

aus welcher, wenn $D_{2h} \equiv 0$ ist, sich einer der Faktoren des Produkts, also für einen bestimmten Wert von i sich

$$(1+\gamma^i)^{2h} \equiv 1 \pmod{\tilde{\omega}},$$

d. h. $1+\gamma^i$ sich als ein p^{ter} Potenzrest r'' (mod. $\tilde{\omega}$) ergibt; da nun auch γ^i eine Wurzel der Kongruenz (91) also ein p^{ter} Potenzrest r' (mod. $\tilde{\omega}$) ist, so folgt eine Beziehung $1 + r' \equiv r''$ d. h. eine Kongruenz (85) (mod. $\tilde{\omega}$).

20. Wenden wir nun analoge Betrachtungen für den Fall II der Gleichung (73) an, setzen also voraus, die Gleichung (73) bestehe für ganzzahlige x, y, z, deren z durch p teilbar ist.

Indem wir dann in (81)

$$a = p^{np-1} \cdot u^p, \; b = u'^p, \; c = u''^p$$

einsetzen, erhalten wir die Gleichung

$$(92) \begin{cases} (p^{np-1} \cdot u^p + u'^p + u''^p)^p \\ = 4p^{np}(uu'u'')^p \cdot \sum\limits_{\lambda+\mu+\nu=\frac{p-3}{2}} \dfrac{(p-1)!}{(2\lambda+1)!(2\mu+1)!(2\nu+1)!} \cdot p^{2\lambda(np-1)} \cdot u^{2\lambda p} u'^{2\mu p} u''^{2\nu p}, \end{cases}$$

woraus zwei andere Gleichungen hervorgehen von der Form

$$(93) \begin{cases} p^{np-1} \cdot u^p + u'^p + u''^p = 2p^n uu'u'' \cdot P \\ \sum\limits_{\lambda+\mu+\nu=\frac{p-3}{2}} \dfrac{(p-1)!}{(2\lambda+1)!(2\mu+1)!(2\nu+1)!} \cdot p^{2\lambda(np-1)} \cdot u^{2\lambda p} u'^{2\mu p} u''^{2\nu p} = 2^{p-2} \cdot P^p. \end{cases}$$

Nun steht schon aus der Erörterung des Falles I fest, daß, wenn eine Primzahl $\tilde{\omega} = 2hp + 1$ vorhanden ist, die nicht in der zugehörigen Determinante D_{2h} aufgeht, in der vorausgesetzten Gleichung (73) eine der Zahlen x, y, z durch $\tilde{\omega}$ aufgehen muß. Wir nehmen zunächst an, dies sei eine der beiden Zahlen x, y, welche nicht durch p teilbar sind, etwa die Zahl x. Aus (78b) folgt dann

$$(94) \qquad p^{np-1} \cdot u^p - u'^p + u''^p \equiv 0 \pmod{\tilde{\omega}},$$

zugleich muß eine der Zahlen u', v' durch $\tilde{\omega}$ teilbar sein. Ist es v', so kann es keine der Zahlen u, u', u'' sein, und man erschließt dann aus der vorstehenden Kongruenz durch Multiplikation mit der p^{ten} Potenz des Sozius von $p^{n-1} \cdot u$ (mod. $\tilde{\omega}$) das Bestehen einer anderen von der Form

$$(95) \qquad p^{p-1} \equiv \xi^p + \eta^p \pmod{\tilde{\omega}}$$

mit zu $\tilde{\omega}$ teilerfremden ξ, η, so daß

$$(96) \qquad \xi^{2hp} \equiv 1, \; \eta^{2hp} \equiv 1 \pmod{\tilde{\omega}}$$

ist. Durch Erheben derselben zur $2h^{\text{ten}}$ Potenz kommt dann

$$\binom{2h}{1}\cdot\xi^{(2h-1)p}\cdot\eta^p+\binom{2h}{2}\cdot\xi^{(2h-2)p}\cdot\eta^{2p}+\cdots+\binom{2h}{2h-1}\cdot\xi^p\eta^{(2h-1)p}+2-p^{2h(p-1)}\equiv 0$$

und hieraus durch wiederholte Multiplikation mit $\xi^p\cdot\eta^{(2h-1)p}$ die folgenden Kongruenzen:

$$\binom{2h}{2}\cdot\xi^{(2h-1)p}\cdot\eta^p+\binom{2h}{3}\cdot\xi^{(2h-2)p}\cdot\eta^{2p}+\cdots+(2-p^{2h(p-1)})\cdot\xi^p\eta^{(2h-1)p}+\binom{2h}{1}\equiv 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(2-p^{2h(p-1)})\cdot\xi^{(2h-1)p}\cdot\eta^p+\binom{2h}{1}\cdot\xi^{(2h-2)p}\cdot\eta^{2p}+\cdots+\binom{2h}{2h-2}\cdot\xi^p\eta^{(2h-1)p}+\binom{2h}{2h-1}\equiv 0$$

welche zusammen mit der voraufgehenden nur bestehen können, wenn die Determinante

$$(97)\qquad \Delta_{2h}=\begin{vmatrix}\binom{2h}{1}, & \binom{2h}{2}, & \ldots, & \binom{2h}{2h-1}, & 2-p^{2h(p-1)}\\ \binom{2h}{2}, & \binom{2h}{3}, & \ldots, & 2-p^{2h(p-1)}, & \binom{2h}{1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 2-p^{2h(p-1)}, & \binom{2h}{1}, & \ldots, & \binom{2h}{2h-2}, & \binom{2h}{2h-1}\end{vmatrix}$$

durch $\tilde{\omega}$ teilbar ist. Erfüllt daher die Primzahl $\tilde{\omega}$ noch die weitere Voraussetzung, auch in Δ_{2h} nicht aufzugehen, so kann v' nicht teilbar sein durch $\tilde{\omega}$, und demnach müßte es u' sein. Dann folgt aus (94)

$$p^{np-1}\cdot u^p\equiv -u''^p$$

also

$$(98)\qquad u''^{2p}\equiv p^{2(np-1)}\cdot u^{2p}\qquad\Big\}\ (\text{mod. }\tilde{\omega}).$$

Geht nun $\tilde{\omega}$ genau r mal in u' also in x auf, so geht es der ersten der Formeln (78b) zufolge genau ebenso oft in $p^{np-1}\cdot u^p+u''^p$ also auch in

$$p^{np-1}\cdot u^p+u'^p+u''^p$$

auf, und deshalb lehrt die erste der Gleichungen (93), daß P durch $\tilde{\omega}$ nicht teilbar ist. In der zweiten dieser Gleichungen verschwinden aber, wenn sie als Kongruenz (mod. $\tilde{\omega}$) aufgefaßt wird, die Glieder der Summe, in denen $\mu>0$ ist, als teilbar durch $\tilde{\omega}$, und so erhält man, da nun in den übrigen $\lambda+\nu=\frac{p-3}{2}$ zu setzen ist, mit Rücksicht auf (98) die Kongruenz:

$$p^{(p-3)(np-1)}\cdot u^{p(p-3)}\cdot\sum_{\lambda+\nu=\frac{p-3}{2}}\frac{(p-1)!}{(2\lambda+1)!(2\nu+1)!}\equiv 2^{p-2}\cdot P^p\quad(\text{mod. }\tilde{\omega}),$$

welche sich wie die Kongruenz (88) vereinfacht und die Gestalt

$$p^{(p-3)(np-1)}\cdot u^{p(p-3)}\equiv P^p\quad(\text{mod. }\tilde{\omega})$$

annimmt. Wird sie zur Potenz $2h$ erhoben, so kommt einfach

$$p^{6h}\equiv 1\quad(\text{mod. }\tilde{\omega}),$$

eine Kongruenz, welche in Verbindung mit

$$p^{2hp} \equiv 1 \pmod{\tilde\omega},$$

sobald $p > 3$ vorausgesetzt wird (eine Voraussetzung, die wir machen dürfen, da der *Fermat*sche Satz für den Exponenten 3 schon erledigt ist),

$$p^{2h} \equiv 1 \pmod{\tilde\omega} \tag{99}$$

ergibt. Wenn daher die Primzahl $\tilde\omega$ noch, wie im ersten Falle, die jetzt dritte Voraussetzung erfüllt, kein Teiler von $p^{2h} - 1$ zu sein, so wird auch die Teilbarkeit von u' durch $\tilde\omega$ unmöglich, und daher kann die Gleichung (73) unter den über x, y, z gemachten Annahmen nicht bestehen.

Demnach werde nun noch der allein übrige Fall gesetzt, daß die durch p teilbare Zahl z der drei Zahlen x, y, z zugleich auch die durch $\tilde\omega$ teilbare Zahl sei. Aus (78b) folgt dann

$$-p^{np-1} \cdot u^p + u'^p + u''^p \equiv 0 \pmod{\tilde\omega}, \tag{100}$$

während $\tilde\omega$ entweder in u oder in v aufgehen muß. Wäre v durch $\tilde\omega$ teilbar, so könnte es keine der Zahlen u, u', u'' sein, und man käme genau wie vorher zu dem Schlusse, daß Δ_{2h} durch $\tilde\omega$ aufgehen müßte. Unter der Voraussetzung des Gegenteils könnte also v nicht durch $\tilde\omega$ aufgehen und somit müßte es u, und aus (100) ergäbe sich

$$u'^p + u''^p \equiv 0 \pmod{\tilde\omega}.$$

Die Verbindung dieser Kongruenz mit der zweiten der Formeln (93) führt aber jetzt zu keiner der Kongruenz (99) entsprechenden weiteren Bedingung, da der Faktor p aus der Formel (93) verschwindet. Man erschließt nur aus den Formeln (77b), daß auch $x + y$ durch $\tilde\omega$ teilbar sein muß.

Faßt man nun zusammen, was wir für die beiden Fälle I und II gefolgert haben, so gelangt man zu nachstehendem Gesamtergebnis:

Gibt es eine Primzahl $\tilde\omega = 2hp + 1$, welche in keiner der Zahlen

$$D_{2h},\ \Delta_{2h},\ p^{2h} - 1$$

aufgeht, so erfordert das Bestehen der Gleichung

$$x^p + y^p + z^p = 0$$

in ganzen Zahlen x, y, z, daß eine derselben, etwa z, durch p, und daß dieselbe Zahl z sowie auch die Summe $x + y$ der beiden anderen durch $\tilde\omega$ teilbar sei.

21. Obwohl die in den letzten Nummern mitgeteilten Sätze von *Legendre* bzw. von *Wendt* durchaus noch nicht ausreichen, das *Fermat*sche Theorem zu erweisen, sind sie gleichwohl nicht ohne Wert. Z. B. hat *Legendre* a. a. O. festgestellt, daß für alle Primzahlen $p < 100$ Primzahlen $\tilde\omega$ von der Art vorhanden sind, wie der Satz in Nr. 18 sie voraussetzt; er hat ferner gezeigt, daß jede Primzahl von

einer der Formen $2p+1$, $4p+1$, $8p+1$, $16p+1$, $10p+1$, $14p+1$ eine solche Primzahl $\tilde{\omega}$ ist. Damit ist dann sogleich erwiesen, daß die Gleichung

$$x^p + y^p + z^p = 0 \tag{101}$$

in ganzen durch p nicht teilbaren Zahlen unlösbar ist nicht nur für alle Primzahlexponenten $p < 100$, sondern auch für diejenigen, für welche eine der genannten Formen eine Primzahl liefert, und dadurch findet sich leicht, daß sie sogar für alle Primzahlexponenten $p < 197$ Lösungen der gedachten Art nicht besitzt. *E. Maillet* hat später (Assoc. française pour l'advancement des sciences, St. Etienne, 26. session 1897, S. 156) diese Grenze auf $p < 223$ erhöht, und durch Anwendung von Hilfsmitteln höherer Art ist es *Mirimanoff* gelungen (Journ. f. Math. 128 (1904), S. 45), sie noch weiter bis auf $p < 257$ auszudehnen. Endlich hat mittels einer tieferen Ausbeutung der Bedingungen, unter denen der *Legendre*sche Satz in Nr. 18 besteht, neuerdings *E. L. Dickson* (Mess. of Math. new series no. 445, May 1908 und Quart. Journ. of Math. no. 157, 1908) für alle Primzahlen $p < 7000$ mit Ausnahme der Zahl 6857 den Nachweis erbracht, daß die Gleichung (102) in ganzen durch p unteilbaren Zahlen unlösbar ist. Hier wollen wir uns damit begnügen, nachzuweisen, daß die Gleichung (101) für alle Primzahlexponenten p, für welche $2p+1$ oder $4p+1$ eine Primzahl ist, in ganzen durch p nicht teilbaren Zahlen unlösbar ist.

Für $h=1$ wird D_{2h} die Determinante

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Ist also p eine Primzahl, für welche auch $\tilde{\omega} = 2p+1$ Primzahl ist, so geht diese nicht auf in D_2, ebensowenig aber in

$$p^2 - 1 = (p-1)\cdot(p+1).$$

Daher ist nach Nr. 18 die Gleichung

$$x^p + y^p + z^p = 0$$

in ganzen durch p nicht teilbaren Zahlen unmöglich, z. B. für

$$p = 3,\ 5,\ 11,\ 23,\ \ldots,$$

für welche Werte

$$\tilde{\omega} = 7,\ 11,\ 23,\ 47,\ \ldots$$

Primzahlen sind.

Für $h=2$ wird D_{2h} die Determinante

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4, & 6, & 4, & 1 \\ 6, & 4, & 1, & 4 \\ 4, & 1, & 4, & 6 \\ 1, & 4, & 6, & 4 \end{vmatrix} = 375 = 3\cdot 5^3.$$

Ist daher p eine Primzahl, für welche $\tilde{\omega} = 4p + 1$ Primzahl ist, so geht $\tilde{\omega}$ nicht in der zugehörigen Determinante D_4 auf, aber auch nicht in

$$p^4 - 1 = (p^2 + 1) \cdot (p - 1)(p + 1);$$

von den beiden letzten Faktoren ist dies offenbar; ginge $\tilde{\omega}$ aber auf in $p^2 + 1$, so auch in

$$16(p^2 + 1) + 2 \cdot (4p + 1) = (4p + 1)^2 + 17,$$

also auch in 17, was doch niemals der Fall. Mithin ist die Gleichung

$$x^p + y^p + z^p = 0$$

in ganzen durch p nicht teilbaren Zahlen für alle solche Exponenten p unlösbar, z. B. für

$$p = 3,\ 7,\ 13,\ 29,\ \ldots,$$

wofür

$$\tilde{\omega} = 13,\ 29,\ 53,\ 117,\ \ldots$$

Primzahl wird.

So bestätigt sich u. a. für $p = 3, 5, 7$, was bereits in Nr. 13 und 14 angemerkt worden ist. Für die Behauptung, daß die Gleichung (101) für jeden Primzahlexponenten p nur dann lösbar sein könne, wenn eine der ganzen Zahlen x, y, z durch p aufgeht, würde aber der Nachweis erforderlich sein, daß für jede Primzahl p eine Primzahl $\tilde{\omega} = 2hp + 1$ vorhanden ist von der im Satze der Nr. 18 bezeichneten Beschaffenheit. Dieser Nachweis ist jedoch bisher nicht erbracht und auch wohl schwierig zu liefern. Könnte man zeigen, daß es solcher Primzahlen $\tilde{\omega} = 2hp + 1$, die nicht in D_{2h} aufgehen, sogar unendlich viele gäbe, so würde damit der große *Fermat*sche Satz in seinem ganzen Umfange bewiesen sein, denn dann müßte wenigstens eine der drei Zahlen x, y, z durch unendlich viel Primzahlen teilbar sein, was nicht möglich ist. Aber schon *Libri* hat ausgesprochen (Journ. f. Math. 9, S. 275), daß dieser Umstand nicht stattfinde, und jüngst hat *L. E. Dickson* gezeigt (ebendas. 135, S. 181), daß die Kongruenz

$$x^p + y^p + z^p \equiv 0 \pmod{\tilde{\omega}}$$

für jede Primzahl

$$\tilde{\omega} \geqq (p - 1)^2 \cdot (p - 2)^2 + 6p - 2$$

Lösungen besitzt, welche prim sind zu $\tilde{\omega}$, daß also die Anzahl der Primzahlen $\tilde{\omega}$, für welche das Gegenteil stattfindet, nur endlich ist.

Wir können hiermit unsere Skizze abschließen, weitere Ergebnisse von künftigen Forschungen erwartend. Kaum aber dürften diese ohne Hilfe der Theorie der Zahlenkörper das begehrte Ziel erreichen.

Zusätze.

Zu Seite 310, Zeile 9—11.

Bei Zergliederungen in zwei Quadrate positiver Zahlen ist das Vorzeichen der Basiszahlen bestimmt und nur die Anordnung der quadratischen Summanden beliebig; wird nachher von Zergliederungen in ein ungerades und in ein gerades Quadrat gesprochen, so wird dadurch im Gegenteil die Anordnung festgelegt, aber das Vorzeichen der Basiszahlen bleibt beliebig. Ähnliches ist für den Ausdruck Zergliederungen in späteren ähnlichen Fällen zu beachten.

Zu Seite 310 letzte Zeilen.

Ist u eine Quadratzahl, $u = x^2$, so sind bei $\varrho(u)$ die zwei Darstellungen

$$u = x^2 + 0^2, \quad u = 0^2 + x^2$$

nur als eine, bei $4\varrho(u)$ aber als verschiedene gezählt. Gleiches gilt für den Satz am Ende von Nr. 4, S. 319.

Zu Seite 344.

Der Weg, wie die hier bemerkte Lücke in *Wieferichs* Betrachtung zu ergänzen wäre, ist leicht anzudeuten. Es handelt sich im Falle $\nu = 4$ ebenso wie im Falle $\nu = 3$ nur um die Zahlen r von der Form $96h + 40$, denn für alle übrigen ist 18 der größte Wert von γ, und

$$5^2 \cdot 18^3 < 0{,}4 \cdot 5^8;$$

spezieller kommen auch hier wieder nur die Zahlen r von der Form

$$1000 + 6 \cdot 4^{\alpha+2} \cdot (8k + 7),$$

in der $\alpha > 0$ ist, in Betracht, und zwar wegen der für r vorgeschriebenen Bedingungen (88) auf S. 341 diejenigen von ihnen, welche den Ungleichheiten genügen:

$$0{,}4 \cdot 5^8 < 1000 + 6 \cdot 4^{\alpha+2} \cdot (8k + 7) < 5^2 \cdot 22^3,$$

d. i.

$$155250 < 6 \cdot 4^{\alpha+2} \cdot (8k + 7) < 265200.$$

Setzt man $\alpha = \beta + 1$, wo $\beta \gtreqless 0$, so vereinfachen sich diese wie folgt:

$$404 < 4^{\beta} \cdot (8k + 7) < 691.$$

Hieraus findet sich

$$\begin{array}{lll} \text{für } \beta = 0: & 49 < k < 86 \\ \text{,,} \ \beta = 1: & 11 < k < 21 \\ \text{,,} \ \beta = 2: & 2 < k < 5 \\ \text{,,} \ \beta = 3: & k = 0, \end{array}$$

im ganzen also 48 zulässige Wertsysteme β, k, ebensoviel Werte für r und somit endlich ebensoviel Zahlen

$$6 \cdot 5^8 + r,$$

für welche festzustellen bleibt, in wieviel Kuben sie zerfällbar sind. Ich habe diese mühsame Feststellung nicht ausgeführt; ergäbe sich, was wenig wahrscheinlich ist, daß die höchstens dazu erforderliche Kubenanzahl $g > 9$ wäre, so hätte man zu setzen $N_3 = g$, andernfalls wäre, wie *Wieferich* zu beweisen gemeint hat, $N_3 = 9$.

Zu Seite 419.

Zur Herleitung der aus der Hilfsformel

$$(1) \qquad \sum (-1)^z \cdot q^{i^2+4x^2+4y^2+4z^2} = \sum_{(i>0,\ \text{ungerade})} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \cdot i q^{i^2+4s^2}$$

gezogenen Folgerung bemerke man folgendes.

Nach (110) auf S. 353 ist für eine ungerade Zahl u

$$N(u = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \theta^2) = 8\zeta_1(u).$$

Hier muß eins der vier Quadrate in der Zerfällung ungerade und, wenn $u \equiv 1 \pmod{4}$ ist, die Summe der drei anderen durch 4 teilbar, also diese drei Quadrate gerade sein. Beschränkt man das ungerade Quadrat auf die erste der vier Stellen, und auf den numerischen Wert i seiner Basis, so reduziert sich die gesamte Anzahl der Zerfällungen auf ihren achten Teil und man findet für $u \equiv 1 \pmod{4}$ die Formel

$$N(u = i^2 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2) = \zeta_1(u), \quad i > 0,\ \text{ungerade}$$

der man auch die Form geben kann:

$$\underset{i>0 \text{ ungerade, } z \text{ gerade}}{N(u = i^2 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2)} + \underset{i>0 \text{ ungerade, } z \text{ ungerade.}}{N(u = i^2 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2)} = \zeta_1(u).$$

Faßt man andererseits auf beiden Seiten von (1) die Glieder mit q^u zusammen, so erhält man die Beziehung

$$\underset{i>0 \text{ ungerade, } z \text{ gerade}}{N(u = i^2 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2)} - \underset{i>0 \text{ ungerade, } z \text{ ungerade}}{N(u = i^2 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2)} = S,$$

wo zur Abkürzung

$$\sum_{u=i^2+4s^2,\ i>0} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \cdot i = S$$

gesetzt ist, und nun durch Addition und Subtraktion beider Gleichungen diese neuen:

$$(2)\quad \begin{cases} 2\cdot N(\underset{i>0 \text{ ungerade, } z \text{ gerade}}{u = i^2+4x^2+4y^2+4z^2}) = \zeta_1(u) + S \\ 2\cdot N(\underset{i>0 \text{ ungerade, } z \text{ ungerade.}}{u = i^2+4x^2+4y^2+4z^2}) = \zeta_1(u) - S. \end{cases}$$

Dies vorausgeschickt, betrachten wir die Zerfällungen von u von der Form

$$(3)\quad u = \xi^2 + 2\eta^2 + 4\zeta^2 + 8\theta^2.$$

Die Zahl ξ muß ungerade und, da $u \equiv 1 \pmod{4}$ vorausgesetzt ist, η gerade sein: $\eta = 2\varepsilon$; man findet also

$$u = \xi^2 + 8(\varepsilon^2 + \theta^2) + 4\zeta^2$$

und hierin muß, je nachdem $u \equiv 1$ oder $u \equiv 5 \pmod{8}$ ist, ζ gerade oder ungerade sein.

Sei zunächst $u \equiv 1 \pmod{8}$. Schreibt man dann die vorige Gleichung in der Form

$$u = \xi^2 + 4(\varepsilon+\theta)^2 + 4(\varepsilon-\theta)^2 + 4\zeta^2,$$

so liefert sie eine Auflösung der Gleichung

$$(4)\quad u = \xi^2 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2$$

mit geradem $z = \zeta$. Umgekehrt folgt aus jeder solchen, daß $x^2+y^2+z^2$ also auch $x+y+z$ und wegen des geraden z auch $x+y$ gerade Zahlen sein müssen. Durch die Substitution

$$x + y = 2\varepsilon,\ x - y = 2\theta$$

bestimmen sich also ganze Zahlen ε, θ, und aus der Gleichung (4) geht die andere:

$$u = \xi^2 + 8(\varepsilon^2+\theta^2) + 4z^2$$

oder

$$u = \xi^2 + 2\eta^2 + 4\zeta^2 + 8\theta^2,$$

d. i. eine Auflösung der Gleichung (3) hervor, indem man

$$2\varepsilon = \eta,\quad z = \zeta$$

setzt. Demnach ist offenbar

$$N(\underset{(z \text{ gerade})}{u = \xi^2 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2}) = N(u = \xi^2 + 2\eta^2 + 4\zeta^2 + 8\theta^2),$$

oder, indem man den absoluten Wert von ξ mit i bezeichnet,

$$(5)\quad 2\cdot N(u = i^2 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2) = N(u = \xi^2 + 2\eta^2 + 4\zeta^2 + 8\theta^2).$$
$$i > 0 \text{ ungerade, } z \text{ gerade}$$

Durch eine ganz entsprechende Betrachtung findet sich, wenn zweitens $u \equiv 5 \pmod{8}$ ist, die Gleichung

$$(6)\quad 2\cdot N(u = i^2 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2) = N(u = \xi^2 + 2\eta^2 + 4\zeta^2 + 8\theta^2).$$
$$i > 0 \text{ ungerade, } z \text{ ungerade}$$

Verbindet man dies Ergebnis aber mit den Formeln (2), so erhält man für $u \equiv 1 \pmod{8}$

$$N(u = \xi^2 + 2\eta^2 + 4\zeta^2 + 8\theta^2) = \zeta_1(u) + S,$$

für $u \equiv 5 \pmod{8}$

$$N(u = \xi^2 + 2\eta^2 + 4\zeta^2 + 8\theta^2) = \zeta_1(u) - S,$$

mithin allgemein für $u \equiv 1 \pmod{4}$, wie auf S. 413 gefolgert ist,

$$(7)\quad N(u = \xi^2 + 2\eta^2 + 4\zeta^2 + 8\theta^2) = \zeta_1(u) + (-1)^{\frac{u^2-1}{8}} \cdot \sum_{u = i^2 + 4s^2,\ i > 0} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \cdot i.$$

Übrigens gilt diese Formel auch für den Fall $u \equiv 3 \pmod{4}$, denn alsdann hat die Gleichung

$$u = i^2 + 4s^2$$

keine Lösungen, die Summe zur Rechten fällt also aus, und man findet, wie es der Satz auf S. 419 aussagt,

$$N(u = \xi^2 + 2\eta^2 + 4\zeta^2 + 8\theta^2) = \zeta_1(u).$$

Zu Seite 461.

S. *Kummer* im Journ. f. reine u. angew. Math. 40 (1850), S. 130 oder im Journ. des math. (1) 16 (1851), S. 488. Die Primzahlen 37, 59, 67 gehören zwar nicht zu denen, welche die erwähnte Bedingung erfüllen, aber auch für sie hat *Kummer* den *Fermat*schen Satz durch besondere Untersuchung bestätigt (Abh. der Berliner Akad. 1857, S. 41; Monatsberichte derselben 1857, S. 275).

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Fricke, R., und F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. In 2 Bänden. I. Band: Die gruppentheoretischen Grundlagen. Mit 192 Textfiguren. [XIV u. 634 S.] gr. 8. 1897. Geh. n. *M* 22.—

——— II. Band: Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen. 1. Hälfte: Engere Theorie der automorphen Funktionen. Mit 34 Textfiguren. [232 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. *M* 10.— [2. Hälfte in Vorbereitung.]

Gans, R., Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. 2. Auflage. Mit 35 Figuren im Text [X u. 126 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. *M* 3.60.

Gordan, P., Vorlesungen über Invariantentheorie, herausg. von G. Kerschensteiner. I. Band: Determinanten. [XI u. 201 S.] gr. 8. 1885. Geh. n. *M* 6.40.

——— II. Band: Binäre Formen. [XII u. 360 S.] gr. 8. 1887. Geh. n. *M* 11.60.

Graßmann, H., projektive Geometrie der Ebene. Unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. In 2 Bänden. I. Band: Binäres. Mit 126 Figuren im Text. [XII u. 360 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. *M* 12.—, geb. n. *M* 13.— [II. Band u. d. Pr.]

Grundlehren der Mathematik. Für Studierende und Lehrer. In 2 Teilen. Mit vielen Textfiguren. gr. 8. Geb.

I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. Bearbeitet von E. Netto und C. Färber. 2 Bände. [In Vorbereitung.]
II. Teil: Die Grundlehren der Geometrie. Bearbeitet von W. Frz. Meyer. und H. Thieme. 2 Bände.
I. Band. Die Elemente der Geometrie. Von H. Thieme. Mit 323 Textfiguren. [XII und 394 S.] 1909. n. M. 9.—
II. — [In Vorbereitung.]

Hensel, K., Theorie der algebraischen Zahlen. In 2 Bänden. I. Band. [XI u. 349 S.] gr. 8. 1908. Geb. n. *M* 14.— [II. Band unter der Presse.]

Jahnke, E., Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Mit 32 Textfiguren. [XII u. 236 S.] gr. 8. 1905. Geb. n. *M* 5.60.

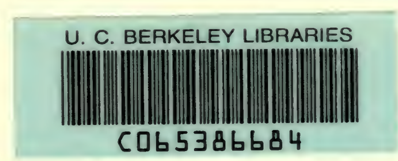
v. Ignatowsky, W., die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. 2 Teile. Teil I, die Vektoranalysis. Mit 27 Textfiguren. [VIII u. 112 S.] 8. 1909. Steif geh. n. *M* 2.60, geb. n. *M* 3.— Teil II. Mit 14 Figuren. [IV u. 123 S.] [Erscheint Ende 1909.]

Klein, F., Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Mit 1 lithographierten Tafel. [VIII u. 260 S.] gr. 8. 1884. Geh. n. *M* 8.—

——— autographierte Vorlesungshefte. 4. Geh.

Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie.
Heft 1. [391 S.] (W.-S. 1895/96) } 2. unveränderter Abdruck 1907.
Heft 2. [354 S.] (S.-S. 1896) } zusammen n. *M* 14.50.




U. C. BERKELEY LIBRARIES
C065386684

